

# 高校数学教育

沖縄県高等学校数学教育会誌

第57号

2021年（令和3年）7月27日（火）

沖縄県高等学校数学教育会 発行

## 目 次

|                            |          |    |
|----------------------------|----------|----|
| 沖縄県高等学校数学教育会会長あいさつ         | 会長 金城 正樹 | 1  |
| 沖縄県高等学校数学教育会会則             |          | 2  |
| 令和2年度                      | 会 務 報 告  | 3  |
|                            | 決 算 報 告  | 4  |
|                            | 会計監査報告   | 5  |
| 令和3年度                      | 役 員      | 6  |
|                            | 行事計画     | 7  |
|                            | 予 算 案    | 8  |
| 第45回「高校数学教育を考える会」大学入試問題研究  |          | 9  |
| 第75回九州算数・数学教育研究(佐世保)大会発表論文 |          | 25 |
| 九州数学教育会総会開催地一覧表            |          | 28 |

## あいさつ

沖縄県高等学校数学教育会  
会 長 金 城 正 樹

今年度も県内において新型コロナウイルス感染者数が下げ止まり傾向にあることや変異株の感染拡大などにより、本県が4月12日から新型コロナウイルス感染症「まん延防止等重点措置」指定されました。さらに、5月23日から緊急事態宣言の対象地域に指定され、一部の学校を除いて31日から時差登校や分散登校となり、6月7日から20日までの間、臨時休業が決定しました。

このような中、今年度も3密を避けるために第59回総会の決議事項を理事・代議員の書面表決で実施することにご理解とご了承をお願いします。

本会は、沖縄県における数学教育の研究団体として、「高校数学教育を考える会」「数学診断テスト」などを実施して、本県の数学教育の発展の為に貢献してまいりました。

昨年度は、コロナ禍における役員会以外の開催が難しく、第58回総会での審議事項を理事・代議員の書面表決で行いました。また、琉球大学の入試問題を通して大学の先生方と情報交換を行う「高校数学教育を考える会」は紙面発表の形式で実施しました。診断テスト委員会はweb会議を重ね、例年通り年2回の診断テストを実施することができました。九数教や沖数教関係では、第74回九数教（福岡）大会、小中高合同研究会が中止となっています。

今後の新型コロナウイルス感染状況にもよりますが、今年度の「高校数学教育を考える会」はweb開催も含めて検討していきたいと思います。また、第75回九数教（佐世保）大会は紙上発表となる見込みです。研究発表に向け準備をなさっていた八重山高等学校宮良信克教諭、宜野湾高等学校福原明奈教諭、小禄高等学校大嶺和大教諭の三名の先生方には、この場を借りて感謝申し上げます。この会誌に発表原稿を掲載していますので、多くの先生方が参考にしていただき、今後の実践に役立てて頂ければ幸いです。

さて、いよいよ令和4年度入学生から新学習指導要領に基づき、学校教育が年次進形で実施されます。数学においては、消えた数学Cが復活し、主な内容として、現行の数学Bから「ベクトル」、数学Ⅲから「平面上の曲線と複素数平面」、数学活用から「数学的な表現の工夫」（統計グラフ、離散グラフや行列など）が移動しています。数学全般として、統計処理の部分がさらに増えている印象があります。

また、今年3月に大学入試センターから、「平成30年度告示高等学校学習指導要領に対応した令和7年度大学入学共通テストからの出題教科・科目について」が示され、必修履修科目「情報Ⅰ」の内容を大学入学共通テストで『情報』として出題されることが示されました。さらに、数学においては、これまでの『数学Ⅱ・数学B』に代わり、『数学Ⅱ、数学B、数学C』が出題されることになりました。これらは、プログラミング能力やデータ・サイエンスや統計教育を充実することで、「超スマート社会」とも言われるSociety5.0に向けて情報活用能力の習得を目指すものであります。

各学校においては、新しい時代に必要となる知識及び技能の習得と思考力・判断力・表現力等の「確かな学力」の育成のための主体的・対話的で深い学びの授業改善に取り組む必要があります。

結びに、子ども達の学力向上に資する実践研究のさらなる活性化に向け、今後とも本教育会へのご理解とご協力をお願い申し上げ挨拶いたします。

# 沖縄県高等学校数学教育会会則

第1条 本会は沖縄県高等学校数学教育会と称す。

第2条 本会の事務局は原則として那覇市近郊の高等学校におく。

第3条 本会は沖縄県高等学校数学教育会の興隆と会員の相互親睦を図ることを目的とする。

第4条 本会は前条の目的を達成するために次の事業を行う。

- 1、数学教育に関する研究と調査
- 2、講習会、講演会および研修会などの開催
- 3、会誌の発行
- 4、九州数学教育会、日本数学教育学会との連携
- 5、その他

第5条 本会は沖縄県の高等学校数学教師ならびに本会の目的に賛同する者をもって組織する。

第6条 本会の目的を達成するために次の機関を置く。

- 1、総会
- 2、代議員会
- 3、理事会
- 4、各種委員会

第7条 総会は会長が召集し、年1回以上開き、次の事項を付議する。

- 1、代議員会の決定事項および会計監査の承認
  - 2、本会の解散、合併またはそれに準ずる事項
  - 3、その他重要な事項
- 2 総会の議事は出席者の過半数をもって決する。

第8条 代議員会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議決定する。

- 1、事業計画および予算
  - 2、事業報告および決算
  - 3、会則および内規の改正
  - 4、その他理事会の起案する事項
- 2 代議員会の議事は出席者の過半数をもって決する。

第9条 理事会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議する。

- 1、代議員会に提案する事項
  - 2、代議員会で決定した事項の執行
- 2 理事会の議事は出席者の過半数をもって決する。

第10条 本会に次の役員をおく。

役員の任期は1年とし、再選を妨げない。

会長 1名 副会長 3名  
理事 若干名（うち1名は常任理事）  
監事 3名

第11条 役員は代議員会において選出する。

- 1、会長は本会を代表し、会務を総理する。
- 2、副会長は会長を補佐し、会長に事故あるときは、その職務を代行する
- 3、理事は理事会を構成し、会務を執行する。
- 4、常任理事は事務局を構成する。
- 5、監事は本会の会計を監査する。

第12条 代議員は各高等学校において会員中より1名選出し、また必要に応じて会長が委嘱する。代議員は代議員会を構成する。

第13条 本会の会計年度は、4月1日に始まり、翌年3月31日に終わる。

第14条 本会の経費は、会費、補助金、およびその他の収入を持ってこれに充てる。

第15条 本会の会員は、会費を納入するものとする。

第16条 この会則の施行についての細則は、代議員会において決定する。

付 則

この会則は、1967年4月1日より施行する。

一部改正 平成17年4月1日

## 令和 2 年度 沖縄県高等学校数学教育会 会務報告

### 令和 2 年

- 4月 9日 第1回 高数教役員会（開邦高校）  
・令和2年度役員、年間計画、会誌55号、56号の発行等について
- 4月14日 第1回 沖数教事務局長会（琉球大学）  
・令和2年度役員、年間行事計画、会誌第47号、総会の持ち方、九数教（福岡）大会等について
- 4月17日 第1回 診断テスト委員会（web 会議）
- 5月 1日 第1回 沖数教役員会（書面会議）
- 5月19日 第2回 診断テスト委員会（web 会議）
- 6月 5日 第2回 沖数教役員会
- 6月18日 第1回 高数教理事会・代議員会
- 6月30日 第1回 高数教理事会・代議員会の書面表決〆切
- 7月21日 高校数学教育を考える会（紙上発表）
- 7月22日 第3回 診断テスト委員会（web 会議）
- 7月25日 第74回九数教（福岡）大会中止  
～27日
- 7月31日 第4回 診断テスト委員会（web 会議）
- 8月25日 沖数教臨時役員会（書面会議）  
・小中高合同研究会の中止および次年度研究授業について、総会実施について
- 9月 上旬 第1回 診断テスト実施
- 10月29日 第5回 診断テスト委員会（web 会議）
- 11月 5日 第6回 診断テスト委員会（web 会議）
- 11月20日 第7回 診断テスト委員会（web 会議）
- 11月28日 九数教事務局長会議・理事会・代表委員会（web 会議）  
・九数教（佐世保）大会に向けて（九州各県への発表者・指導助言者依頼等）
- 12月 上旬 第2回 診断テスト実施

### 令和 3 年

- 2月 4日 第5回 沖数教役員会（琉球大学）  
・第3回理事会に向けて他
- 2月18日 第3回 沖数教理事会（書面会議）  
・令和2年度総括、次年度に向けて
- 3月27日 第1回 大学入試問題研究委員会（第2回4月25日予定）

# 令和2年度 沖縄県高等学校数学教育会 決算

| 収入        | 支出      | 残金      |
|-----------|---------|---------|
| 1,137,055 | 508,240 | 628,815 |

## 収入の部

| 項 目 | 科 目         | 予 算 額     | 決算額       | △未・過収入額  | 説 明                      |
|-----|-------------|-----------|-----------|----------|--------------------------|
| 1   | 1 学 校 分 担 金 | 250,000   | 261,362   | 11,362   | 分担金+会費                   |
|     | 2 会 費       |           |           |          |                          |
|     | 3 繰 越 金     | 550,688   | 550,688   | 0        | 前年度からの繰越                 |
|     | 4 補 助 金     | 30,000    | 5,000     | △ 25,000 | 九数教からの補助                 |
|     | 5 協 賛 金     | 200,000   | 170,000   | △ 30,000 | 管理職等からの協賛金               |
|     | 6 雑 収 入     | 150,000   | 150,000   | 0        | 基礎問題集編集委5万、<br>診断テスト委10万 |
|     | 7 通 帳 利 息   | 0         | 5         | 5        |                          |
| 計   |             | 1,180,688 | 1,137,055 | △ 43,633 |                          |

## 支出の部

| 項 目 | 科 目                 | 予 算 額     | 決算額     | 残 額     | 説 明                             |
|-----|---------------------|-----------|---------|---------|---------------------------------|
| 1   | 運 営 費               | 85,000    | 78,240  | 6,760   |                                 |
|     | 1 庶 務 費             | 10,000    | 6,240   | 3,760   | 振り込み手数料、郵送料                     |
|     | 2 会 議 費             | 3,000     | 0       | 3,000   | 会議、大会運営費                        |
|     | 3 手 当               | 46,000    | 46,000  | 0       | 事務局4万+監査2千×3                    |
|     | 4 沖 数 教 会 費         | 26,000    | 26,000  | 0       | 沖数教への会費                         |
| 2   | 事 務 費               | 355,000   | 155,000 | 200,000 |                                 |
|     | 1 研究発表補助費           | 30,000    | 30,000  | 0       | 九州大会3名                          |
|     | 2 派 遣 費             | 180,000   | 0       | 180,000 | 12月九数教理事会（会長）<br>コロナ禍でZoom会議    |
|     | 3 講習・講演会費           | 5,000     | 0       | 5,000   |                                 |
|     | 4 委員会活動費            | 25,000    | 15,000  | 10,000  | 入試問題研究15,000円<br>集会とICTは今年度活動なし |
|     | 5 研究調査補助費           | 5,000     | 0       | 5,000   |                                 |
|     | 6 支部活動補助費           | 0         | 0       | 0       |                                 |
|     | 7 会 誌 発 行 費         | 110,000   | 110,000 | 0       | 会誌第55号、56号製本代                   |
| 3   | 沖 数 教 分 担 金         | 270,000   | 270,000 | 0       |                                 |
| 4   | 雑 費                 | 0         | 0       | 0       |                                 |
| 5   | 全国大会運営委員・<br>発表者参加費 | 0         | 0       | 0       |                                 |
| 6   | 九数教沖縄大会積立費          | 300,000   | 5,000   | 295,000 |                                 |
| 7   | 予 備 費               | 170,688   |         | 170,688 |                                 |
| 計   |                     | 1,180,688 | 508,240 | 672,448 |                                 |

# 監査報告書

沖縄県高等学校数学教育会

会長 宮 城 薫 殿

令和2年度沖縄県高等学校数学教育会の会計監査の結果を下記の通り報告します。

## 記

会計監査は、金銭出納簿、証書書類および預金通帳によって実施した。

1. 証書類は、金銭出納簿の通り整理されていた。
2. 残高 628,815円 は、琉球銀行小禄支店普通預金口座 205-278に預金されていることを確認した。
3. 九数教沖縄大会通帳として、琉球銀行小禄支店普通預金口座 470-560に金額 1,032,848円 が預金されていることを確認した。  
(※前年度繰越金 1,027,839円 に利息 9円。高数教より積立金 5,000円)

以上、監査の結果、異常を認めない。

令和3年 3 月 29 日 ( 月 )  
沖縄県高等学校数学教育会  
監査委員

知 石 勝 史

前 泊 聖 子

兼 屋 辰 紀

# 令和3年度 沖縄県高等学校数学教育会役員(案)

## 高数教三役

| 高数教 | 名前   | 勤務先 | 備考  |
|-----|------|-----|-----|
| 会長  | 金城正樹 | 向陽  | 校長  |
| 副会長 | 宮城竜幸 | 泊   | 副校長 |
|     | 前里哲寿 | 糸満  | 教頭  |
|     | 西原 誠 | 小禄  |     |
| 事務局 | 金城徹也 | 小禄  | 教諭  |
| 庶務  | 大嶺和大 | 小禄  |     |
| 会計  | 日高輝忠 | 小禄  |     |

## 高数教理事

| 高数教   | 名前     | 勤務先     | 備考            |
|-------|--------|---------|---------------|
| 各種委員会 | 池間健将   | 首里東     | 診断テスト委員長      |
|       | 田口清陽   | 沖縄水産    | 大学入試問題研究委員長   |
|       | 比嘉真吾   | 浦添      | 基礎問題集編集委員会委員長 |
|       | 真栄田義尚  | 浦添商     | 研修集会委員長       |
|       | 西村松太郎  | 首里      | ICT委員会        |
| 沖数教   | 花城健彰   | 首里      | 沖数教事務局        |
| 校長    | 金城栄一   | 辺土名     |               |
|       | 太田守克   | 読谷      |               |
|       | 仲外盛順   | 美里      |               |
|       | 宮城 薫   | コザ      |               |
|       | 平良 淳   | 球陽      |               |
|       | 島仲 利泰  | 普天間     |               |
|       | 星野 朗   | 首里      |               |
|       | 大濱 裕司  | 開邦      |               |
|       | 前三盛英明  | 豊見城南    |               |
|       | 金城 毅   | 南風原     |               |
|       | 崎間恒哉   | 南部商業    |               |
|       | 金城昭人   | コザ      |               |
| 教頭    | 金城達也   | 北谷      |               |
|       | 安仁屋宗一郎 | 首里      |               |
|       | 新井孝雄   | 首里東     |               |
|       | 上江洲寿   | 開邦      |               |
|       | 山城芳則   | 真和志     |               |
|       | 川添貴司   | 八重山     |               |
|       | 小嶺雅春   | 泊       |               |
|       | 半嶺 満   | 教育指導統括監 | 教育庁           |
| 行政    | 玉城 学   | 県立学校教育課 |               |
|       | 喜久本直貴  | 保健体育課   |               |
|       | 伊志嶺嘉典  | 総務課     |               |
|       | 金城順也   | 文科省     |               |
|       | 新垣公崇   | 県立学校教育課 |               |
|       | 玉城重光   | 県立学校教育課 |               |
|       | 真壁義隆   | 生涯学習振興課 |               |
|       | 平良哲也   | 学校人事課   |               |
|       | 永吉和紀   | 教科研修班   | 教育センター        |
|       | 金城伸子   | 教育経営班   |               |
|       | 宮城広行   | 教育経営班   |               |
|       | 仲地範禮   | IT教育班   |               |
|       | 真喜屋篤   | IT教育班   | 離島児童生徒支援センター  |
|       | 高原香織   |         |               |

## 沖数教役員(高数教選出)

| 沖数教 | 名前    | 勤務先     | 備考  |
|-----|-------|---------|-----|
| 副会長 | 金城 正樹 | 向陽      | 校長  |
| 理事  | 大濱裕司  | 開邦      | 校長  |
|     | 金城栄一  | 辺土名     |     |
|     | 星野 朗  | 首里      |     |
| 代議員 | 宮城竜幸  | 泊       | 副校長 |
|     | 小嶺雅春  | 泊       | 教頭  |
|     | 西原 誠  | 小禄      |     |
|     | 前里哲寿  | 糸満      |     |
|     | 山城芳則  | 真和志     |     |
|     | 伊志嶺嘉典 | 総務課     | 教育庁 |
|     | 新垣公崇  | 県立学校教育課 |     |
| 監査  | 上江洲隆  | 読谷      | 教諭  |

## 各種委員会

|             | 名前     | 勤務先     | 名前    | 勤務先     |
|-------------|--------|---------|-------|---------|
| 診断テスト委員会    | ◎池間健将  | 首里東     | 西村松太郎 | 首里      |
|             | 屋富祖直   | 那覇西     | 比嘉義一郎 | 那覇国際    |
|             | 多和田哲章  | 普天間     | 松元輝   | 那覇国際    |
|             | 石川睦    | 嘉手納     | 嘉手川真子 | 開邦      |
|             | 花城健彰   | 首里(沖数教) | 金城徹也  | 小禄(高数教) |
| 大学入試問題研究委員会 | ◎田口清陽  | 沖縄水産    | 洲鎌啓祐  | 糸満      |
|             | 湧川泰成   | コザ      | 下里幸司  | 陽明高支    |
|             | 徳門潔    | 那覇      | 屋富祖直  | 那覇西     |
|             | 石川吉幸   | 大平特支    |       |         |
| 基礎問題集編集委員会  | ◎比嘉真吾  | 浦添      | 垣花康夫  | 那覇      |
|             | 真栄田義尚  | 浦添商     | 安座間淳  | 宮古工業    |
|             | 平田直樹   | 首里      | 城間直美  | 浦添      |
| 研究集会委員会     | ◎真栄田義尚 | 浦添商     | 大城貴洋  | 豊見城     |
|             | 徳永拓也   | 名護商工    | 新城智也  | 知念      |
|             | 金城裕介   | 向陽      |       |         |
| ICT委員会      | ◎西村松太郎 | 首里      | 豊里力也  | コザ      |
|             | 砂川真木   | 豊見城     | 日高輝忠  | 小禄      |

## 高数教監査

| 監事 | 知名勝史 | 首里東  |
|----|------|------|
|    | 仲座真紀 | 小禄   |
|    | 前泊聖子 | 豊見城南 |

## 令和3年度 行事計画（案）

1. 会員の各種委員会での教育研究活動および親睦
2. 沖数教・九数教・日数教との連携および活動

| 月  | 行事予定                                                                     | 説明                                                                |
|----|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 4  | 4/21(水) 第1回沖数教事務局長会<br>4/26(月) 第1回高数教役員会                                 | 18:00 ～ 首里高校<br>17:30 ～ 小禄高校小会議室                                  |
| 5  | 5/14(金) 第1回沖数教役員会                                                        | 18:00 ～ 首里高校                                                      |
| 6  | 6/ 3(木) 第1回高数教理事・代議員会<br><br>6/21(月) 第2回沖数教役員会<br>6/21(月) 第1回沖数教理事会・代議員会 | 【会誌第57号発行予定】                                                      |
| 7  | 第1回 数学診断テスト（上旬）<br><br>7/26(月)～28(水)<br>第75回九数教（佐世保）大会<br>（紙上発表）         | 沖縄県高等学校部会発表者<br>八重山高校 宮良 信克 先生<br>宜野湾高校 福原 明奈 先生<br>小禄高校 大嶺 和大 先生 |
| 8  | 8/19(木)～22(日)<br>第103回全国（埼玉）大会<br>高校数学教育を考える会<br>（コロナの状況みて8月予定）          | 昨年度実施なし<br>会場を高校にして欲しいとの要望あり                                      |
| 9  |                                                                          |                                                                   |
| 10 | 10/8(金) 第3回沖数教役員会<br>10/22(金) 第2回沖数教理事会・代議員会                             | 琉球大学<br>琉球大学                                                      |
| 11 | 小中高合同研究会（11月予定）                                                          | 研究授業：小学校部会が実施予定                                                   |
| 12 | 第2回 数学診断テスト（上旬）<br>九数教理事・代議員会（上旬）                                        | 会長・事務局長派遣                                                         |
| 1  |                                                                          |                                                                   |
| 2  | 2/4(金) 第4回沖数教役員会                                                         | 首里高校                                                              |
| 3  | 大学入試問題研究委員会（下旬）                                                          |                                                                   |

※その他必要に応じて役員会予定

# 令和3年度 沖縄県高等学校数学教育会 予算（案）

## 収入の部

| 項 目 | 科 目         | 予 算 額     | 前年度予算額    | 増 △減     | 説 明                 |
|-----|-------------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| 1   | 1 学 校 分 担 金 | 250,000   | 250,000   | 0        | 分担金+会費              |
|     | 2 会 費       |           |           |          |                     |
|     | 3 繰 越 金     | 628,815   | 550,688   | 78,127   | 前年度からの繰越            |
|     | 4 補 助 金     | 10,000    | 30,000    | △ 20,000 | 九数教からの補助            |
|     | 5 協 賛 金     | 230,000   | 200,000   | 30,000   | 管理職からの協賛金           |
|     | 6 雑 収 入     | 150,000   | 150,000   | 0        | 基礎問題集5万<br>診断テスト10万 |
| 計   |             | 1,268,815 | 1,180,688 | 88,127   |                     |

## 支出の部

| 項 目 | 科 目                 | 予 算 額     | 前年度予算額    | 増 △減     | 説 明                                 |
|-----|---------------------|-----------|-----------|----------|-------------------------------------|
| 1   | 運 営 費               | 85,000    | 85,000    | 0        |                                     |
|     | 1 庶 務 費             | 10,000    | 10,000    | 0        | 通信費, 消耗品費                           |
|     | 2 会 議 費             | 3,000     | 3,000     | 0        | 会議, 大会運営費                           |
|     | 3 手 当               | 46,000    | 46,000    | 0        | 事務局, 会計, 庶務・・・4万<br>+監査2千×3         |
|     | 4 沖 数 教 会 費         | 26,000    | 26,000    | 0        | 沖数教への会費                             |
| 2   | 事 務 費               | 305,000   | 355,000   | △ 50,000 |                                     |
|     | 1 研究発表補助費           | 30,000    | 30,000    | 0        | 1万円×3人                              |
|     | 2 派 遣 費             | 180,000   | 180,000   | 0        | 7月:九数教大会(会長, 助言者)<br>12月:九数教理事会(会長) |
|     | 3 講習・講演会費           | 5,000     | 5,000     | 0        |                                     |
|     | 4 委員会活動費            | 25,000    | 25,000    | 0        | 大学入試問題研究委員会<br>研究集会委員会, ICT委員会      |
|     | 5 研究調査補助費           | 5,000     | 5,000     | 0        |                                     |
|     | 6 支部活動補助費           | 0         | 0         | 0        |                                     |
|     | 7 会 誌 発 行 費         | 60,000    | 110,000   | △ 50,000 | 会誌第57号製本代                           |
| 3   | 九 数 教 分 担 金         | 270,000   | 270,000   | 0        |                                     |
| 4   | 雑 費                 | 0         | 0         | 0        |                                     |
| 5   | 全国大会運営委員・<br>発表者参加費 | 0         | 0         | 0        |                                     |
| 6   | 九数教沖縄大会積立費          | 300,000   | 300,000   | 0        |                                     |
| 7   | 予 備 費               | 308,815   | 170,688   | 138,127  |                                     |
| 計   |                     | 1,268,815 | 1,180,688 | 88,127   |                                     |

# 令和3年度

## 第45回高校数学教育を考える会

(沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学)

紙面発表

## 目次

|       |                                             |       |
|-------|---------------------------------------------|-------|
| 令和3年度 | 琉球大学入試試験問題についての感想と質問<br>( 高数教 大学入試問題検討委員会 ) |       |
| 前期日程  | 甲                                           | 9     |
| 前期日程  | 乙                                           | 10    |
| 後期日程  |                                             | 11    |
| 令和3年度 | 琉球大学入試問題 解答例<br>( 高数教 大学入試問題検討委員会 )         |       |
| 前期日程  | 甲                                           | 12～18 |
| 前期日程  | 乙                                           | 19～20 |
| 後期日程  |                                             | 21～23 |
| 令和3年度 | 琉球大学入試問題に関する質問事項への回答                        | 24    |

令和3年度(2021)琉球大学入試問題(前期・乙)に関する質問事項

| 問題<br>番号                                                                                                                                                 | 範囲             | 分野                   | 難易<br>度        | 質 問 事 項                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b><br>問1<br>問2<br>問3                                                                                                                               | 数Ⅱ<br>数A<br>数Ⅱ | 円の方程式<br>整数<br>指数・対数 | 標準<br>標準<br>標準 | <ul style="list-style-type: none"> <li>・問1は、境界線を含まないという記述までできていたか。</li> <li>・問1は、放物線と円の交点の記述がないものはどのように採点したか。連立方程式として解く必要があったか。(記載のみで良かったか。)</li> <li>・問2は、ユークリッドの互除法の計算を書いただけのものでよかったか。また、答えだけのものはどのような配点になったか。</li> <li>・問3は、置き換えや、<math>\sqrt{x} &gt; 0</math>などの記述ができていたか。</li> </ul> |
| <b>2</b><br>問1<br>問2<br>問3                                                                                                                               | 数Ⅱ<br>数Ⅱ<br>数Ⅱ | 微分法<br>・<br>積分法      | 易<br>標準<br>標準  | <ul style="list-style-type: none"> <li>・問1の極値を調べる部分は増減表だけで、「<math>x=○</math>のとき、極大値●」という記述まで必要だったか。極値をとるときの<math>x</math>までかけていたか。</li> <li>・問2がどれくらいの受検生が解けていたか。どこでつまづいているものが多かったか。</li> <li>・問2では問題の条件に従って、適するものをしっかり判断出来ていたか。</li> </ul>                                               |
| <p>全体</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・受検生の力を見ることが出来る良い構成だったと感じました。点数はうまく分かれたでしょうか。</li> <li>・<b>1</b>がどれくらいできていたか、採点の感想などを聞きたいです。</li> </ul> |                |                      |                |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和3年度(2021)琉球大学入試問題(前期・甲)に関する質問事項

| 問題<br>番号                                                                                                                                                                                                           | 範囲             | 分野                  | 難易度             | 質問事項                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div>1</div> 問1<br>問2<br>問3                                                                                                                                                                                        | 数Ⅱ             | 微分法<br>・<br>積分法     | 易<br>易<br>やや難   | <ul style="list-style-type: none"> <li>・問3は、数の大小関係の説明は必要だったか。どれくらいできていたか。</li> <li>・問3は、グラフの有無は配点に影響あったか。</li> <li>・問3は、問2ができていなくても点数はあったか。</li> <li>・間違っている解答は、どこでつまづいていたか。</li> </ul>                                                                                                                                           |
| <div>2</div> 問1<br>問2<br>問3                                                                                                                                                                                        | 数Ⅲ<br>数B<br>数Ⅲ | 微分法<br>数列<br>極限     | 標準<br>難<br>やや難  | <ul style="list-style-type: none"> <li>・問1から証明問題であったが、受検生の出来はどうであったか。問題で与えられた<math>e</math>に大きさをどの程度利用できていたか。</li> <li>・問2は、<math>n=1</math>のときに成り立つことの証明はどの程度の割合でできていたか。また、<math>n=1</math>のときに成り立つことの証明のみで配点があったか。</li> <li>・いろいろな答案があったと想像できるが、採点の感想を聞きたい。</li> <li>・医学部医学科はどれくらいできていたか。</li> <li>・問題の着想はどんなところからか。</li> </ul> |
| <div>3</div> 問1<br>問2<br>問3                                                                                                                                                                                        | 数Ⅲ<br>数Ⅲ<br>数Ⅱ | 極方程式<br>微分法<br>三角関数 | 標準<br>標準<br>やや難 | <ul style="list-style-type: none"> <li>・<math>x, y</math>の関係式に置き換えることができていたか。</li> <li>・<math>\theta=0</math>のとき<math>r=\frac{1}{2}</math>, <math>\theta=\frac{\pi}{2}</math>のとき<math>r=1</math>などと点をとってグラフをかいた受検生はいなかったか。その場合はどのような配点になったか。</li> <li>・離心率の公式や事実を知っていて、グラフの概形を書いたものはどのような配点になったか。</li> </ul>                      |
| <div>4</div> 問1<br>問2<br>問3                                                                                                                                                                                        | 数A             | 確率                  | 易<br>標準<br>標準   | <ul style="list-style-type: none"> <li>・問題の意味を理解できていたか。</li> <li>・採点の感想を聞きたいです。</li> <li>・記述がしっかりできていたか。式や計算だけのものは点数を与えたか。</li> </ul>                                                                                                                                                                                             |
| <p>全体</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・微積分や確率など、頻出の分野からの出題に加え、極方程式や証明問題があり、全体的にバランスの良い出題だったと感じました。数の大小関係の評価や、記述力が求められる印象を受けましたが受検生がどのくらいできていたか気になります。</li> <li>・共通テストを意識した作問作りをしていく考えはありますか？</li> </ul> |                |                     |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和3年度(2021)琉球大学入試問題(後期)に関する質問事項

| 問題<br>番号 | 範囲             | 分野             | 難易度            | 質問事項                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | 数Ⅲ             | 微分法            | やや難            | <ul style="list-style-type: none"> <li>・出題の意図は、計算力を見たかったのでしょうか。</li> <li>・凹凸を含めた増減表をかくて解答すれば良かったか。答え方としては、どのようなものが多かったか。</li> <li>・<math>x</math>の値は合っているが、<math>y</math>の値が違っているものは減点したか。</li> <li>・グラフでは、変曲点の<math>y</math>座標の大小の評価まで必要だったか。</li> <li>・どのような配点・採点基準だったか。</li> </ul> |
| 2        | 数Ⅲ             | 積分法            | 標準             | <ul style="list-style-type: none"> <li>・三角関数の合成は、<math>\alpha</math>の設定までできていたか。</li> <li>・絶対値を外す部分で、<math>x = \pi - \alpha</math>で<math>f(x)</math>の正負が分かれるところなどがしっかりできていたか。</li> </ul>                                                                                              |
| 3        | 数Ⅲ             | 複素数<br>平面      | 標準             | <ul style="list-style-type: none"> <li>・両辺を割るときに、0でないという記述の有無で点数が変わったか。</li> <li>・正の方向の回転と、負の方向の回転を二つ考えていたか。</li> <li>・仮定をして矛盾を導く背理法の流れが最後までできていたか。</li> <li>・<math>\sqrt{3}</math>が無理数であることを使う方向で考えられていたか。</li> <li>・正答率が聞きたい。</li> </ul>                                            |
| 4        | 問1<br>問2<br>問3 | 数A<br>数A<br>数A | 確率<br>確率<br>確率 | <ul style="list-style-type: none"> <li>易</li> <li>やや易</li> <li>やや易</li> </ul>                                                                                                                                                                                                         |
| 全体       |                |                |                | <ul style="list-style-type: none"> <li>・確率の問題であったが、記述ができていたか。</li> <li>・問3は、答えが<math>p</math>によらないところがあり、面白いと思いました。</li> <li>・確率の出題についての意図や今回の問題設定の意図などはありますか。</li> </ul>                                                                                                             |
| 全体       |                |                |                | <ul style="list-style-type: none"> <li>・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。</li> <li>・微分・積分・証明問題; その中にも増減表やグラフの記入・場合分け・背理法などがありバランスの良い出題だったと感じました。</li> </ul>                                                                                                                      |

(注: 易・標準・難は教科書レベルにおいて)

1 関数  $f(x)=2x^3-3x^2-6x+7$  を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問1 方程式  $f(x)=0$  を解け。

問2  $f(x)$  が  $x=\alpha, \beta$  (ただし,  $\alpha < \beta$ ) で極値をとるとき,  $\alpha$  と  $\beta$  を求めよ(極値を求める必要はない)。

問3 曲線  $y=f(x)$  と  $x$  軸で囲まれる領域のうち,  $\alpha \leq x \leq \beta$  を満たす部分の面積を求めよ。

**【解答】** 問1  $f(1)=2-3-6+7=0$  より  $f(x)$  は  $x-1$  を因数に持つ。

$f(x)$  を  $x-1$  で割ると商は  $2x^2-x-7$  であるから

$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-7) \text{ より, } f(x)=0 \text{ の解は } x=1, \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4} \quad \text{答}$$

問2  $f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$  より,  $f'(x)=0$  のとき  $x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  であるから,

増減表は以下のようになる。

| $x$     | ... | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | ... | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | ... |
|---------|-----|------------------------|-----|------------------------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0                      | -   | 0                      | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 極大                     | ↘   | 極小                     | ↗   |

$$\alpha < \beta \text{ より, } \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{答}$$

問3  $7 < \sqrt{57} < 8$  より,  $8 < 1 + \sqrt{57} < 9$  であるから  $2 < \frac{1+\sqrt{57}}{4} < \frac{9}{4}$

$$-8 < -\sqrt{57} < -7 \text{ より, } -7 < 1 - \sqrt{57} < -6 \text{ であるから } -\frac{7}{4} < \frac{1-\sqrt{57}}{4} < -\frac{3}{2}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \text{ より, } 3 < 1 + \sqrt{5} < 4 \text{ であるから } \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$$

$$-3 < -\sqrt{5} < -2 \text{ より, } -2 < 1 - \sqrt{5} < -1 \text{ であるから } -1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

以上の大小関係と問1, 問2より, 求める面積は右図の斜線部分である。

求める面積を  $S$ ,  $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x$  とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^1 f(x) dx + \int_1^{\beta} -f(x) dx \\ &= F(1) - F(\alpha) - \{F(\beta) - F(1)\} \\ &= 2F(1) - \{F(\alpha) + F(\beta)\} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } F(1) = \frac{1}{2} - 1 - 3 + 7 = \frac{7}{2},$$

$$F(\alpha) + F(\beta) = \frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4) - (\alpha^3 + \beta^3) - 3(\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta)$$

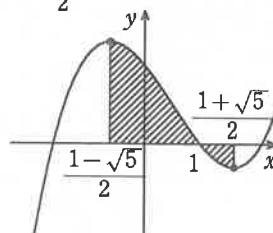
であり,  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$  より,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 3^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 7$$

$$\text{より, } S = 2 \cdot \frac{7}{2} - \left( \frac{1}{2} \cdot 7 - 4 - 3 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \right) = \frac{19}{2} \quad \text{答}$$



【別解】  $F(\alpha) + F(\beta)$  を求める計算は、

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ より, } \alpha^2 = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\alpha^3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{8-4\sqrt{5}}{4} = 2-\sqrt{5},$$

$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ より, } \beta^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\beta^3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5},$$

$$\beta^4 = (\beta^2)^2 = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{以上より, } \alpha + \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 4, \quad \alpha^4 + \beta^4 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} + \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 7$$

と計算しても良い。

また、 $(a+b\sqrt{k})^n = a_n + b_n\sqrt{k}$  (数列  $a_n, b_n$  は有理数とする) のとき

$(a-b\sqrt{k})^n = a_n - b_n\sqrt{k}$  という事実を知っていれば、

問3で  $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3, \alpha^4 + \beta^4$  の値は、それぞれ  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$  の実部の2倍である。

【参考】  $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3, \alpha^4 + \beta^4$  について、

一般に、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解が  $x = \alpha, \beta$  であるとき、

$S_n = \alpha^n + \beta^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とすると、 $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$  が成り立つ。

証明)  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \dots \textcircled{1}$

$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times \alpha^n + \textcircled{2} \times \beta^n$  により  $a(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) + b(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + c(\alpha^n + \beta^n) = 0$

今回、問2より  $\alpha, \beta$  は2次方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  の解だから

$S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = 0$  すなわち  $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$  が成り立つ。

$S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2, S_1 = \alpha + \beta = 1$  だから

$$\alpha^2 + \beta^2 = S_2 = S_1 + S_0 = 1 + 2 = 3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 1 = 4$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = S_4 = S_3 + S_2 = 4 + 3 = 7$$

なお、 $L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$  により求められる数  $L_0, L_1, L_2, \dots$  はリュカ数と呼ばれる。

今回の  $S_n$  は  $n$  番目のリュカ数  $L_n$  に一致する。

- 2 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1=1, a_{n+1}=2e^{-a_n}-1+a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) によって定める。次の問いに答えよ。ただし、 $2 < e < 3$  であることは証明なしに用いてよい。(50点)

問1  $f(x)=e^{-x}-1+x$  とする。 $0 < x < 1$  のとき、不等式  $0 < f(x) < \frac{2}{3}x$  が成り立つことを示せ。

問2  $b_n=a_n-\log 2$  とする。すべての正の整数  $n$  について  $0 < b_n < 1$  となることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

問3  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

**解答** 問1  $f'(x)=-e^{-x}+1$  である。 $0 < x < 1$  のとき、 $-1 < -x < 0$  より、 $\frac{1}{e} < e^{-x} < 1 \dots ①$

$-1 < -e^{-x} < -\frac{1}{e}$  より、 $0 < -e^{-x}+1 < -\frac{1}{e}+1$  であるから、 $f'(x) > 0$  より  $f(x)$  は単調増加

また、 $f(0)=0$  より  $0 < x < 1$  のとき、 $f(x) > 0 \dots ②$

$$g(x)=\frac{2}{3}x-f(x)=-e^{-x}+1-\frac{1}{3}x \text{ とおくと、 } g'(x)=e^{-x}-\frac{1}{3}$$

$0 < x < 1$  のとき、①より  $\frac{1}{e}-\frac{1}{3} < e^{-x}-\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$  であり、

$2 < e < 3$  より、 $\frac{1}{e}-\frac{1}{3}=\frac{3-e}{3e} > 0$  であるから、 $g'(x) > 0$  より  $g(x)$  は単調増加

また、 $g(0)=0$  より  $0 < x < 1$  のとき、 $g(x) > 0$  すなわち、 $f(x) < \frac{2}{3}x \dots ③$

②、③より、 $0 < x < 1$  のとき、不等式  $0 < f(x) < \frac{2}{3}x$  が成り立つ。 

**別解** ( $f(x), g(x)$  がそれぞれ単調増加であることの証明部分)

$f'(x)=-e^{-x}+1$  より、 $f''(x)=e^{-x} > 0$  である。 $f'(x)$  は単調増加かつ  $f'(0)=0$  であるから、 $0 < x < 1$  のとき  $f'(x) > 0$  より、 $f(x)$  は単調増加

$$g'(x)=e^{-x}-\frac{1}{3}, g''(x)=-e^{-x} < 0 \text{ である。 } g'(x) \text{ は単調減少かつ } g'(1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}=\frac{3-e}{3e} > 0$$

であるから、 $0 < x < 1$  のとき、 $g'(x) > 0$  より  $g(x)$  は単調増加

問2 すべての正の整数  $n$  について  $0 < b_n < 1 \dots ④$  となることを、数学的帰納法を用いて証明する。

(i)  $n=1$  のとき  $b_1=a_1-\log 2=1-\log 2=\log \frac{e}{2}$

$2 < e < 3$  より  $1 < \frac{e}{2}$  かつ  $\frac{e}{2} < e$  であるから  $\log 1 < \log \frac{e}{2} < \log e$  すなわち、 $0 < b_1 < 1$

よって、④は  $n=1$  のときに成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき、すべての正の整数  $k$  について  $0 < b_k < 1 \dots ⑤$  となると仮定する。

$n=k+1$  のとき、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} - \log 2 = 2e^{-a_k} - 1 + a_k - \log 2 = e^{\log 2} \cdot e^{-a_k} - 1 + a_k - \log 2 \\ &= e^{-(a_k - \log 2)} - 1 + a_k - \log 2 = e^{-b_k} - 1 + b_k = f(b_k) \end{aligned}$$

ここで、問1より、 $0 < f(b_k) < \frac{2}{3}b_k$  であるから  $0 < b_{k+1} < \frac{2}{3}b_k \dots ⑥$

⑤、⑥より  $0 < b_{k+1} < \frac{2}{3} < 1$  が成り立つ。

よって、④は  $n=k+1$  のときも成り立つ。

(i)、(ii)よりすべての正の整数  $n$  について  $0 < b_n < 1$  は成り立つ。 

**別解** (i) までは解答と同様

(ii)  $n=k$  のとき, すべての正の整数  $k$  について  $0 < b_k < 1$  すなわち,  $0 < a_k - \log 2 < 1$  が成り立つと仮定する。

$$n=k+1 \text{ のとき, } b_{k+1} = a_{k+1} - \log 2 = 2e^{-a_n} - 1 + a_n - \log 2$$

いま, 仮定より  $\log 2 < a_k < 1 + \log 2 = \log 2e$  だから  $-\log 2e < -a_k < -\log 2$

$$e > 1 \text{ より, } e^{-\log 2e} < e^{-a_k} < e^{-\log 2} \text{ であるから } \frac{1}{2e} < e^{-a_k} < \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } \frac{1}{e} < 2e^{-a_k} < 1 \dots \textcircled{7}$$

$$\text{また, 仮定より } 0 < a_k - \log 2 < 1 \text{ だから } -1 < a_k - \log 2 - 1 < 0 \dots \textcircled{8}$$

よって, ⑦, ⑧の辺々を加えると  $\frac{1}{e} - 1 < b_{k+1} < 1$  すなわち  $0 < \frac{e-1}{e} < b_{k+1} < 1$  だから

④は  $n=k+1$  のときも成り立つ。

(i), (ii) よりすべての正の整数  $n$  について  $0 < b_n < 1$  は成り立つ。 

問3 ⑥より, 十分大きい  $n$  について,

$$0 < b_n < \frac{2}{3} b_{n-1} < \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot b_{n-2} < \dots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - \log 2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - \log 2) = 0 \text{ より, はさみうちの原理から } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \log 2) = 0 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log 2 \quad \text{図}$$

 マクローリンの定理の剰余項による問1の別解

マクローリンの定理

$$C^n \text{ 級関数 } f(x) \text{ について, } f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$$

を満たす  $c=c(x)$  が,  $0$  と  $x$  の間に存在する。なお,  $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n$  を剰余項という。

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ ,  $(e^{-x})'' = e^{-x}$  であるから, 関数  $e^{-x} (x > 0)$  にマクローリンの定理を適用して

$$e^{-x} = e^0 + \frac{-e^0}{1!} x + \frac{e^{-c}}{2!} x^2, \quad 0 < c < x \text{ を満たす } c=c(x) \text{ が存在する。}$$

$$\text{すなわち } e^{-x} = 1 - x + \frac{e^{-c}}{2} x^2 \text{ より, } f(x) = e^{-x} - 1 + x = \frac{e^{-c}}{2} x^2$$

$$0 < c < x \text{ により } 0 < e^{-x} < e^{-c} < e^0 \text{ だから } 0 < \frac{e^{-x}}{2} x^2 < \frac{e^{-c}}{2} x^2 < \frac{x^2}{2}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} x = \frac{1}{6} x(3x-4) < 0 \text{ だから, } \frac{x^2}{2} < \frac{2}{3} x$$

$$\text{よって } 0 < \frac{e^{-c}}{2} x^2 < \frac{2}{3} x \text{ により, } 0 < f(x) < \frac{2}{3} x$$

3  $xy$ 平面上で、極方程式  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$  により与えられる曲線  $C$  を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問1 曲線  $C$  の概形を図示せよ。

問2  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とし、曲線  $C$  上の、極座標が  $(r, \theta)$  である点  $P$  を考える。点  $P$  における曲線  $C$  の接線の傾きは

$$-\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

であることを示せ。

問3 問2の点  $P$  から  $y$  軸におろした垂線と  $y$  軸との交点を  $H$ 、原点を  $O$  とする。 $\angle OPH$  の二等分線と、点  $P$  における曲線  $C$  の接線は直交することを示せ。

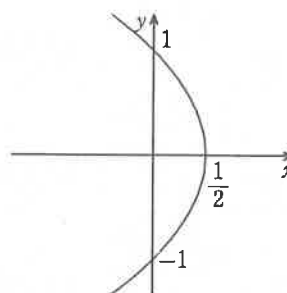
**解答** 問1  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$  より、 $r(1 + \cos \theta) = 1$   $r + r \cos \theta = 1$   $r = 1 - r \cos \theta$

$$\text{両辺を2乗して } r^2 = (1 - r \cos \theta)^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r \cos \theta = x \text{ であるから,}$$

$$x^2 + y^2 = (1 - x)^2 \quad y^2 = 1 - 2x \quad x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$

よって、曲線  $C$  の概形は右図の放物線になる。 



問2  $y^2 = 1 - 2x$  の両辺を  $x$  で微分すると、

$$2yy' = -2 \text{ より, } y \neq 0 \text{ なので } y' = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{r \sin \theta} = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

よって、点  $P$  における曲線  $C$  の接線の傾きは  $-\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$  である。 

**別解**  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$  より、 $\frac{dr}{d\theta} = \frac{-(1 + \cos \theta)'}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d(r \sin \theta)}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \sin \theta + r \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta + r \cos \theta (1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d(r \cos \theta)}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \cos \theta + r \cdot (-\sin \theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta - r \sin \theta (1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = -\frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

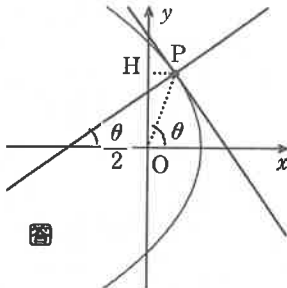
以上より、 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{1 + \cos \theta}}{-\frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$

よって、 $P$  における曲線  $C$  の接線の傾きは  $-\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$  である。 

問3  $\angle OPH$  の二等分線と  $x$  軸正の向きとのなす角は  $\frac{\theta}{2}$  なので、直線の傾きは  $\tan \frac{\theta}{2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より、 $0 < \tan \frac{\theta}{2}$  であるから、

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} \cdot \left( -\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \right) &= \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} \cdot \left( -\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}}{\sin \theta} = -1 \end{aligned}$$

よって、 $\angle OPH$  の二等分線と、点  $P$  における曲線  $C$  の接線は直交する。 

**別解**  $\left( \tan \frac{\theta}{2} \cdot \left( -\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \right) = -1 \right)$  の計算部分

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ とすると } \tan \frac{\theta}{2} \cdot \left( -\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \tan \alpha \cdot \left( -\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \left( -\frac{2\cos^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} \right) = -1$$

**別解** 極座標  $(r, \theta)$  の直交座標を  $(x, y)$  とする。問2より、点  $P(x, y)$  における曲線  $C$  の接線の傾きは  $-\frac{1}{y}$  であるから、点  $P$  を通り、点  $P$  における曲線  $C$  の接線と直交する直線の方程式は、

$Y - y = y(X - x)$  より、 $Y = yX - y(x-1)$  となる。

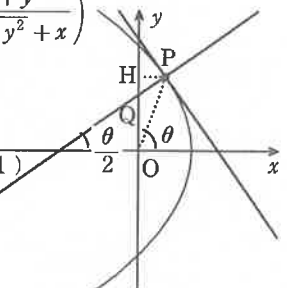
いま、 $\angle OPH$  の二等分線と  $y$  軸との交点を  $Q$  とすると、 $OQ : HQ = PO : PH = \sqrt{x^2 + y^2} : x$

$H(0, y)$  だから  $OQ = y \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$  すなわち、 $Q\left(0, y \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} y \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} &= \frac{y\sqrt{x^2 + (1-2x)}}{\sqrt{x^2 + (1-2x)} + x} = \frac{y|x-1|}{|x-1| + x} \\ &= \frac{y(-(x-1))}{-(x-1) + x} \quad (\text{問1のグラフより } x < 1) \\ &= -y(x-1) \\ &= -y(x-1) \end{aligned}$$

また、直線  $PQ$  の傾きは、 $\frac{y - (-y(x-1))}{x} = y$  である。

よって、点  $P$  を通り、点  $P$  における曲線  $C$  の接線と直交する直線  $Y = yX - y(x-1)$  が  $\angle OPH$  の二等分線である。

以上より、 $\angle OPH$  の二等分線と、点  $P$  における曲線  $C$  の接線は直交する。 

**参考**

**離心率  $e$**

点  $P$  の極方程式が  $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$  とする、

点  $A$  の極座標  $(a, 0)$ 、 $A$  を通り始線  $OX$  に垂直な直線を  $\ell$ 、

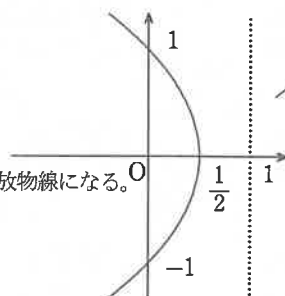
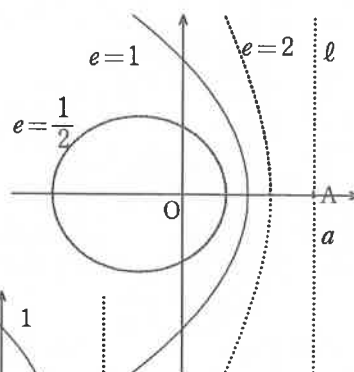
点  $P$  から直線  $\ell$  におろした垂線を  $PH$  とするとき、

$OP : PH = e : 1$  であり、

- (i)  $0 < e < 1$  のとき、楕円
- (ii)  $e = 1$  のとき、放物線
- (iii)  $e > 1$  のとき、双曲線

となり、この  $e$  を離心率という。

**③** は  $e = 1$ 、 $a = 1$  の場合なので、曲線  $C$  の概形は右の放物線になる。



**参考** 放物線の焦点

図1のように、左側から $x$ 軸と並行な方向に向かってくる光は、放物線で反射して焦点に集まる。

(このことはパラボラアンテナ等に利用される)

図2のように、放物線上の点 $P$ における接線を $\ell$ として、 $\angle\alpha$ と $\angle\alpha'$ を考える。

図3の点 $P$ における法線 $\ell'$ を引くとき、 $\angle\alpha = \angle\alpha'$ で光が反射することを考えると、

$\angle\beta = 90^\circ - \angle\alpha = 90^\circ - \angle\alpha' = \angle\beta'$ となる。

今回の問題は、図3のように、 $\angle OPH$ の二等分線は法線 $\ell'$ と一致することを出題している。

図1

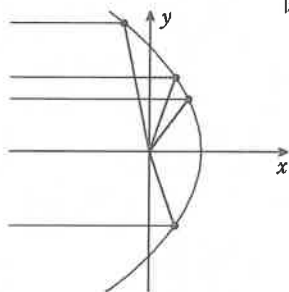


図2

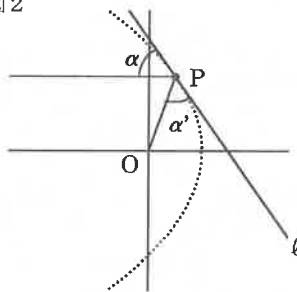
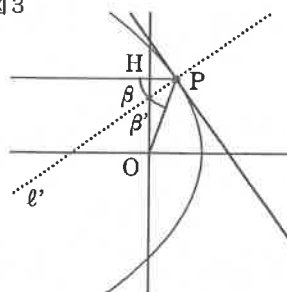


図3



- 4 袋Aには赤玉が1個と白玉が2個、袋Bには赤玉が3個と白玉が2個入っている。袋Bから玉を2個取り出して袋Aに入れ、よく混ぜてから、袋Aから玉を1個取り出して、色を見てから袋Aに戻す。さらに、よく混ぜてから、もう一度袋Aから玉を1個取り出す。このとき、次の問いに答えよ。(50点)

- 問1 袋Bに白玉がちょうど1個残っている確率を求めよ。  
 問2 袋Aから最初に取り出す玉が白玉である確率を求めよ。  
 問3 袋Aから二度とも白玉を取り出す確率を求めよ。

**解答** 問1 袋Bに白玉がちょうど1個残っているのは、袋Bから白玉1個と赤玉1個を取り出す場合である。

$$\text{よって、求める確率は } \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{答}$$

問2 袋Aから最初に取り出す玉が白玉であるのは、

- (i) 袋Bから白玉2個を取り出し、袋Aから白玉を取り出す場合  
 (ii) 袋Bから白玉1個、赤玉1個を取り出し、袋Aから白玉を取り出す場合  
 (iii) 袋Bから赤玉2個を取り出し、袋Aから白玉を取り出す場合

のいずれかであり、これらは互いに排反であるから、求める確率は、

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{4}{5} + \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \frac{3}{5} + \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{4+18+6}{50} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25} \quad \text{答}$$

問3 袋Aから最初に取り出す玉が白玉であるのは、

- (i) 袋Bから白玉2個を取り出し、袋Aから白玉を2回取り出す場合  
 (ii) 袋Bから白玉1個、赤玉1個を取り出し、袋Aから白玉を2回取り出す場合  
 (iii) 袋Bから赤玉2個を取り出し、袋Aから白玉を2回取り出す場合

のいずれかであり、これらは互いに排反であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{1}{10} \times \frac{16}{25} + \frac{6}{10} \times \frac{9}{25} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{25} \\ &= \frac{16+54+12}{250} = \frac{82}{250} = \frac{41}{125} \quad \text{答} \end{aligned}$$

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 不等式  $(x^2 + y^2 - 2)(y - x^2) > 0$  の表す領域を図示せよ。

問2 15334 と 30381 の最大公約数を求めよ。

問3 方程式  $2^x - (\sqrt{2})^{x+1} - 4 = 0$  を解け。

**解答** 問1 求める領域は、不等式  $(x^2 + y^2 - 2)(y - x^2) > 0$  より、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 > 0 \\ y - x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 < 0 \\ y - x^2 < 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 2 \\ y > x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ y < x^2 \end{cases}$$

の表す領域である。

放物線  $y = x^2 \dots ①$  と円  $x^2 + y^2 = 2 \dots ②$  の交点を求める。

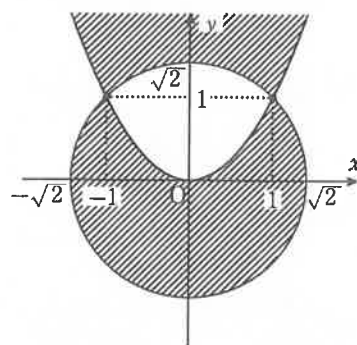
①を②に代入すると、 $x^2 + x^4 = 2$  より  $(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$

$x$  は実数なので、 $x = 1, -1$

よって、交点は  $(1, 1)$  と  $(-1, 1)$

したがって、表す領域は右図の斜線部分である。

ただし、境界線は含まない。 



問2 ユークリッドの互除法より、

$$30381 = 15334 \times 1 + 15047$$

$$15334 = 15047 \times 1 + 287$$

$$15047 = 287 \times 52 + 123$$

$$287 = 123 \times 2 + 41$$

$$123 = 41 \times 3$$

したがって、15334 と 30381 の最大公約数は **41** 

問3  $2^x - (\sqrt{2})^{x+1} - 4 = 0$  より、 $(\sqrt{2})^{2x} - \sqrt{2}(\sqrt{2})^x - 4 = 0$

$$(\sqrt{2})^x = t \text{ とおくと、} t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると、} (t + \sqrt{2})(t - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$t > 0 \text{ より、} t = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって、} (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \text{ より } x = 3 \quad \text{  }$$

2 関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  について、次の問いに答えよ。(50点)

問1  $y = f(x)$  の極値を調べ、そのグラフをかけ。

問2 曲線  $y = f(x)$  について、傾きが9で  $y$  切片が正である接線の方程式を求めよ。

問3 問2で求めた接線と曲線  $y = f(x)$  によって囲まれる部分の面積を求めよ。

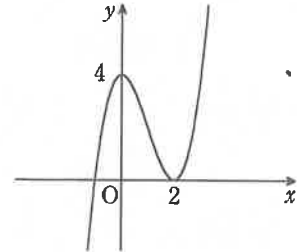
【解答】 問1  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0$  のとき  $x = 0, 2$  であるから、増減表は以下のようになる。

|         |     |   |     |   |     |
|---------|-----|---|-----|---|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0 | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 4 | ↘   | 0 | ↗   |

よって、 $x = 0$  のとき極大値4、 $x = 2$  のとき極小値0をとる。

したがって、グラフは右図のようになる。 図



問2  $f'(x) = 3x^2 - 6x$  より、傾きが9のとき、 $3x^2 - 6x = 9$

これを解くと、 $3(x-3)(x+1) = 0$  より  $x = 3, -1$

(i)  $x = 3$  のとき、 $f(3) = 4$  より、

接線の方程式は、 $y - 4 = 9(x - 3)$  より  $y = 9x - 23$

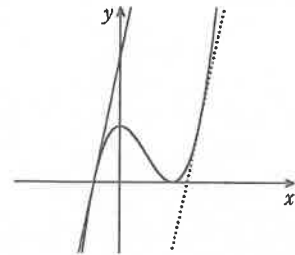
これは、 $y$  切片が負であるので不適。

(ii)  $x = -1$  のとき、 $f(-1) = 0$  より、

接線の方程式は、 $y - 0 = 9(x + 1)$  より  $y = 9x + 9$

これは、 $y$  切片が正であるので適する。

以上より、求める接線の方程式は、 $y = 9x + 9$  図



問3 問2より、 $y = 9x + 9$  と  $y = f(x)$  の交点の  $x$  座標を求めると

$x^3 - 3x^2 + 4 = 9x + 9$  整理すると、 $(x+1)^2(x-5) = 0$   $x = -1, 5$

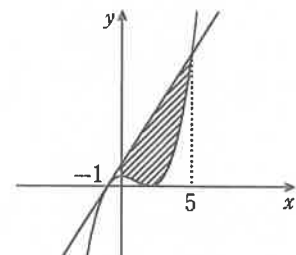
求める面積  $S$  は

$$S = \int_{-1}^5 \{9x + 9 - (x^3 - 3x^2 + 4)\} dx = \int_{-1}^5 (-x^3 + 3x^2 + 9x + 5) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 5x \right]_{-1}^5$$

$$= -\frac{1}{4}\{5^4 - (-1)^4\} + \{5^3 - (-1)^3\} + \frac{9}{2}\{5^2 - (-1)^2\} + 5\{5 - (-1)\}$$

$$= 108 \quad \text{図}$$



【参考】

放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式  $S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$

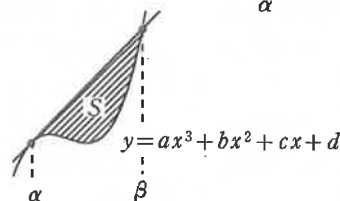
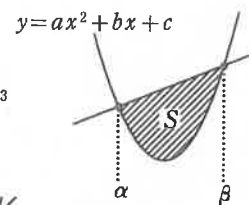
や、3次関数のグラフとその接線で囲まれた部分の面積を求める公式

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

などあるが、後者を利用すると、

$$S = \frac{1}{12}\{5 - (-1)\}^4 = 108$$

である。



- 1 関数  $y = x^3 e^{-x^2}$  の増減, 極値および凹凸を調べ, そのグラフをかけ。ただし,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x^2} = 0$  であることは証明なしに用いてよい。(50点)

**解答**  $y = x^3 e^{-x^2}$  より,  $y' = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 \cdot (-2x) e^{-x^2} = (3x^2 - 2x^4) e^{-x^2}$

$$y'' = (6x - 8x^3) e^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \cdot (-2x) e^{-x^2} = (6x - 14x^3 + 4x^5) e^{-x^2}$$

$$= 2x(3 - 7x^2 + 2x^4) e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 1)(x^2 - 3) e^{-x^2}$$

$y' = 0$  のとき  $x = 0, \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $y'' = 0$  のとき,  $x = 0, \pm \sqrt{3}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  であるから,

この関数の凹凸を含めた増減表は以下のようになる。

|       |                    |                          |                   |                                            |            |                         |            |   |
|-------|--------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------------------------|------------|-------------------------|------------|---|
| $x$   | ...                | $-\sqrt{3}$              | ...               | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$                      | ...        | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$   | ...        | 0 |
| $y'$  | -                  | -                        | -                 | 0                                          | +          | +                       | +          | 0 |
| $y''$ | -                  | 0                        | +                 | +                                          | +          | 0                       | -          | 0 |
| $y$   | $\curvearrowright$ | $-\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$ | $\curvearrowleft$ | $-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{2\sqrt{2}e}$ | $\nearrow$ |   |

|            |                        |            |                                           |                    |                         |                   |
|------------|------------------------|------------|-------------------------------------------|--------------------|-------------------------|-------------------|
| ...        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$   | ...        | $\sqrt{\frac{3}{2}}$                      | ...                | $\sqrt{3}$              | ...               |
| +          | +                      | +          | 0                                         | -                  | -                       | -                 |
| +          | 0                      | -          | -                                         | -                  | 0                       | +                 |
| $\nearrow$ | $\frac{1}{2\sqrt{2}e}$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ | $\curvearrowright$ | $\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$ | $\curvearrowleft$ |

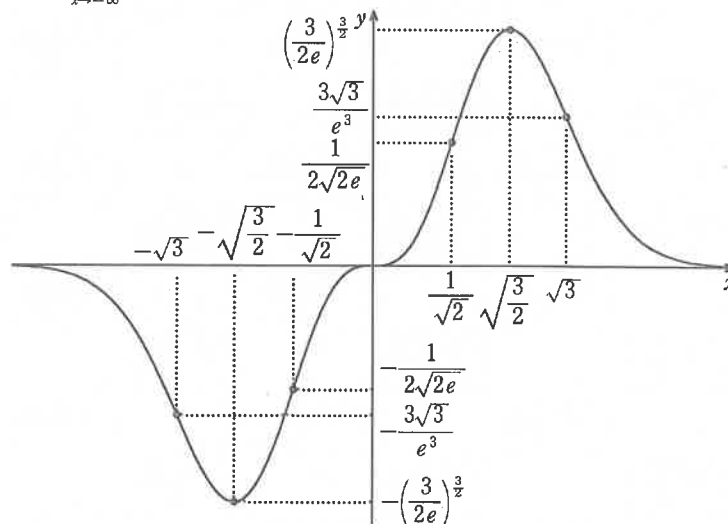
以上より, この関数は  $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$  のときに増加,  $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{2}} < x$  のときに減少し,

$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$  のとき極小値  $-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ ,  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  のとき極大値  $\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$  をとる。

$x \leq -\sqrt{3}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{3}$  のときに上に凸,

$-\sqrt{3} < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{3} < x$  のときに下に凸である。

また,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{-x^2} = 0$  より, グラフは次のようになる。



2 定積分  $\int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x| dx$  を求めよ。(50点)

**解答**  $f(x) = 3\sin x + \cos x$  とおく。

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ となる } \alpha \text{ をとると, } f(x) = \sqrt{10} \sin(x + \alpha)$$

$0 < x < \pi$  のとき  $0 < x + \alpha < \frac{3}{2}\pi$  であるから,

$f(x) = 0$  すなわち  $\sin(x + \alpha) = 0$  のとき,  $x + \alpha = \pi$  より  $x = \pi - \alpha$

よって,  $0 \leq x < \pi - \alpha$  のとき  $|3\sin x + \cos x| = 3\sin x + \cos x$

$\pi - \alpha \leq x \leq \pi$  のとき  $|3\sin x + \cos x| = -(3\sin x + \cos x)$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x| dx &= \int_0^{\pi-\alpha} \{f(x)\} dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^{\pi-\alpha} \{\sqrt{10} \sin(x + \alpha)\} dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \{-\sqrt{10} \sin(x + \alpha)\} dx \\ &= \sqrt{10} \left[ -\cos(x + \alpha) \right]_0^{\pi-\alpha} - \sqrt{10} \left[ -\cos(x + \alpha) \right]_{\pi-\alpha}^{\pi} \\ &= -\sqrt{10} \{\cos \pi - \cos \alpha\} + \sqrt{10} \{\cos(\pi + \alpha) - \cos \pi\} \\ &= -\sqrt{10} \left( -1 - \frac{3}{\sqrt{10}} \right) + \sqrt{10} \left\{ (-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - (-1) \right\} = 2\sqrt{10} \quad \text{図} \end{aligned}$$

**別解** (定積分の計算部分)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x| dx &= \int_0^{\pi-\alpha} (3\sin x + \cos x) dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \{-(3\sin x + \cos x)\} dx \\ &= 3 \left[ -\cos x \right]_0^{\pi-\alpha} + \left[ \sin x \right]_0^{\pi-\alpha} - 3 \left[ -\cos x \right]_{\pi-\alpha}^{\pi} - \left[ \sin x \right]_{\pi-\alpha}^{\pi} \\ &= -3 \{\cos(\pi - \alpha) - \cos 0\} + \{\sin(\pi - \alpha) - \sin 0\} \\ &\quad + 3 \{\cos \pi - \cos(\pi - \alpha)\} - \{\sin \pi - \sin(\pi - \alpha)\} \\ &= -3 \left\{ (-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - 1 \right\} + \left\{ 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - 0 \right\} \\ &\quad + 3 \left\{ (-1) - (-1) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right\} - \left\{ 0 - 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right\} \\ &= 2\sqrt{10} \quad \text{図} \end{aligned}$$

**別解**  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  となる  $\alpha$  をとると

$$3\sin x + \cos x = \sqrt{10} \sin(x + \alpha)$$

よって,  $S = \int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x| dx$  とおくと  $S = \sqrt{10} \int_0^{\pi} |\sin(x + \alpha)| dx$

曲線  $y = |\sin(x + \alpha)|$  を  $x$  軸方向に  $\alpha$  だけ平行移動すると

曲線  $y = |\sin x|$  に一致するから

$$S = \sqrt{10} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} |\sin x| dx = \sqrt{10} \left( \int_{\alpha}^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} |\sin x| dx \right)$$

$\int_{\pi}^{\pi+\alpha} |\sin x| dx$  について, 曲線  $y = |\sin x|$  を  $x$  軸方向に  $-\pi$  だけ

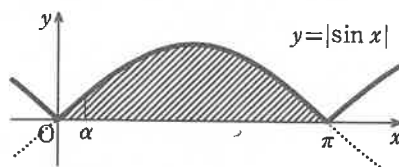
平行移動すると曲線  $y = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$  に一致するから  $\int_{\pi}^{\pi+\alpha} |\sin x| dx = \int_0^{\alpha} |\sin x| dx$

$$\text{よって, } S = \sqrt{10} \left( \int_{\alpha}^{\pi} |\sin x| dx + \int_0^{\alpha} |\sin x| dx \right) = \sqrt{10} \int_0^{\pi} |\sin x| dx$$

$0 \leq x \leq \pi$  のとき  $\sin x \geq 0$  だから  $|\sin x| = \sin x$

$$\text{よって, } S = \sqrt{10} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \sqrt{10} [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\sqrt{10}(-1-1) = 2\sqrt{10} \quad \text{図}$$



- 3  $\alpha, \beta$  は複素数で,  $\alpha$  の実部, 虚部はどちらも 0 でない有理数であるとする。複素数平面上で 3 点  $O(0)$ ,  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  が正三角形の頂点となっているとき,  $\beta$  の実部, 虚部はどちらも無理数であることを示せ。ただし,  $\sqrt{3}$  が無理数であることは証明なしに用いてよい。(50点)

**解答**  $\alpha = a + bi$  ( $a, b$  は 0 でない有理数),  $\beta = c + di$  ( $c, d$  は実数) とする。

点  $B$  は点  $A$  を原点を中心に  $\pm \frac{\pi}{3}$  回転した点であるから,

$$c + di = \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} (a + bi) = \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (a + bi) = \frac{a \mp \sqrt{3}b}{2} + \frac{\pm \sqrt{3}a + b}{2} i \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{よって, } c = \frac{a \mp \sqrt{3}b}{2}, \quad d = \frac{\pm \sqrt{3}a + b}{2} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{ここで, } \beta \text{ の実部すなわち } c \text{ が有理数であると仮定すると, } c = \frac{a \mp \sqrt{3}b}{2} \text{ より } \sqrt{3} = \mp \frac{2c-a}{b} \dots \textcircled{1}$$

$$\beta \text{ の虚部すなわち } d \text{ が有理数であると仮定すると, } d = \frac{\pm \sqrt{3}a + b}{2} \text{ より } \sqrt{3} = \pm \frac{2d-b}{a} \dots \textcircled{2}$$

①, ② はともに左辺は無理数, 右辺は有理数となり矛盾する。

したがって,  $\beta$  の実部, 虚部はどちらも無理数である。 図

- 4 原点  $O$  から出発して座標平面内を移動する点  $A$  を考える。点  $A$  は, 1 回ごとに, 確率  $p$  で  $x$  軸の正の向きに 1 だけ移動し, 確率  $1-p$  で  $y$  軸の正の向きに 1 だけ移動する。ここで,  $0 < p < 1$  である。

点  $A$  が 14 回移動するとき,

・  $E$  を「点  $A$  が座標平面内の点  $P(5, 4)$  を通る」という事象

・  $F$  を「点  $A$  が座標平面内の点  $Q(7, 7)$  に到達する」という事象

とする。このとき, 次の問いに答えよ。(50点)

問1 事象  $E$  が起こる確率  $P(E)$  を求めよ。

問2 事象  $E$  が起こったときの事象  $F$  の条件付き確率  $P_E(F)$  を求めよ。

問3 事象  $F$  が起こったときの事象  $E$  の条件付き確率  $P_F(E)$  を求めよ。

**解答** 問1 点  $P$  を通るのは, 9 回移動したときに, 5 回は  $x$  軸方向, 4 回は  $y$  軸方向に移動するときであるから,

$$P(E) = {}_9C_5 p^5 (1-p)^4 = 126 p^5 (1-p)^4 \quad \text{図}$$

問2 点  $P$  を通って, 点  $Q$  に到達するのは, 点  $P$  を通ったあとの 5 回の移動について,

2 回は  $x$  軸方向, 3 回は  $y$  軸方向に移動するときであるから,

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{{}_5C_2 p^2 (1-p)^3}{{}_9C_5 p^5 (1-p)^4} = 10 p^2 (1-p)^3 \quad \text{図}$$

問3 点  $P$  を通って, 点  $Q$  に到達するのは, 点  $P$  を通ったあとの 5 回の移動について,

2 回は  $x$  軸方向, 3 回は  $y$  軸方向に移動するときであるから,

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{{}_5C_2 p^2 (1-p)^3}{{}_{14}C_7 p^7 (1-p)^7} = \frac{105}{286} \quad \text{図}$$

## 第 75 回九州算数・数学教育研究（佐世保）大会発表論文

### 発表論文

大嶺 和大 先生（小祿高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 25

研究主題 『有用性の感得を目指した高等学校数学の教材開発と実践』

宮良 信克 先生（八重山高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 26

研究主題 『オンライン授業の準備のための手立て』

副 題 ～HPや様々なアプリを通して～

福原 明奈 先生（宜野湾高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 27

研究主題 『日常の学力の可視化と形成的評価による学力の定着』

副 題 ～AnswerBoxCreatorを活用した「評価」と「指導」の一体化～

沖縄県沖縄県立小禄高等学校 大嶺 和大

## 1. 研究のねらい

生徒に数学が「できる」ようになる工夫をすることよりも、生徒が数学を「すき」になる工夫を行う事が教員の重要な役割でないかと考えた。実際 TIMSS2015 や中央教育審議会答申(平成28年)などでも、数学の認知面だけでなく情意面の改善が必要であり、求められていることが分かる。そこで本研究では、数学を「すき」になってもらうために数学のよさの一つである「有用性」に着目し、以下を研究の目的とした。

- ・数学の有用性を感得できる教材を開発する
- ・開発した教材を授業で実践し、学習者の情意面の変化を測定し、教材及び授業の効果を検証する

開発した3つの教材は「2次関数」の分野でパラボラアンテナの断面図に関するもの。「図形と計量」の分野で球面上の距離に関するもの。「データの分析」の分野で新商品の販売計画に関するものの3つである。

## 2. 研究の方法

態度を測定する用具として Sandman(1973)が開発した MAI を使用した。MAI は6つの尺度から構成され、各尺度はそれぞれ8項目からなり、合計48項目の質問に「1. まったくそう思わない 2. あまりそう思わない 3. ややそう思う 4. とてもそう思う」のいずれかに○をつける様式である。数量化の際に点数を反転する必要があるネガティブな質問もある。この MAI を検証授業を実施するクラス(実験群)と検証授業を実施しないクラス(統制群)に、4月(入学して最初の授業)と10月(開発した3つの教材の検証授業を連続で3回行った後)に行った。その結果にt検定を行い、効果を検証し考察する(\*\*は1%水準で有意、\*は5%水準で有意)。

## 3. 研究の結果

MAI の結果を記載する。左の列に MAI の6つの尺度が書かれているが、下記の意味である。いくつか質問例も記載しておく。

- ・動機⇒数学への動機付け
- ・好意性⇒数学への好意性
- ・社会⇒社会における数学の価値  
例「数学は国の発展のためにたいへん重要な学問です」
- ・自己概念⇒数学の自己概念  
例「数学はわたしにとってやさしい教科です」
- ・不安⇒数学学習への不安  
例「わたしは数学を学習しているとき頭が混乱します」
- ・教師知見⇒数学教師への知見

| 実験群  | 4月   | 10月  | t 値    |
|------|------|------|--------|
| 動機   | 2.53 | 2.53 | 0.05   |
| 好意性  | 2.44 | 2.60 | 2.25*  |
| 社会   | 3.22 | 3.37 | 2.58*  |
| 自己概念 | 2.24 | 2.26 | 0.33   |
| 不安   | 2.40 | 2.41 | 0.13   |
| 教師知見 | 3.11 | 3.58 | 7.58** |

| 統制群  | 4月   | 10月  | t 値    |
|------|------|------|--------|
| 動機   | 2.49 | 2.19 | 5.39** |
| 好意性  | 2.58 | 2.34 | 3.42** |
| 社会   | 3.24 | 3.04 | 3.19** |
| 自己概念 | 2.21 | 2.15 | 0.98   |
| 不安   | 2.46 | 2.59 | 1.95   |
| 教師知見 | 3.28 | 3.25 | 0.58   |

## 4. 成果

特に「数学への好意性」と「社会における数学の価値」の2項目が実験群と統制群の差が大きかった。これらの結果は、本研究で開発した3つの教材は、有用性を感得できる教材であることを示唆していると考えられる。

## 5. 課題

## (1)有用性の感得を目指した授業の実施時期の研究

今回は有用性の感得を目指した授業を数学Ⅰの教科書終了後に3回連続で行ったが、これを単元の始め、中頃、終わりのどこでやれば効果的なのか、今後も研究を続ける必要がある。

## (2)今回の教材の改善と他の単元での教材開発

昨年度新たに「確率」の分野で新型コロナウイルスとPCR検査に関するものを開発し実施した。今後もいろいろな分野で教材開発し、実施を続けていくことが必要である。

## (3)自身の指導力の向上

生徒の言語活動を促す発問を意識して行う必要がある。

## (4)認知面の上昇とどう結びつくか

有用性を感得することが、情意面の向上だけでなく認知面の向上にもつながることを示していく必要がある。

## 【参考文献】

大嶺和大(2020). 有用性の感得を目指した高等学校数学の教材開発と実践. 琉球大学大学院教育学研究科修士論文.

## ～HPや様々なアプリを通して～

沖縄県立八重山高等学校 発表者氏名：宮良 信克

## 1. テーマ設定の理由

今年度は「COVID-19(新型コロナウイルス)感染予防のための休校措置」により混乱と不安、見通しが立たない状態で慌ただしい中、学校生活が始まった。今後、COVID-19感染拡大の第2波や第3波に備えて、HPの活用とiPadの様々なアプリの活用を通して、「オンライン授業」の手立てを研究していきたいと考え、課題研究のテーマとして設定した。

## 2. 研究仮説

オンライン授業の実践やそのための教材やアプリを活用した授業を普段から実践することにより、教師のスキルアップ、生徒の授業の理解度向上、情報端末を生徒が学習に活用する習慣が身につく。

## 3. 研究方法

- (1) 生徒の実態把握のためのアンケート実施
- (2) 活動実践は以下であり①～④の活用である。
  - ①「Google サイト」②「iPad」「AppleTV」
  - ③「手書きアプリ」④「zoom」「Teams」
- (3) 実践後のアンケート実施による分析

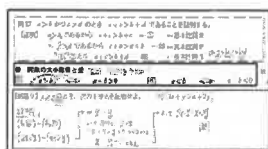
## 4. 研究の実際

(1) アンケートにより、生徒の小学生・中学生時代の「授業形態」が黒板とチョークの授業が多く、プロジェクターや電子黒板などのICT機器活用の授業が少ない事に気づく。

ICT機器を活用した授業を多く取り入れ、ICT機器活用した授業形式に慣れることから進めていくことにした。適切な段階を踏んで進めていけば、オンライン授業も可能であると考えた。

## (2) 活動実践

- ①「Google サイト」による教師個人の数学HP(ホームページ)を活用し、課題や問題プリントの解説やテストなどを掲載。その結果、生徒の自宅学習時間が増加した。
- ②「AppleTV」を用いて、iPadを無線(AirPlay)で使用することで、机間指導しながら操作が可能になり、生徒への個人指導のアプローチが増加した。
- ③手書きアプリ「MetaMoj>Note」「GoodNote」の活用



手書きの良さである自由度が特徴で、作成資料の整理や手書きプリントを作成するアプリ。数学のプリン

ト作成や問題の解説動画で、生徒の学習補助を行った。今後の展望としてはBYODの普及で生徒に1人1台のiPadを持ち、無線LANへの生徒接続が可能になれば「MetaMoj:ClassRoom」等も活用したいと考える。

## ④「zoom」「Teams」によるオンライン(遠隔)授業の取り組み

(ア)「zoom オンラインお試し授業」を夏休みに実施した。『出席確認作業』と『数学1問の授業』を行った。(イ)「Teams オンライン授業」の実施。COVID-19感染予防対策による出停措置(以降コロナ出停と称する)で休む生徒の学習保障のために「Teams」によるオンライン授業を実践した。

## 6. まとめと今後の課題

今回の研究は、コロナ休校で学校が始まらない状況で、我々教員に何ができるのか?今後このようなパンデミックの第2波や第3波が来た際も踏まえて効果的な授業やHR経営は可能なのか?という疑問や課題が出発点であり、本校の施設の環境の中でできる事を模索した。「Google サイト」は今後転勤した先でも半永久的に活用できる手ごたえを感じ、今後も改良して活かしていきたい。「AppleTV」や手書きアプリ「MetaMoj>Note」などで環境を整えたが、生徒のハード面で、本校の無線LANを生徒に使用可能なBYODの環境が整えばより効果的な学習方法が研究できると痛感した。今回のCOVID-19による被害や政府のGIGAスクール構想等の背景から、今後の教員の授業力やICT機器活用の力が求められていくと考える。「zoom」「Teams」によるオンライン授業では『出席確認作業』で大変時間がかかった。他にも生徒側の接続トラブルや音声でのトラブルがあったので、初めはそういった不具合やトラブルも想定した進行や計画が必要であると感じた。今後は動画で講義を受け、予習中心で学校の授業では、演習や応用問題や深化学習などの目的とした『反転学習』の授業を行い、その研究や生徒が自宅で情報端末活用ありきの授業展開も考えて継続研究を行う。

## 7. 参考文献・参考webサイト

- ・文献①：文部科学省 高等学校学習指導要領(平成30年告示)
- ・文献②：「やってみよう!小学校はじめてのオンライン授業」樋口万太郎・堀田龍也 編著[学陽書房]

## ～AnswerBoxCreatorを活用した「評価」と「指導」の一体化～

沖縄県立宜野湾高等学校 発表者氏名：福原明奈

## 1 テーマ設定の理由

日々の授業での確認テストや学期毎に定期テストを行っているが、集計や分析などで生徒へのフィードバックを行うことができていない。また、生徒がよく理解できている単元、つまづいている単元など、授業を行っていて感覚的に把握しているところがある。生徒自身も定期テスト前の勉強を行う際、自分の理解度を把握できていなくて、テスト範囲のすべての問題を最初から解き直していることが多い。そのため、テスト範囲の勉強を終えずにテストに臨んだり、すでに理解できているところに勉強時間を使ったり時間の使い方もうまくできていないように感じる。AnswerBoxCreatorを用いたテストを作成し、日常的なテストを分析することで形成的評価を行うことができる。そして生徒のつまづきを発見し、分析データから感覚的に把握していた生徒の理解度をビジュアル化して把握することができるので、そこから指導方法や授業計画のブラッシュアップを行い、授業時間内での学力の定着を図りたい。そして、生徒自身も自分の苦手なところや、つまづいているところに気づき、テスト勉強を行う際に時間を有効活用できるのではないかと考え、本テーマを設定した。

## 2 研究仮説

## ① 形成的評価テストと数値で見える理解度

AnswerBoxCreatorを用いた確認テストを行い、集計結果から個人のテスト分析し、個票を通して生徒にフィードバックをすることで、自分の弱点を理解し、改善に役立てることができるのではないかと。

## ② 「評価」と「指導」の一体化

簡単な小テストでもよいので、簡単に運用でき、すぐに結果がみえるようになれば、生徒の日々の形成的評価ができるようになり、また教師も次の時間にもう一度説明したり、似たような問題を解かせたりと指導方法や授業計画をブラッシュアップできるのではないかと。

## 3 研究の実際

## (1) AnswerBoxCreatorを用いた確認テストの作成・実施

問題は、授業で解いた問題と同じレベルで、20分程度で解ける問題を用意した。今までと同じようにテストを作成し、PDFで保存するだけなので作成時間は今までと変わらずにできた。また、教科特有のソフトで作成したテストもPDFに変換すればすぐにテストとして使えるので、とても便利である。

## (2) 採点、集計・分析、個票作成

AnswerBoxCreatorのスキャン解答取込ツールを用いてパソコンの画面上で採点を行う。採点は問1、問2とまとめて全員の解答を見ながら採点するので、効率よく採点することができた。全問題の採点が終了した時点で、生徒それぞれの点数、全体の得点率、個人個人のつまづきの分析ができているので、作業時間は大幅に短縮できた。

## (3) テストの返却、つまづきの確認、復習

テストと一緒に個票も返却する。個票には個人と平均の得点率や、得点分布率が書かれている。平均得点率が高いが個人得点率が低い問題は、返却時に個別に声かけを行った。平均得点率が低い問題に関しては、その時間でもう一度解き直しと、説明を行った。得点分布では、クラス内で今自分がどれくらいのところ分布しているのかが確認できたので、「70%の得点率でもそれ以上に15人もいるから頑張らないといけない」など、勉強の取り組みへの意欲に繋げることができた。

## 4 まとめと今後の課題

## 1. 形成的評価テストと数値で見える理解度

「解けるところと解けないところが半明して、どこを中心に勉強したらいいかわかった」「自分がどんな問題が苦手かわかる」など自分がつまづいている部分の把握に役立ちそこからテスト勉強へ繋げることができたという意見が多く見られた。このことから、生徒自身が自分の理解度を確認し、自己調整を行えたのではないかと考える。振り返りのアンケートからも確認テストの分析の個票はテスト勉強に役に立ったと答えた生徒は95%となった。

## 2. 「評価」と「指導」の一体化

全ての問題の得点率がわかるので、生徒がつまづいているところが感覚的ではなく、ビジュアル化して把握することができたので、テスト返却後は得点率の低い問題だけを抜き出して、もう一度説明するなど、時間を有効活用することができた。その結果、期末テストでの得点率を上げることができ、「評価」と「指導」の一体化ができたと考える。

## 3. 成果と課題

採点から集計、分析までの時間短縮とテスト直後の授業で数値化された理解度からテストのフィードバックを行うことができた。今後は、確認テストを定期的に行い、分析個票の使い方をもう少し丁寧に教え、生徒の学習時間の有効活用に繋げていけるように取り組んでいきたい。

# 九数教大会開催地一覧

| 年度   | 回  | 開催地          | 年度  | 回  | 開催地               |
|------|----|--------------|-----|----|-------------------|
| 昭和22 | 1  | 熊本市          | 60  | 39 | 宮崎市               |
| 23   | 2  | 別府市          | 61  | 40 | 武雄市               |
| 24   | 3  | 宮崎市          | 62  | 41 | 福岡市(日数教全国大会)      |
| 25   | 4  | 佐賀市          | 63  | 42 | 佐世保市              |
| 26   | 5  | 福岡市(日数教全国大会) | 平成元 | 43 | 鹿児島市              |
| 27   | 6  | 長崎市          | 2   | 44 | 熊本市               |
| 28   | 7  | 鹿児島市         | 3   | 45 | 浦添市・西原町           |
| 29   | 8  | 別府市          | 4   | 46 | 大分市               |
| 30   | 9  | 熊本市          | 5   | 47 | 宮崎市               |
| 31   | 10 | 宮崎市          | 6   | 48 | 唐津市               |
| 32   | 11 | 佐賀市          | 7   | 49 | 北九州市              |
| 33   | 12 | 福岡市          | 8   | 50 | 長崎市(日数教全国大会)      |
| 34   | 13 | 佐世保市         | 9   | 51 | 鹿児島市              |
| 35   | 14 | 鹿児島市         | 10  | 52 | 熊本市               |
| 36   | 15 | 熊本市          | 11  | 53 | 浦添市・那覇市           |
| 37   | 16 | 別府市          | 12  | 54 | 大分市               |
| 38   | 17 | 宮崎市          | 13  | 55 | 宮崎市               |
| 39   | 18 | 武雄市          | 14  | 56 | 佐賀市               |
| 40   | 19 | 北九州市         | 15  | 57 | 福岡市               |
| 41   | 20 | 長崎市          | 16  | 58 | 鹿児島市(日数教全国大会)     |
| 42   | 21 | 鹿児島市         | 17  | 59 | 佐世保市              |
| 43   | 22 | 大分市          | 18  | 60 | 熊本市               |
| 44   | 23 | 熊本市(日数教全国大会) | 19  | 61 | 宜野湾市・那覇市          |
| 45   | 24 | 宮崎市          | 20  | 62 | 大分市               |
| 46   | 25 | 唐津市          | 21  | 63 | 宮崎市               |
| 47   | 26 | 福岡市(日数教全国大会) | 22  | 64 | 佐賀市               |
| 48   | 27 | 佐世保市         | 23  | 65 | 長崎市               |
| 49   | 28 | 鹿児島市         | 24  | 66 | 北九州市(日数教全国大会)     |
| 50   | 29 | 熊本市          | 25  | 67 | 鹿児島市              |
| 51   | 30 | 那覇市          | 26  | 68 | 熊本市               |
| 52   | 31 | 大分市          | 27  | 69 | 浦添市・那覇市・西原町       |
| 53   | 32 | 宮崎市(日数教全国大会) | 28  | 70 | 大分市               |
| 54   | 33 | 佐賀市          | 29  | 71 | 宮崎市               |
| 55   | 34 | 北九州市         | 30  | 72 | 佐賀県武雄市            |
| 56   | 35 | 長崎市          | 令和元 | 73 | 那覇市・宜野湾市(日数教全国大会) |
| 57   | 36 | 鹿児島市         | 2   | 74 | 福岡市(中止)           |
| 58   | 37 | 熊本市          | 3   | 75 | 佐世保市(中止)          |
| 59   | 38 | 大分市          |     |    |                   |