

高校数学教育

沖縄県高等学校数学教育会誌

第58号

2022年（令和4年）7月26日（火）

沖縄県高等学校数学教育会 発行

目 次

沖縄県高等学校数学教育会会長あいさつ	会長 西原 誠	1
沖縄県高等学校数学教育会第 60 回総会・高校数学教育を考える会実施要項		2
沖縄県高等学校数学教育会会則		3
令和 3 年度	会 務 報 告	4
	決 算 報 告	5
	会 計 監 査 報 告	6
令和 4 年度	役 員	7
	行 事 計 画	8
	予 算 案	9
第 46 回「高校数学教育を考える会」大学入試問題研究		10
第 76 回九州算数・数学教育研究(佐世保)大会発表論文		25
九州数学教育会総会開催地一覧表		28

令和時代の幕開けとともに、コロナ禍での学校教育は困難な状況におかれ、令和２年度３年度と一気に様々な変革が進みました。感染状況に応じて臨機応変に対応し、生徒の安心安全な学びの場を提供することに奮闘し、また学校毎に創意工夫しながら特色ある教育活動が展開されたこの２年間であります。各学校とも全教職員が一丸となって今できることをできる方法で実施し、学びの保証に努めてきました。各種研修や本研究会を含む教科の研究会の活動も含め、多くの教育活動に制限を強いられ、当初の計画通りに実施できないこともありましたが、新たな方法による研修や研究会等を開催してきました。ICT 機器の活用によりリモートでの開催や意見交換等、従来の方法を踏襲するだけでなく教職員の試行錯誤により多様な方法が生み出されたことは大きな功績であり、今後の更なる可能性を示唆していると考えます。

令和３年１月の中央教育審議会答申で令和の日本型学校教育の構築を目指すということが示されました。私たちは急激に変化する時代の中で子ども達に育むべき資質能力をしっかり捉え、より豊かな学びの場づくりや個別最適な学び、協働的な学びの実現について研究や研修を重ねていく必要があります。そのためには教職員一人ひとりが専門性や特性を発揮し、積極的かつ柔軟に学校全体で取り組んでいかなければなりません。多様な指導方法、多様な人材をいかに活用し、子ども達の可能性を引き出すか、校内外において活発に議論し、実践を重ねていくことが大変重要だと考えます。

また、新学習指導要領においては、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成する」ことが算数・数学科の目標として掲げられております。資質・能力の育成は、改訂の基本方針の大きな柱と言え、算数・数学科においては「数学的に考える資質・能力」という文言で示されています。「数学的に考える資質・能力」の育成に当たっては、「数学的な見方・考え方」が重要な役割を果たすことになります。

ところで、本県の生徒の実態をみると、「沖縄県学力到達度調査結果」（県教育庁義務教育課）からは、「数学的に説明するような設問で無回答率が高い」つまり「読解力」「論理的思考力」が課題として挙げられています。これらの力は、数学的に考える資質・能力の一つとして養いたい力であり、知識及び技能を活用して問題を解決する際などにも必要となる力でもあります。高校においても「数学的に考える資質・能力の育成」を最重要課題として捉え、自校の生徒の実態に応じて、「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱を踏まえながら、取り組んでいくことが大切と考えます。

今後も引き続き、コロナ禍における様々な制限はあると思いますが、本研究会では、今年度も会員の先生方による研究を推進していけるよう、様々な対応をしてみたいと思いますので、どうぞよろしくお願い申し上げます。

結びに、本日は校務ご多忙の中、ご参加頂いた諸先生方、企画運営にご尽力下さいました役員、事務局の先生方、心より感謝申し上げます。今後とも、本研究会のさらなる活性化に向け、ご理解とご協力をお願い申し上げます。

沖縄県高等学校数学教育会 第60回総会および第46回高校数学教育を考える会

- 1 日 程 令和4年6月28日(火)
- | | |
|-------------|-------------|
| 受 付 | 14:30～15:00 |
| 高校部会総会 | 15:00～15:45 |
| 高校数学教育を考える会 | 16:00～16:50 |

- 2 会 場 沖縄県立西原高等学校 大会議室

3 部会総会

- (1)開会のことば 副会長 西原 誠(南風原)
- (2)会長あいさつ 会 長 金城正樹(首里)
- (3)議長選出
- (4)議 事
- ①令和3年度会務報告
 - ②令和3年度決算報告及び監査報告
 - ③令和4年度役員(案)について
 - ④令和4年度行事計画(案)について
 - ⑤令和4年度予算(案)について
 - ⑥その他
- (5)閉会のことば 副会長 前里哲寿(那覇)

4 高校数学教育を考える会

- (1)開会のことば 副会長
- (2)会長あいさつ 会 長

令和4年度琉球大学入試問題について

- ①採点者の感想と高校側への要望
- ②高校から大学側への要望、質疑応答
- ③その他

・琉球大学から参加予定の先生方

【前田高士・木本一史・松下尚弘・眞野智行】

- (3)閉会のことば 副会長

5 大会当日の役員

総務 会 長(案)	西 原 誠(南風原)	
副会長(案)	仲 地 範 禮(西 原)	山 城 芳 則(真和志)
	前 里 哲 寿(那 覇)	
事務局	金 城 徹 也(小 禄)	

沖縄県高等学校数学教育会会則

- 第1条 本会は沖縄県高等学校数学教育会と称す。
- 第2条 本会の事務局は原則として那覇市近郊の高等学校におく。
- 第3条 本会は沖縄県高等学校数学教育会の興隆と会員の相互親睦を図ることを目的とする。
- 第4条 本会は前条の目的を達成するために次の事業を行う。
1、数学教育に関する研究と調査
2、講習会、講演会および研修会などの開催
3、会誌の発行
4、九州数学教育会、日本数学教育学会との連携
5、その他
- 第5条 本会は沖縄県の高等学校数学教師ならびに本会の目的に賛同する者をもって組織する。
- 第6条 本会の目的を達成するために次の機関を置く。
1、総会 2、代議員会 3、理事会 4、各種委員会
- 第7条 総会は会長が召集し、年1回以上開き、次の事項を付議する。
1、代議員会の決定事項および会計監査の承認
2、本会の解散、合併またはそれに準ずる事項
3、その他重要な事項
2 総会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第8条 代議員会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議決定する。
1、事業計画および予算 2、事業報告および決算
3、会則および内規の改正 4、その他理事会の起案する事項
2 代議員会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第9条 理事会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議する。
1、代議員会に提案する事項
2、代議員会で決定した事項の執行
2 理事会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第10条 本会に次の役員をおく。
役員の任期は1年とし、再選を妨げない。
会長 1名 副会長 3名
理事 若干名（うち1名は常任理事）
監事 3名
- 第11条 役員は代議員会において選出する。
1、会長は本会を代表し、会務を総理する。
2、副会長は会長を補佐し、会長に事故あるときは、その職務を代行する
3、理事は理事会を構成し、会務を執行する。
4、常任理事は事務局を構成する。
5、監事は本会の会計を監査する。
- 第12条 代議員は各高等学校において会員中より1名選出し、また必要に応じて会長が委嘱する。代議員は代議員会を構成する。
- 第13条 本会の会計年度は、4月1日に始まり、翌年3月31日に終わる。
- 第14条 本会の経費は、会費、補助金、およびその他の収入を持ってこれに充てる。
- 第15条 本会の会員は、会費を納入するものとする。
- 第16条 この会則の施行についての細則は、代議員会において決定する。

付 則
この会則は、1967年4月1日より施行する。
一部改正 平成17年4月1日

令和3年度 沖縄県高等学校数学教育会 会務報告

令和3年

- 4月21日 第1回 沖数教事務局長会（首里高校）
・令和3年度役員、年間行事計画、会誌48号、総会の持ち方、九数教(佐世保)大会等について
- 4月26日 第1回 高数教役員会（小禄高校）
・令和3年度役員、年間行事計画、会誌57号の発行等について
- 5月14日 第1回 沖数教役員会（首里高校）
・令和3年度役員、理事会・代議員会、会誌48号、総会の持ち方、小中高合同研究会について
- 6月 3日 第1回 高数教理事会・代議員会
- 6月18日 第1回 高数教理事会・代議員会の書面表決~~〆~~切及び総会
- 6月21日 第2回 沖数教役員会 / 第1回 沖数教理事会・代議員会
- 7月 上旬 第1回診断テスト（中止）
- 7月26日 九数教事務局長会議・理事会・代表委員会（web 会議）
類比方式による数学ⅠA問題集の編集会議（web 会議）
- 7月27日 高校数学を考える会（紙面発表）
- 7月27日 九州算数・数学教育研究（佐世保）大会オンライン研究発表会
- 8月24日 沖数教臨時役員会（書面会議）
・小中高合同研究会の中止および次年度研究授業について、総会実施について
- 10月15日 第2回 診断テスト委員会（web 会議）
- 12月 4日 九数教事務局長会議・理事会・代表委員会（web 会議）
類比方式による数学ⅠA問題集編集会議（web 会議）
算数・数学教育研修会並びに代表委員会
・九州数学教育会総会並びに算数・数学教育研究会（長崎）大会報告
・九数教（鹿児島）大会に向けて
- 12月 上旬 第2回 診断テスト実施

令和4年

- 2月 4日 第3回 沖数教役員会（首里高校）
・令和4年度沖数教役員、総会日程、小中高合同研究会について 他
- 2月17日 第2回 沖数教理事会（書面会議）
・令和3年度総括、次年度に向けて
- 4月 上旬 第1回 大学入試問題研究委員会（第2回4月下旬予定）

令和3年度 沖縄県高等学校数学教育会 決算

収入	支出	残金
1,238,594	484,204	754,390

収入の部

項	目	科	目	予	算	額	決算額	△未・過収入額	説	明
1	1	学	校	分	担	金	250,000	248,772	△ 1,228	分担金+会費
	2	会	費							
	3	繰	越	金	628,815	628,815	0	前年度からの繰越		
	4	補	助	金	10,000	11,000	1,000	九数教からの補助		
	5	協	賛	金	230,000	200,000	△ 30,000	管理職等からの協賛金		
	6	雑	収	入	150,000	150,000	0	診断テスト委10万 基礎問題集編集委5万		
	7	通	帳	利	息	7	7	0		
計				1,268,822	1,238,594	△ 30,228				

支出の部

項	目	科	目	予	算	額	決	算	額	残	額	説	明							
1		運	営	費	85,000	73,024	11,976													
	1	庶	務	費	10,000	1,024	8,976					ラベルシール購入								
	2	会	議	費	3,000	0	3,000													
	3	手	当		46,000	46,000	0					事務局4万＋監査2千×3								
	4	沖	数	教	会	費	26,000	26,000	0											
2		事	務	費	305,000	113,400	191,600													
	1	研	究	発	表	補	助	費	30,000	30,220	△ 220		佐世保大会書面発表3名							
	2	派	遣	費	180,000	0	180,000													
	3	講	習	・	講	演	会	費	5,000	0	5,000									
	4	委	員	会	活	動	費	25,000	15,000	10,000		入試問題研究15,000 集会とICTは今年度活動なし								
	5	研	究	調	査	補	助	費	5,000	0	5,000									
	6	支	部	活	動	補	助	費	0	0	0									
	7	会	誌	発	行	費	60,000	68,180	△ 8,180			会誌第発行費、郵送費								
3		沖	数	教	分	担	金	270,000	270,550	△ 550		振込手数料550								
4		雑		費	0	22,230	△ 22,230				佐世保大会資料郵送費									
5		全	国	大	会	運	営	委	員	・	発	表	者	参	加	費	0	0	0	
6		九	数	教	沖	縄	大	会	積	立	費	300,000	5,000	295,000						
7		予	備	費	308,815					308,815										
計					1,268,815	484,204	784,611													

監査報告書

沖縄県高等学校数学教育会
会長 金城正樹 殿

令和3年度沖縄県高等学校数学教育会の会計監査の結果を下記の通り報告します。

記

会計監査は、金銭出納簿、証書書類および預金通帳によって実施した。

1. 証書類は、金銭出納簿の通り整理されていた。
2. 残高 754,390円 は、琉球銀行小禄支店普通預金口座 205-278に
預金されていることを確認した。
3. 九数教沖縄大会通帳として、琉球銀行小禄支店普通預金口座 470-560に
金額 1,037,857円 が預金されていることを確認した。
(※前年度繰越金 1,032,848円に利息9円。高数教より積立金5,000円)

以上、監査の結果、異常を認めない。

令和4年 3月28日 (月)
沖縄県高等学校数学教育会
監査委員

知名勝史碧

仲座真紀伸

前泊聖子

令和4年度 沖縄県高等学校数学教育会役員（案）

高数教三役

高数教	名前	勤務先	備考
会長	西原 誠	南風原	校長
副会長	仲地範禮	西原	教頭
	前里哲寿	那覇	
	山城芳則	真和志	
事務局	金城徹也	小禄	教諭
庶務	大嶺和大	小禄	
会計	仲座真紀	小禄	

高数教理事

高数教	名前	勤務先	備考
理事	各種委員会	池間健将	診断テスト委員長
		田口清陽	大学入試問題研究委員長
		糸数 啓	基礎問題集編集委員会委員長
		真栄田義尚	研究集会委員長
		宜壽次政人	特別委員会
	沖数教	花城健彰	沖数教事務局
	校長	金城栄一	
		仲舂盛順	
		宮城 薫	
		平良 淳	
		島仲利泰	
		金城正樹	
		大濱裕司	
		前三盛英明	
		宮城竜幸	
		金城達也	
	教頭	金城伸子	
		金城昭人	
		川添貴司	
		安仁屋宗一郎	
		新井孝雄	
		上江洲寿	
		永吉和紀	
		宮城広行	
		真喜屋篤	
		玉城 学	教育庁
	行政	崎間恒哉	
		新垣公崇	
		玉城重光	
		徳門 潔	
		伊志嶺嘉典	
		金城順也	
		平良哲也	
		喜久本直貴	
		真壁義隆	
		湧川泰成	教育センター
		高原香織	離島児童生徒支援センター
		津波古章吾	

沖数教役員（高数教選出）

沖数教	名前	勤務先	備考
副会長	西原 誠	南風原	校長
理事	金城栄一	辺土名	校長
	平良 淳	球陽	
	大濱裕司	開邦	
代議員	金城伸子	普天間	教頭
	仲地範禮	西原	
	前里哲寿	那覇	
	山城芳則	真和志	
	永吉和紀	向陽	
	伊志嶺嘉典	総務課	教育庁
	新垣公崇	県立学校教育課	
監査	上江洲隆	読谷	教諭

各種委員会

	名前	勤務先	名前	勤務先
診断テスト委員会	◎池間健将	首里東	西村松太郎	首里
	屋富祖直	那覇西	比嘉義一郎	那覇国際
	多和田哲章	普天間	松元輝	那覇国際
	石川睦	嘉手納	嘉手川真子	開邦
	花城健彰	首里（沖数教）	金城徹也	小禄（高数教）
大学入試問題研究委員会	◎田口清陽	沖縄水産	洲鎌啓祐	糸満
	石川吉幸	沖縄高等特支	下里幸司	陽明高支
	屋富祖直	那覇西	平良秀史	那覇
	米吉亮一	向陽	金城裕介	向陽
基礎問題集編集委員会	◎糸数啓	浦添	垣花康夫	開邦
	平田直樹	浦添	安座間淳	西原
	城間直美	浦添		
研究集会委員会	◎真栄田義尚	浦添商	大城貴洋	豊見城
	徳永拓也	名護商工	新城智也	知念
	金城裕介	向陽	禰保研光	宜野湾
特別委員会（観点別評価）	◎宜壽次政人	南風原	豊里力也	コザ
	砂川真木	豊見城	日高輝忠	小禄
	神谷百恵	北中城	古波津哲也	豊見城
	西村松太郎	首里	大城愛	南風原

高数教監査

監事	知名勝史	首里東
	日高輝忠	小禄
	前泊聖子	豊見城南

令和4年度 行事計画（案）

1. 会員の各種委員会での教育研究活動および親睦
2. 沖数教・九数教・日数教との連携および活動

月	行事予定	説明
4	4/15(金) 第1回沖数教事務局長会 4/21(木) 第1回高数教役員会	18:00 ～ 首里高校 16:00 ～ 南風原高校
5	5/11(水) 第1回高数教理事会・代議員会 5/13(金) 第1回沖数教役員会	
6	6/28(火) 高数教 総会 6/28(火) 高校数学教育を考える会 6/ () 第2回沖数教役員会 6/ () 第1回沖数教理事会・代議員会 6/ () 第3回沖数教役員会	15:00 ～ 西原高校 16:00 ～ 西原高校 【会誌第58号発行予定】
7	第1回 数学診断テスト（上旬） 7/27(水)～29(金) 第76回九数教（鹿児島）大会	沖縄県高等学校部会発表者 コザ高校 中里 卓哉 先生 糸満高校 洲鎌 啓祐 先生 向陽高校 千葉 美貴 先生
8	8/2(火)～5(金) 第104回全国（島根）大会	
9	第1回小中高合同準備委員会	
10	10/7(金) 第4回沖数教役員会 10/21(金) 第2回沖数教理事会・代議員会 第2回小中高合同準備委員会	琉球大学 琉球大学
11	第49回沖数教総会並びに研究大会 小中高合同研究会（11月予定）	研究授業：小学校部会が実施予定
12	第2回 数学診断テスト（上旬） 九数教理事・代議員会（上旬）	会長・事務局長派遣
1		
2	2/3(金) 第5回沖数教役員会 2/16(木) 第3回沖数教理事会	首里高校 琉球大学
3	大学入試問題研究委員会（下旬）	

※その他必要に応じて役員会予定

令和4年度 沖縄県高等学校数学教育会 予算（案）

収入の部

項	目	科 目	予 算 額	前年度予算額	増 △減	説 明
1	1	学 校 分 担 金	250,000	250,000	0	分担金＋会費
	2	会 費				
	3	繰 越 金	754,390	628,815	125,575	前年度からの繰越
	4	補 助 金	10,000	10,000	0	九数教からの補助
	5	協 賛 金	230,000	230,000	0	管理職からの協賛金
	6	雑 収 入	150,000	150,000	0	基礎問題集5万 診断テスト10万
計			1,394,390	1,268,815	125,575	

支出の部

項	目	科 目	予 算 額	前年度予算額	増 △減	説 明
1		運 営 費	85,000	85,000	0	
	1	庶 務 費	10,000	10,000	0	通信費，消耗品費
	2	会 議 費	3,000	3,000	0	会議，大会運営費
	3	手 当	46,000	46,000	0	事務局，会計，庶務・・・4万 ＋監査2千×3
	4	沖 数 教 会 費	26,000	26,000	0	沖数教への会費
2		事 務 費	305,000	305,000	0	
	1	研究発表補助費	30,000	30,000	0	1万円×3人
	2	派 遣 費	180,000	180,000	0	7月：九数教大会(会長，助言者) 12月：九数教理事会(会長)
	3	講習・講演会費	5,000	5,000	0	
	4	委員会活動費	25,000	25,000	0	大学入試問題研究委員会 研究集会委員会，特別委員会
	5	研究調査補助費	5,000	5,000	0	
	6	支部活動補助費	0	0	0	
	7	会 誌 発 行 費	60,000	60,000	0	会誌第58号製本代
3		九 数 教 分 担 金	270,000	270,000	0	
4		雑 費	0	0	0	
5		全国大会運営委員・ 発表者参加費	0	0	0	
6		九数教沖縄大会積立費	300,000	300,000	0	
7		予 備 費	434,390	308,815	125,575	
計			1,394,390	1,268,815	125,575	

令和 4 年度

第 4 6 回高校数学教育を考える会 (沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学)

目次

令和 4 年度	琉球大学入試試験問題についての感想と質問 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 0
前期日程	乙	1 1
後期日程		1 2
令和 4 年度	琉球大学入試問題 解答例 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 3 ~ 1 8
前期日程	乙	1 9 ~ 2 1
後期日程		2 2 ~ 2 4

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(前期・乙)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易 度	質 問 事 項
1 問1 問2 問3	数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅱ	三角関数 指数・対数 式と方程式	標準 標準 易	- 問1は、第一象限のみの場合はどのような採点になったか。 - 問1は、直角三角形を書いて求めたものが多かったか。 - 問2は、大小関係、不等号、等号などの記述が出きていたか。 - 全体的にどのような部分点、減点があったか。
2 問1 問2	数Ⅱ 数Ⅱ	微分法 積分法	標準 標準	2つの放物線の頂点のx座標が同じなのは意図があったか。 - 計算をしやすくするための対称性の利用や説明はできていたか。 - 違う部分の面積を求めてしまったものはなかったか。あればどのような採点になったか。 - 計算量が多かったと思うが、しっかり立式や計算ができていたか。 - 問1ができないと問2もできない形でしたが、どうだったでしょうか。
全体 - すべて数学Ⅱからの出題でしたが、 1 、 2 それぞれのできはどうだったでしょうか。 - 受検生の力を見ることが出来る良い構成だったと感じました。点数はうまく分かれたでしょうか。 - どれくらいできていたか、採点の感想などを聞きたいです。				

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(前期・甲)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2 問3	数Ⅲ	微分法・ 積分法	易 標準 やや難	- 問3は、グラフの概形をかく場合、極限を考える必要があったが、どうだったか。 - 直線と曲線の上下関係がしっかり求められていたか。
2 問1 問2 問3	数B 数B 数B	数列 数列 数列	標準 標準 やや難	- 問1で生徒が普段使っている公式を証明させ、問2、問3ではそれを拡張する内容を扱う非常に良い出題だと思いました。難易度としても良かったです。 - 数学的帰納法の記述や、与えられた恒等式を利用した記述はできていたか。 3つとも証明問題であり、受検生の証明する力が見られたのではないか。出来はどうであったか。
3 問1 問2	数B 数Ⅲ	空間ベクトル 微分法	標準 標準	- 基本的な空間図形であるうえに、内分する辺の比もシンプルで良問でした。 - 最小値を求める際は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ と $\frac{\sqrt{21}}{14}$ の大小の比較、説明は必要であったか。答えのみで良かったか。
4 問1 問2 問3	数A 数A 数A	場合の数	標準 標準 やや難	- 問題の条件や意味を理解できていたか。 - 考え方や解き方がどうだったか。説明がしっかりできていたか。採点の感想を聞きたいです。
全体 微積分や証明、空間図形、場合の数など、幅広い範囲からの出題だと感じました。証明や場合の数を解く際の記述力が求められる印象を受けましたが受検生がどのくらいできていたか気になります。				

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(後期)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2	数Ⅱ 数Ⅱ	式と方程式 微分法	標準 標準	・3つの実数解を求めた時点で部分点があったか。 ・問1で2番目に大きいものを特定する際、どのような考え方をしていたか。(単調増加か、不等式で考えるか) ・問2で、不等式の両辺を2乗する際に、両辺共に正であることを言えていたか。 ・式 $x = p + (1-p)x^3$ が $(1-p)x^3 - x + p = 0$ でない意味はありますか？x に α を代入して次数下げのようなことも考えましたがうまくいきませんでした。 ・問題の着想はどんなところからか。
2 問1 問2	数Ⅲ	積分法	標準	・区分求積法をつかえていたか。 ・根拠が不十分で、答えのみだったもの(不等式を用いていないもの)などはどのような採点になったか。
3	数Ⅲ	積分法	標準	・絶対値の外し方、場合分けなどができていたか。 ・「$1 < k$ のとき」を考えていないものは減点になったか。
4 問1 問2	数A 数A	整数 整数	標準 標準	・利用する等式を与えているが、どのような理由で与えることになったか。与えないことも検討したか。 ・問2は考え方・内容ともに問1と変わらない感じがしますが、実際受験生はどうでしたか。
全体 ・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。 ・区分求積法や積分の定数部分の置き換えなど、生徒に知っていてほしい範囲からの出題が多く良問に感じました。				

(注: 易・標準・難は教科書レベルにおいて)

1 $x > 0$ の範囲で、関数 $f(x)$ を $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$ と定め、 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。次の問いに答えよ。

(50点)

問1 $f(x)$ の極値を求めよ。

問2 曲線 C の接線で、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが負であるものを ℓ とする。直線 ℓ の傾きを求めよ。

問3 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 問1 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ とすると、 $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} = \frac{-2(x-1)}{x^3}$ より、増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+		-
$f(x)$	/	↗	極大	↘

したがって、 $f(x)$ は $x=1$ のとき、極大値 1 をとる。 **答**

別解 $f(x) = -x^{-2} + 2x^{-1}$ として、 $f'(x) = 2x^{-3} - 2x^{-2} = 2x^{-3}(1-x)$ と計算しても良い。

問2 曲線 C 上の点 $(t, -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t})$ における接線の方程式は $y - (-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}) = \frac{-2(t-1)}{t^3}(x-t)$...①

接線が点 $(0, 1)$ を通るので、 $1 - (-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}) = \frac{2t(t-1)}{t^3}$

これを整理すると、 $t(t^2 - 4t + 3) = 0$ であり、 $t > 0$ より、これを解くと $t = 1, 3$

$f'(1) = 0$ 、 $f'(3) = -\frac{4}{27}$ であり、直線 ℓ の傾きは負であることから、求める傾きは $-\frac{4}{27}$ **答**

参考 接線の方程式を $y = ax + 1$ として、方程式 $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = ax + 1$ を作り a を求めようとしても

$ax^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ となり、うまくいかない。

問3 直線 ℓ は点 $(0, 1)$ を通るので、切片が 1 であるから、直線 ℓ の方程式は、 $y = -\frac{4}{27}x + 1$...②である。

曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求める。

$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = -\frac{4}{27}x + 1$ を整理すると、 $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$

左辺を因数分解すると、 $(x-3)^2(4x-3) = 0$ より、 $x = 3, \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \leq x \leq 3$ のとき、

$(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}) - (-\frac{4}{27}x + 1) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 54x - 27}{27x^2} = \frac{(x-3)^2(4x-3)}{27x^2} \geq 0$ であるから

$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \geq -\frac{4}{27}x + 1$ となる。

よって求める面積は、

$\int_{\frac{3}{4}}^3 \left\{ \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) - \left(-\frac{4}{27}x + 1 \right) \right\} dx = \left[\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{2}{27}x^2 - x \right]_{\frac{3}{4}}^3 = 4\log 2 - \frac{21}{8}$ **答**

参考 $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$ の左辺を因数分解する際、問2より曲線 C と直線 ℓ は $x = 3$ で接するので、左辺は $(x-3)^2$ を因数に持つことを利用する。

【参考】

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2(x-1)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{-2 \cdot x^3 - (-2x+2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2(2x-3)}{x^4} \text{ より,}$$

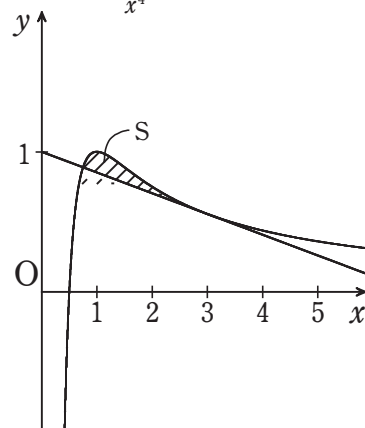
増減とグラフの凹凸は以下になる。

x	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	/	+		-		-
$f''(x)$	/	-		-		+
$f(x)$		↗	極大	↘		↘

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{-1+2x}{x^2} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) = 0$$

より, グラフは右図のようになり, 問3で求める面積の領域は斜線部分になる。



2 d と n を正の整数とする。1 から n までの d 乗の和を $S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1 すべての正の整数 n について, $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。

問2 恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ を利用して, $S_5(n)$ を求めよ。

問3 すべての正の整数 n について, $24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れることを示せ。

【解答】 問1 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \dots \text{①}$ とする。

すべての正の整数 n について, ①が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき, (左辺) $= 1^3 = 1$ (右辺) $= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1$ より, ①は $n=1$ のときに成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき, 正の整数 k について $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} S_3(k+1) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4} \end{aligned}$$

よって, ①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より, すべての正の整数 n について $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ は成り立つ。 

問2 恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ より, $k^5 = \frac{1}{6} \{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 - 2k^3\}$

したがって,

$$\begin{aligned} S_5(n) &= 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 \\ &= \frac{1}{6} \{1^3 \cdot 2^3 - 0^3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^3\} + \frac{1}{6} \{2^3 \cdot 3^3 - 1^3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^3\} + \cdots + \frac{1}{6} \{n^3(n+1)^3 - (n-1)^3n^3 - 2n^3\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ -2(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + n^3(n+1)^3 \right\} = \frac{1}{6} \left\{ -2 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + n^3(n+1)^3 \right\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12} \quad \text{答} \end{aligned}$$

問3 $k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 = 8k^7 + 8k^5$ より, $k^7 = \frac{1}{8}\{k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 - 8k^5\}$ したがって

$$\begin{aligned} S_7(n) &= 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 \\ &= \frac{1}{8}\{1^4 \cdot 2^4 - 0^4 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^5\} + \frac{1}{8}\{2^4 \cdot 3^4 - 1^4 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^5\} + \cdots + \frac{1}{8}\{n^4(n+1)^4 - (n-1)^4n^4 - 8n^5\} \\ &= \frac{1}{8}\{-8(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + n^4(n+1)^4\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{-8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} + n^4(n+1)^4\right\} \end{aligned}$$

ここで, $24S_7(n) = n^2(n+1)^2\{-2(2n^2+2n-10) + 3n^2(n+1)^2\}$ であり, n が正の整数であるから $-2(2n^2+2n-10) + 3n^2(n+1)^2$ は整数となる。

よって, すべての正の整数 n について, $24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れる。 

参考

高校の数学では, 本問のように恒等式を用いて同じ項を打ち消し合って $S_k(n)$ を求めることが多いが,

$S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ を一般化したのが, 日本の関孝和とスイスのヤコブ・ベルヌーイがほぼ同時期に発見したと言われている以下の『関・ベルヌーイの公式』である。

$$\text{関・ベルヌーイの公式} \quad S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k C_i B_i n^{k+1-i} \dots \textcircled{1}$$

ここで, 関・ベルヌーイ数 B_i は $\sum_{i=0}^n C_i B_i = n+1 \dots \textcircled{2}$ で求められる。

これを用いて, $S_7(n)$ を求める。

②について, $n=0$ のとき, ${}_1C_0B_0=1$ より, $B_0=1$

$n=1$ のとき, ${}_2C_0B_0 + {}_2C_1B_1 = 2$ より, $1 \cdot 1 + 2B_1 = 2$ であるから, $B_1 = \frac{1}{2}$

$n=2$ のとき, ${}_3C_0B_0 + {}_3C_1B_1 + {}_3C_2B_2 = 3$ より, $1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3B_2 = 3$ であるから, $B_2 = \frac{1}{6}$

同様に, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_7=0$, $\dots$ がわかる。

①より,

$$\begin{aligned} S_7(n) &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 {}_8C_i B_i n^{8-i} \\ &= \frac{1}{8} ({}_8C_0 B_0 n^8 + {}_8C_1 B_1 n^7 + {}_8C_2 B_2 n^6 + {}_8C_3 B_3 n^5 + {}_8C_4 B_4 n^4 + {}_8C_5 B_5 n^3 + {}_8C_6 B_6 n^2 + {}_8C_7 B_7 n) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 \cdot 1 \cdot n^8 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^7 + 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^6 + 56 \cdot 0 \cdot n^5 + 70 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^4 + 56 \cdot 0 \cdot n^3 + 28 \cdot \frac{1}{42} \cdot n^2 + 8 \cdot 0 \cdot n \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(n^8 + 4n^7 + \frac{14}{3}n^6 - \frac{7}{3}n^4 + \frac{2}{3}n^2 \right) = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} \text{ である。} \end{aligned}$$

他にも, 積分 $S_k(n) = \int \{kS_{n-1}(n) + B_k\}dn$ を用いる方法もある。(ここでも, 関・ベルヌーイ数を用いる。)

$$\begin{aligned} \text{例えば, } S_3(n) &= \int \{3S_2(n) + B_3\}dn = \int \left\{3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + B_3\right\}dn = \int \left\{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + B_3\right\}dn \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + B_3n \end{aligned}$$

ここで, $n=1$ とすると, $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + B_3$ より, $B_3=0$ であり, $S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

が分かり, 同様に $S_4(n)$, $S_5(n)$, $\dots$ を求めることができる。

- 3 一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を D 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を E とする。辺 OC 上に点 P をとり、線分 OP の長さを t とおく。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\cos \angle EDP$ を t を用いて表せ。

問 2 点 P が辺 OC 上を動くとき、 $\cos \angle EDP$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 問 1 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{c}=\vec{a} \cdot \vec{c}=1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

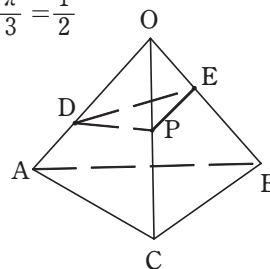
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OP}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b},$$

$$|\overrightarrow{DE}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{DP}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4t}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{4t}{3} \cdot \frac{1}{2}+t^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DP}=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{2t}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}-\frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{2t}{3} \cdot \frac{1}{2}-\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}+t^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}t$$

$$\text{以上より, } \cos \angle EDP=\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DP}|}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}t}{\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}} \quad \text{図}$$



別解 余弦定理より, $\cos \angle EDP=\frac{DE^2+DP^2-EP^2}{2DE \cdot DP}$

$$\text{ここで, } DE^2=OD^2+OE^2-2OA \cdot OE \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$DP^2=OD^2+OP^2-2OD \cdot OP \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+t^2-2 \cdot \frac{2}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{2}=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$EP^2=OE^2+OP^2-2OE \cdot OP \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2+t^2-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{2}=t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}$$

$$\text{以上より, } \cos \angle EDP=\frac{\frac{1}{3}+t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}-\left(t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}$$

$$\text{問 2 } f(t)=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}(0 \leq t \leq 1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{9t^2-6t+4} - \sqrt{3}(2-t)\{2\sqrt{9t^2-6t+4}\}'}{4(9t^2-6t+4)} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}(9t^2-6t+4) - \sqrt{3}(2-t)(18t-6)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}(9t^2-6t+4) - \sqrt{3}(2-t)(18t-6)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} = \frac{2\sqrt{3}(-15t+2)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} \end{aligned}$$

であり, 増減表は右のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{15}$	...	1
$f'(t)$		+		-	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{\sqrt{21}}{14}$

$$\text{また, } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{21}}{14} > 0 \text{ より } \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{21}}{14}$$

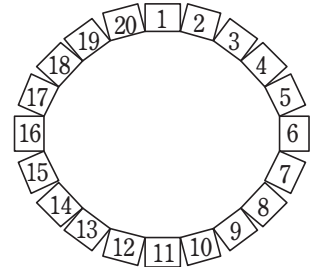
したがって, $\cos \angle EDP$ は $t=\frac{2}{15}$ のとき, 最大値 1, $t=1$ のとき, 最小値 $\frac{\sqrt{21}}{14}$ をとる。図

4 次の問いに答えよ。(50点)

問1 1から9までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 9$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。このような3つの数 (a_1, a_2, a_3) の選び方のうち、 $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問2 1から50までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 50$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。このような3つの数 (a_1, a_2, a_3) の選び方のうち、 $a_2 - a_1 \geq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問3 1から20までの番号が書かれた座席が、図のように円形に並んでいる。この中から、2つ以上の間隔を空けて3つの座席を選ぶ(例えば、1番を選んだときは2番、3番、19番、20番は選べない)。このような3つの座席の選び方は全部で何通りあるか。



解答 問1 $a_2 - a_1 \geq 3$ より $a_2 \geq a_1 + 3$ 、 $a_3 - a_2 \geq 3$ より $a_3 - 3 \geq a_2$ だから

$$a_1 + 3 \leq a_2 \leq a_3 - 3 \text{ すなわち } a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2$$

$$\text{いま, } 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 9 \text{ より, } 3 \leq a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2 \leq 7$$

ここで、3以上7以下の異なる3つの値の組 $(a_1 + 2, a_2, a_3 - 2)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、求める場合の数は ${}_5C_3 = 10$ 通り 答

問2 $a_2 - a_1 \geq 10$ より $a_2 \geq a_1 + 10$ 、 $a_3 - a_2 \geq 10$ より $a_3 - 10 \geq a_2$ だから

$$a_1 + 10 \leq a_2 \leq a_3 - 10 \text{ すなわち } a_1 + 9 < a_2 < a_3 - 9$$

$$\text{いま, } 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 50 \text{ より, } 10 \leq a_1 + 9 < a_2 < a_3 - 9 \leq 41$$

ここで、10以上41以下の異なる3つの値の組 $(a_1 + 9, a_2, a_3 - 9)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、求める場合の数は ${}_{32}C_3 = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4960$ 通り 答

問3 1から20までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 20$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。

$a_1 = 1$ のとき、条件より $1 = a_1 < a_2 < a_3 \leq 18$ かつ $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ である。

$$a_2 - a_1 \geq 3 \text{ かつ } a_3 - a_2 \geq 3 \text{ より } a_1 + 3 \leq a_2 \leq a_3 - 3 \text{ すなわち } a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2$$

$$\text{いま, } a_1 = 1 \text{ より, } 3 = a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2 \leq 16$$

ここで、4以上16以下の異なる値の組 $(3, a_2, a_3 - 2)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、その場合の数は ${}_{13}C_2 = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$ 通り

さらに、 a_1 が2番から20番まで入ることを考えると、 $78 \times 20 = 1560$ 通り。ただし、 a_1 が、最初に考えた場合の a_2 、 a_3 のそれぞれの場所に来るときが重複しているので、 $1560 \div 3 = 520$ 通り 答

別解 問1 $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ より、 $a_2 \geq a_1 + 3$ かつ $a_3 \geq a_2 + 3$

(i) $a_1 = 1$ のとき、 $(a_2, a_3) = (4, 7) (4, 8) (4, 9) (5, 8) (5, 9) (6, 9)$

(ii) $a_1 = 2$ のとき、 $(a_2, a_3) = (5, 8) (5, 9) (6, 9)$

(iii) $a_1 = 3$ のとき、 $(a_2, a_3) = (6, 9)$

以上より、10通り 答

問2 $a_2 - a_1 \geq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geq 10$ より, $a_2 \geq a_1 + 10$ かつ $a_3 \geq a_2 + 10$

(i) $a_1 = 1$ のとき, $(a_2, a_3) = (11, 21) (11, 22) \cdots (11, 50)$

$(12, 22) (12, 23) \cdots (12, 50) \cdots$

$(40, 50)$ の $30 + 29 + \cdots + 1$ 通り

(ii) $a_1 = 2$ のとき, $(a_2, a_3) = (12, 22) (12, 23) \cdots (12, 50)$

$(13, 23) (13, 24) \cdots (13, 50) \cdots$

$(40, 50)$ の $29 + 28 + \cdots + 1$ 通り

以上の考え方を繰り返して, 求める場合の数は,

$$(30 + 29 + \cdots + 1) + (29 + 28 + \cdots + 1) + \cdots + (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{2} k(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{30} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{30} k$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \cdot \left(\frac{61}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \cdot \left(\frac{64}{6} \right) = 4960 \quad \text{以上より, } \mathbf{4960 \text{ 通り}} \quad \text{答}$$

問3 1番に a_1 が入り, a_2 と a_3 の座席の番号を (a_2, a_3) とする。ただし, $a_2 < a_3$ とする。

2つ以上の間隔を空けるので, 4番から18番のうち, a_2 と a_3 の座席を選ぶ方法は ${}_{15}C_2 = 105$ 通り

このうち, 隣り合っているのは, $(a_2, a_3) = (4, 5) (5, 6) \cdots (17, 18)$ の14通り

1つだけ間隔が空いているのは, $(a_2, a_3) = (4, 6) (5, 7) \cdots (16, 18)$ の13通り

したがって, 1番に a_1 が入り, 2つ以上の間隔を空けて座席を選ぶ方法は $105 - 14 - 13 = 78$ 通り。

さらに, a_1 が2番から20番まで入ることを考えると, $78 \times 20 = 1560$ 通り。ただし, a_1 が, 最初に

考えた場合の a_2, a_3 のそれぞれの場所に来るときが重複しているので, $1560 \div 3 = 520$ 通り 答

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\tan \alpha = 5$ のとき、 $\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

問2 n を正の整数とする。 n を二進法で表すと2022桁である。このとき、 n を十進法で表すと何桁になるか。
ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

問3 a, b を実数とする。整式 $f(x)$ と整式 $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = x^4 + ax^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^2 + x + b$ と定める。
 $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるような実数の組 (a, b) をすべて求めよ。

解答 問1 $\tan \alpha = 5$ より、 $\sin \alpha = 5 \cos \alpha$

$$\text{これを } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ に代入して、} \cos^2 \alpha = \frac{1}{26}, \sin^2 \alpha = \frac{25}{26}$$

$\tan \alpha > 0$ より、 α は第1象限または第3象限の角であるから、

$$(\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

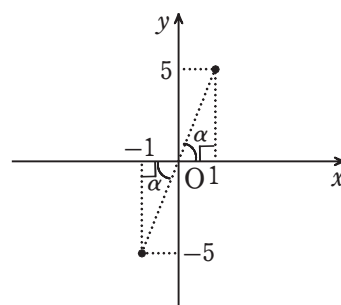
$$\text{いずれの場合も、} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \quad \text{答}$$

別解

$\tan \alpha = 5$ より、右図のように考えると、

$$(\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

$$\text{いずれの場合も、} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$



問2 n を二進法で表すと2022桁なので、 $2^{2021} \leq n < 2^{2022}$

この不等式の常用対数をとると、

$$\log_{10} 2^{2021} \leq \log_{10} n < \log_{10} 2^{2022}$$

$$2021 \log_{10} 2 \leq \log_{10} n < 2022 \log_{10} 2$$

$$2021 \times 0.3010 \leq \log_{10} n < 2022 \times 0.3010$$

$$608.321 \leq \log_{10} n < 608.622$$

$$10^{608.321} \leq n < 10^{608.622}$$

以上より、 $10^{608} \leq n < 10^{609}$ であるから、 n を十進法で表すと609桁になる。 答

問3 $f(x)$ を $g(x)$ で割ると、

商は $x^2 + x + (a - b + 1)$,

余りは $(-a + 2b - 3)x + 3 - b(a - b + 1)$

となる。

$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるとき、

余りが0になることを考えると、

$$\begin{cases} -a + 2b - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 3 - b(a - b + 1) = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + 2b - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 3 - b(a - b + 1) = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①より、} a = 2b - 3 \cdots \text{③}$$

これを、②に代入して、整理すると $b^2 - 2b - 3 = 0$ これを解いて $b = -1, 3$

③より、 $b = -1$ のとき $a = -5$, $b = 3$ のとき $a = 3$ なので、

求める実数の組 (a, b) は、 $(-5, -1), (3, 3)$ 答

$$\begin{array}{r} x^2 - x + (a - b + 1) \\ x^2 + x + b \overline{) x^4 + ax^2 + 3} \\ \underline{-(x^4 + x^3 + bx^2)} \\ -x^3 + (a - b)x^2 - 2x \\ \underline{-(x^3 + x^2 + bx)} \\ (a - b + 1)x^2 + (-2 + b)x + 3 \\ \underline{-(a - b + 1)x^2 + (a - b + 1)x + (a - b + 1)b} \\ (-a + 2b - 3)x + 3 - b(a - b + 1) \end{array}$$

2 座標平面上の2つの放物線 $C_1: y = -x^2 + 2x$, $C_2: y = 2x^2 - 4x + 9$ について、次の問いに答えよ。(50点)

問1 放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は2つ存在する。放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線の方程式を2つとも求めよ。

問2 問1で求めた2つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 問1 $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 9$ とおく。

$$f'(x) = -2x + 2, \quad g'(x) = 4x - 4 \text{ より,}$$

$$\text{放物線 } C_1 \text{ 上の点 } (s, -s^2 + 2s) \text{ における接線の方程式は } y - (-s^2 + 2s) = (-2s + 2)(x - s)$$

$$\text{これを整理すると, } y = (-2s + 2)x + s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{放物線 } C_2 \text{ 上の点 } (t, 2t^2 - 4t + 9) \text{ における接線の方程式は } y - (2t^2 - 4t + 9) = (4t - 4)(x - t)$$

$$\text{これを整理すると, } y = (4t - 4)x - 2t^2 + 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は、①と②の傾きと切片が等しいことを考えると、

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} -2s + 2 = 4t - 4 & \dots \textcircled{3} \\ s^2 = -2t^2 + 9 & \dots \textcircled{4} \end{cases} \text{ を解くことで求められる。}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } s = -2t + 3 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{これを}\textcircled{4}\text{に代入すると, } (-2t + 3)^2 = -2t^2 + 9$$

$$\text{これを整理すると, } 6t(t - 2) = 0 \text{ より } t = 0, 2$$

$$\textcircled{2} \text{ より, 求める直線の方程式は } y = -4x + 9, \quad y = 4x + 1 \quad \text{答}$$

別解 放物線 C_2 上の点 $(t, 2t^2 - 4t + 9)$ における接線の方程式は $y - (2t^2 - 4t + 9) = (4t - 4)(x - t)$

$$\text{これを整理すると, } y = (4t - 4)x - 2t^2 + 9 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{放物線 } C_1 \text{ の方程式に代入して } (4t - 4)x - 2t^2 + 9 = -x^2 + 2x$$

$$\text{これを整理すると, } x^2 + 2(2t - 3)x - 2t^2 + 9 = 0$$

直線⑥と放物線 C_1 は接するので、この2次方程式は重解をもたなくてはならない。

よって、この2次方程式の判別式を D とすると $D = 0$ となる。

$$D/4 = (2t - 3)^2 - (-2t^2 + 9) = 6t^2 - 12t = 6t(t - 2)$$

$$D/4 = 0 \text{ のとき, } t = 0, 2$$

$$\text{よって, 求める方程式は } t = 0, 2 \text{ を}\textcircled{6}\text{に代入して, } y = -4x + 9, \quad y = 4x + 1 \quad \text{答}$$

問2 問1で求めた2つの直線および放物線 C_1 との接点の座標を求める。

問1の過程より

直線 $y = -4x + 9$ と放物線 C_1 の接点の座標は、 $(3, -3)$

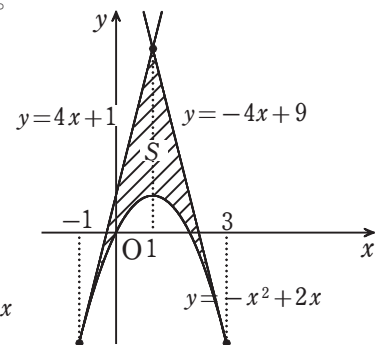
直線 $y = 4x + 1$ と放物線 C_1 の接点の座標は、 $(-1, -3)$

2直線 $y = -4x + 9$, $y = 4x + 1$ の交点の x 座標は

$$2 \text{ 式を連立して } x = 1$$

よって求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(4x + 1) - (-x^2 + 2x)\} dx + \int_1^3 \{(-4x + 9) - (-x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



別解 問 1 で求めた 2 つの直線および放物線 C_1 との接点の x 座標を求める。

⑤より, $t=0$ のとき $s=3$, $t=2$ のとき $s=-1$

また, 放物線 C_1 の方程式は $y=-(x-1)^2+1$ とできるので,

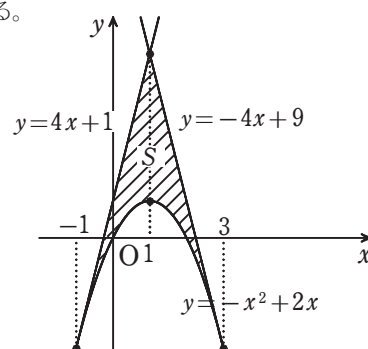
放物線 C_1 の頂点の座標は $(1, 1)$

問 1 で求めた 2 つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分は

図のように, 直線 $x=1$ に関して対象となることから,

求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^1 \{(4x+1) - (-x^2+2x)\} dx = 2 \int_{-1}^1 (2x^2+2x+1) dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^1 = 2 \left\{ \frac{2}{3} \cdot (1+1)^2 + (1-1)^2 + (1+1) \right\} = \frac{16}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



参考 右図において, 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求める公式

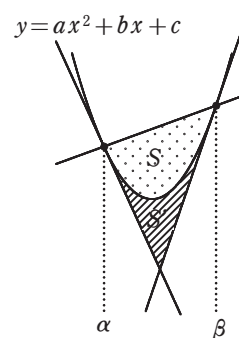
$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

や, 放物線と二本の接線で囲まれた部分の面積 S' を求める公式

$$S' = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

などあるが, 後者を問 2 で利用すると,

$$S' = \frac{|-1|}{12}\{3 - (-1)\}^4 = \frac{16}{3} \quad \text{答}$$



1 p を $0 < p < \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 3次方程式 $x = p + (1-p)x^3$ の実数解のうち、2番目に大きいものを求めよ。

問2 問1で求めた実数解を α とする。不等式 $\alpha < p + p^3$ が成り立つことを示せ。

【解答】 問1 $f(x) = (1-p)x^3 - x + p$ とおき、3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解を考える。

$f(1) = 1 - p - 1 + p = 0$ より、 $f(x) = (x-1)\{(1-p)x^2 + (1-p)x - p\}$ と因数分解できる。

$(1-p)x^2 + (1-p)x - p = 0$ と解くと、

$$x = \frac{-(1-p) \pm \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2(1-p)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4p}{1-p}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$$

ここで、 $\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ 、 $\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ とおく。

$0 < p < \frac{1}{2}$ より、 $1 < 1+3p < \frac{5}{2}$ かつ $1 < \frac{1}{1-p} < 2$ であるから、 $1 < \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < \sqrt{5}$

したがって、 $0 < \alpha_1 < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} < 1$ 、 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < \alpha_2 < -1$

よって、3次方程式 $x = p + (1-p)x^3$ の実数解の大小関係は、 $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ となり

2番目に大きいものは $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ 図

問2 問1より、 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ であるから、

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < p + p^3$ すなわち $\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < 2p + 2p^3 + 1$ を示す。

$0 < p < \frac{1}{2}$ より、 $2p + 2p^3 + 1 > 0$ であるから、 $\frac{1+3p}{1-p} < (2p + 2p^3 + 1)^2$ を示せばよい。

$$g(p) = (2p + 2p^3 + 1)^2 - \frac{1+3p}{1-p} = \frac{(1-p)(2p + 2p^3 + 1)^2 - (1+3p)}{1-p} = \frac{4p^4(-p^3 + p^2 - 2p + 1)}{1-p}$$

とおく。

ここで、 $h(p) = -p^3 + p^2 - 2p + 1$ とおくと、 $h'(p) = -3p^2 + 2p - 2 = -3\left(p - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}$

より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $h'(p) < 0$ であり $h(p)$ は単調減少である。

さらに、 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$ より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $h(p) > 0$

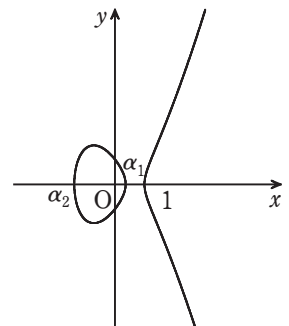
したがって、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $g(p) > 0$ である。

以上より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、不等式 $\alpha < p + p^3$ が成り立つ。 図

【参考】 3次式 $y^2 = x^3 + ax + b(4a^2 + 27b^2 \neq 0)$ で定義された曲線を楕円曲線という。

問1では、 $y^2 = x^3 - \frac{1}{1-p}x + \frac{p}{1-p}$ ($0 < p < \frac{1}{2}$) と x 軸との共有点の

の x 座標を求めており、小さい順に $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ となる



2 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ ($n=1,2,3,\dots$) により定める。次の問に答えよ。(50点)

問1 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ を求めよ。

問2 $a_n \geq 18000$ となるような最小の正の整数 n を求めよ。

【解答】 問1 区分布積法より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$ **【答】**

問2 すべての正の整数 n に対して、 $\int_0^n \sqrt{x} dx < a_n < \int_0^n \sqrt{x+1} dx \dots \textcircled{1}$

$$\int_0^n \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^n = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} \text{であり、} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} = 18000 \text{ のとき、} n = 900$$

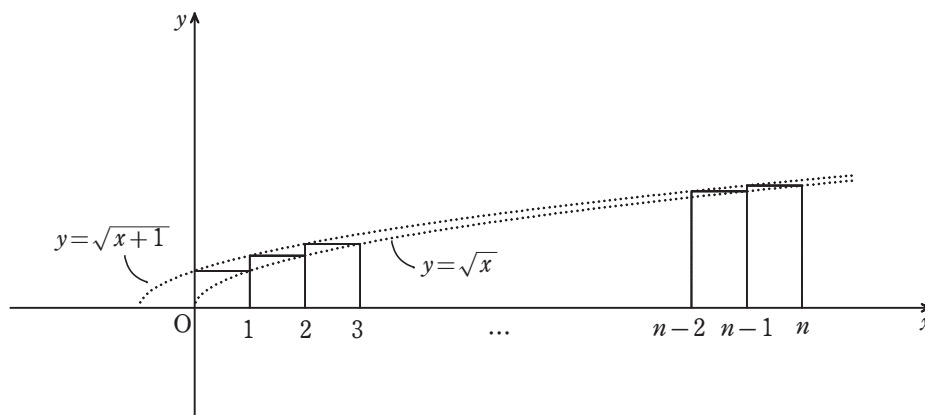
$$\text{したがって、} 18000 = \int_0^{900} \sqrt{x} dx < a_{900} < \int_0^{900} \sqrt{x+1} dx$$

また、 $n = 899$ のとき、

$$\int_0^{899} \sqrt{x} dx < a_{899} < \int_0^{899} \sqrt{x+1} dx = \int_1^{900} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^{900} = 18000 - \frac{2}{3} < 18000$$

より、 $a_{899} < 18000 < a_{900}$ であるから、 $a_n \geq 18000$ となるような最小の正の整数 n は **900** **【答】**

【参考】 不等式 $\textcircled{1}$ は下の図を考えるとわかる。 $\int_0^n \sqrt{x} dx < a_n < \int_0^{n+1} \sqrt{x} dx$ を用いても同じ結果が得られる。



【参考】 a_n は、ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ について $s = -\frac{1}{2}$ としたときの有限級数である。

ゼータ関数については、 $s > 1$ のときに収束することが分かっているが、本問は $s = -\frac{1}{2}$ であり発散する。

問1では、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} = \infty$ であるが、解答より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}$ の発散のスピードが同じくらいだということを表し、ランダウの記号を用いると $a_n = O(n\sqrt{n})$ と表される。

(よく、テーラー展開などで $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$ などと表す。)

また、問1より十分大きい n について $a_n \asymp \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ である。

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} = 18000 \text{ を解くと } n = 900 \text{ であるから、} a_{900} \asymp \frac{2}{3} \cdot 900 \sqrt{900} = 18000$$

ただ、これは a_n のおおよその値であって正確な値ではないため、不等式ではきむというアイデアに行きつく。

- 3 関数 $f(x)$ は $x > 0$ において等式 $f(x) = \log x - \int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt$ を満たすとする。このとき、関数 $f(x)$ を求めよ。(50点)

【解答】 $\int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt$ は定数であるから、 $\int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt = k$ (k は定数) とすると、 $f(x) = \log x - k$ とできる。

$1 < t < e$ のとき、 $\frac{|f(t)|}{t} \geq 0$ より、 $k \geq 0$ である。また、 $\log x - k = 0$ のとき、 $x = e^k$ である。

(i) $1 \leq e^k \leq e$ のとき、すなわち $0 \leq k \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{|\log t - k|}{t} dt = \int_1^{e^k} \frac{-(\log t - k)}{t} dt + \int_{e^k}^e \frac{\log t - k}{t} dt \\ &= \left[-\frac{(\log t)^2}{2} + k \log t \right]_1^{e^k} + \left[\frac{(\log t)^2}{2} - k \log t \right]_{e^k}^e = k^2 - k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって、 $k = k^2 - k + \frac{1}{2}$ であり、これを解くと $k = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ $0 \leq k \leq 1$ より、 $k = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

(ii) $e < e^k$ のとき、すなわち $1 < k$ のとき、

$$k = \int_1^e \frac{|\log t - k|}{t} dt = \int_1^e \frac{-(\log t - k)}{t} dt = \left[-\frac{(\log t)^2}{2} + k \log t \right]_1^e = k - \frac{1}{2}$$

となり、 $k = k - \frac{1}{2}$ これをみたす k は存在しない。

以上より、 $k = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ よって、 $f(x) = \log x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **【答】**

- 4 次の問いに答えよ。(50点)

問1 等式 $2^{199} = (1+1)^{199}$ と、199 が素数であることを用いて、 2^{199} を 199 で割った余りを求めよ。

問2 2^{199} を 39203 で割った余りを求めよ。ただし、 $39203 = 197 \cdot 199$ と素因数分解できることは証明なしに用いてよい。

【解答】 問1 二項定理より、 $2^{199} = (1+1)^{199} = {}_{199}C_0 + {}_{199}C_1 + {}_{199}C_2 + \cdots + {}_{199}C_{199}$

ここで、 ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$ であるが、

$1 \leq r \leq 198$ のとき、 ${}_{199}C_r = \frac{199 \cdot 198 \cdot \cdots \cdot (199 - r + 1)}{r!}$ であることと、199 は素数であることから、

${}_{199}C_r$ は、整数 k_r を用いて ${}_{199}C_r = 199k_r$ と表すことができ、199 で割り切れる。

したがって、 2^{199} を 199 で割った余りは $1 + 1 = 2$ **【答】**

問2 $2^{199} = (1+1)^{199} = {}_{199}C_0 + {}_{199}C_1 + {}_{199}C_2 + \cdots + {}_{199}C_{199}$

$$= 1 + \frac{199}{1} + \frac{199 \cdot 198}{2 \cdot 1} + \frac{199 \cdot 198 \cdot 197}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots + {}_{199}C_{197} + {}_{199}C_{198} + {}_{199}C_{199}$$

ここで、 ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$ 、 ${}_{199}C_1 = {}_{199}C_{198} = 199$ 、 ${}_{199}C_2 = {}_{199}C_{197} = \frac{199 \cdot 198}{2 \cdot 1} = 199 \cdot 99$ であるが、

$3 \leq r \leq 196$ のとき、 ${}_{199}C_r = \frac{199 \cdot 198 \cdot \cdots \cdot (199 - r + 1)}{r!}$ であることと、199 と 197 は素数であること

から、 ${}_{199}C_r$ は、整数 l_r を用いて ${}_{199}C_r = 199 \cdot 197 \cdot l_r$ と表すことができ、 $197 \cdot 199$ で割り切れる。

したがって、 2^{199} を $39203 = 197 \cdot 199$ で割った余りは

$$1 + 199 + 199 \cdot 99 + 199 \cdot 99 + 199 + 1 = 2(1 + 199 + 199 \cdot 99) = 2(1 + 199 \cdot 100) = 2 + 39800 = 39802$$

これを 39203 で割った余りは **599** **【答】**

【参考】 問1 については、素数だと同じことがいえます。来年の西暦 $2023 = 7 \times 17^2$ で素数ではないですが、5年後の西暦 2027 は素数ですので、西暦 2027 年に『 2^{2027} を 2027 で割った余りを求めよ。』という問題もできます。

第 76 回九州算数・数学教育研究（鹿児島）大会発表論文

発表論文

中里 卓哉 先生（コザ高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 5

研究主題 『「主体的に学習に取り組む態度」の評価方法の検討』

副 第 ～Microsoft の Forms を活用した生徒の振り返りを通して～

洲鎌 啓祐 先生（糸満高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 6

研究主題 『微分法の図形的イメージをつかみ、知識・技能を習得する指導の工夫』

副 題 ～数学ソフトウェア「GeoGebra」を用いた数学的活動を通して～

千葉 美貴 先生（那覇国際高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 2 7

研究主題 『根拠に基づいて論理的に説明できる生徒を育成する授業の工夫』

副 題 ～思考過程を可視化するワークシートを用いた対話的活動を通して(第 1 学年)～

「主体的に学習に取り組む態度」の評価方法の検討

～Microsoft の Forms を活用した生徒の振り返りを通して～

沖縄県立コザ高等学校 中里 卓哉 他6名

1 はじめに

本校は1945年設立、3学年27クラスからなる創立77年となる学校である。県高校総体では総合優勝11連覇を達成しており、部活動が活発である。また、2020年度よりBYOD研究指定校となり、生徒個人の情報端末やICTを用いた教授法・授業展開の研究を行っている。

2 主題設定の理由

令和4年度入学生から、高等学校でも観点別評価が本格実施されることになる。評価方法を考えるにあたり、懸念がとくに大きかったのが、「主体的に学習に取り組む態度」についてであった。今までも授業態度や質問への応答、ノートや課題の提出・取り組み状況などを用いて、テストのみでなく、総合的な評価となるように成績をつけてきた。しかし、それは課題量の差やノート提出の有無など、教科担当の主観による差異があり、今回の評価方法では問題になることが懸念された。どのように客観性を持ちながら評価をするか、ということが教科会の中で課題として挙げられ、そのために試行として令和3年度入学生を対象として、評価方法の研究を行うこととした。

3 研究方法

令和3年度入学生を受け持つ7人で研究を実施した。まず、前提として考えたことが、「①負担を大きく増やさずに、②全員で協力して行えること」であった。「知識・理解」の評価と「思考・判断・表現力」の評価は、定期考査をそれぞれの内容で50点ずつに分けて作成することを基本とし、その得点割合で客観性を保った評価が可能であると考えた。指導用教科書にも練習問題に評価観点が記されており、それに沿うように各観点の問題を作成した。

一番の課題となる「主体的に学習に取り組む態度」の評価について、上に挙げた2点の前提を踏まえて行うことが出来るのは何があるだろうかと考えた結果、「生徒の自己評価や学習に対する意欲の伸長を見取ることが出来れば、客観的な評価として使えるのではないか」ということで、「生徒の授業振り返り」を評価に用いることとした。幸いにも本校は校内Wi-Fiや各教室へのアクセスポイント設置など、BYODによる生徒個人端末の使用環境が整っていることもあり、MicrosoftのFormsを活用することとした。また、生徒の手元にも振り返りが残る

方が良いだろうということで、単元ごとの振り返り用紙も用意した。

主に評価項目として考えたのは次の3点である。

- ・本日の意欲、授業態度評価（A～D）
- ・本日の授業理解度評価（A～D）
（C、Dであれば躓いている部分を記述）
- ・習ったことやポイントを踏まえて振り返りを記述

4 結果と課題・考察

一学期は週に1度の振り返りを教科担当のタイミングで行った。このとき課題として挙げたのは、教科担当による進捗のバラツキがあり、各回の理解度の集計が同一内容のものでは無いということであった。それを踏まえ二学期からは学習内容を選択できる項目（2次関数の最大・最小、2次関数の決定、等）を追加し、学習内容による理解度集計を行えるようにした。また、頻度は毎時間とし、各内容の理解度集計母数が一定になるように考えた。以下主な成果と課題を挙げる。

【成果】

- ・理解度調査により、躓いている内容を把握し、次時に補足・追加説明が出来た。
- ・記述で振り返りをさせることで、生徒の伸長を見ることが出来た。

【課題】

- ・文章の巧拙で評価が変わってしまうのは避けるべき。
- ・毎時間の振り返りは回数が多かった。
- ・記述で振り返りを記入する生徒は、延べ平均で56%に留まった。コロナ禍の分散登校によるリモート授業などの影響も大きかった。

5 おわりに（令和4年度に向けて）

今回の取り組み方では「主体的に学習に取り組む態度」を観るには不十分であったが、課題を早期に把握できたと捉えている。今回の取り組みを踏まえ、主な評価方法として教科内で次のように検討した。「①振り返り（月に3回程度）、②朝学習課題への取り組み状況、③課題・ノート提出（①、②はデジタルツール、③はテスト直前の学習時間にチェック）」いずれも同一科目担当で統一して行い、4月にA～Cの評価例を提示する。

BYODによりタブレットを用いてOne Note等で学習する生徒のノート提出方法など課題はまだあるが、検証を重ねながらより良い評価方法を研究していきたい。

1 はじめに

高等学校学習指導要領（平成30年告示）では、数学科の目標を「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を（中略）育成すること」としている。その実現に向け、日々の授業においては事象を観察して数学的原理を見いだしたり、考察の正しさを検証したりするといった数学的活動を起こす工夫をより一層取り入れていく必要がある。

その手立ての1つとして、ICTの活用が進んでいる。中でもGeoGebraなどのグラフ作成ソフトウェアはグラフの変化を動的に見ることができるため、生徒の興味関心を引き、直観的理解を深める効果が期待できる。スマートフォンやタブレットが普及した現在は生徒一人ひとりが自分の手でソフトを手軽に操作できるので、適切に導入すれば生徒の数学的活動を支援し、資質・能力を育成するツールとして有効に機能すると考えられる。

2 研究の目的と方法

本校の2学年で行った実力テストでは、関数分野の基本的な知識・技能の習得度が低く、課題が見られた。そこで本研究では、これらの生徒を対象に数学Ⅱ「微分法」の単元で、教師が作成した3つのGeoGebra教材を用いて事象を観察・考察する数学的活動を取り入れた授業を行う（教材のWebリンクを図1のQRコードに示す）。この実践を通して生徒が微分法の図形的イメージをつかみ、この分野における知識・技能を習得することを目標として、本テーマを設定した。

3 実践の概要

まず微分法導入の場面で「教材1」を使用する。沖縄県新型コロナウイルス新規感染者数のグラフを模式的に表す曲線に沿って点を動かすと、その点における曲線の接線が動的に変化し、その傾きの数値が連動して表示される（本来は微分係数を定義した後でなければ一般的な接線は定義できないため、ここでは既習事項である円や放物線の接線をもとに、直観的イメージで接線を説明する）。感染者の増減に対して接線の傾きの値がどのように変化しているかを観察することで、接線の傾きが関数の値の変化を捉えるのに有効であることを実感させる。

「では、接線の傾きの値はどのように決まるのか」という問いを投げかけ、「教材2」で探究していく。曲線 $y=x^2$ 上の点A(1,1)における接線の傾きの値を考える教材である。画面内では、曲線上に点B(1+h, (1+h)²)があり、直

線ABとその傾きの値が表示されていて、パラメータhをスライダーで操作できるようになっている。hを0に近づけると直線ABは求める接線に近づくが、h=0とすると直線ABが消え、その傾きの値も「？」と表示される。この観察から、接線の傾きの値を定義するには「hの値を0と異なる値をとりながら0に限りなく近づける」という新たな数量操作が必要であることを実感させ、極限値の導入と微分係数の定義に結び付けていく。

さらに微分法の後半内容「関数の増減」の導入では、「教材3・グラフの形当てクイズ」を行う。この教材は教師の端末で操作して画面をスクリーンに投影し、生徒に見せてクイズを出していく。画面内では関数f(x)のグラフが非表示になっており、導関数f'(x)の値だけが表示されている。教師がxの値を変化させるとf'(x)の値が変化するので、生徒はこの値の推移から元の曲線の形を想像する。このクイズを通して導関数の値の符号と関数の増減の関係を理解し、増減表やグラフの概形をかく指導につなげていく。

この他、接線の方程式や関数の増減を求めるといった問題演習の場面では、得られた答えを各自でGeoGebraに入力してグラフの様子を確認し、考察の正しさを検証するようにした。

4 まとめと課題

本実践の前後で行ったテストの結果を比較すると、全体の正答率が向上し、とくに「グラフと関連付けた関数の知識理解」「関数の知識を活用して問題を解決する力」を測る問題で大きな上昇が見られた（表1）。またアンケート調査では全体的に「分かりやすかった」「グラフがイメージしやすくなった」といった意見が多く上がった。しかし、その一方で成績が伸びなかった生徒からは「計算が難しかった」という意見が出ていた。

観点	実践前	実践後
基礎的な計算技能	48%	55%
グラフと関連付けた関数の知識理解	38%	49%
関数の知識を活用して課題を解決する力	25%	39%
総合正答率	42%	51%

今回の実践では、GeoGebraによる数学的活動によって微分法の知識の概念的理解に一定の成果が見られた。これに計算力や数式操作能力といった技能の習熟が加われば、生徒がより「身についた」という実感を持って知識・技能を習得できると思われる。生徒の資質・能力の育成に向け、さらに指導の改善を進めたい。

～思考過程を可視化するワークシートを用いた対話的活動を通して(第1学年)～

沖縄県沖縄県立那覇国際高等学校 千葉 美貴

1. 研究のねらい

今年度から導入された「高等学校学習指導要領」では、「生徒の主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善を行うこと。」が求められている。私自身の授業を振り返ると、生徒たちに根拠に基づいて論理的に説明する力が不足していることが課題としてわかった。この課題を解決するところを本研究のねらいとした。

2. 研究の方法

論理的に説明するためには、自らの思考過程を筋道を立てて説明する必要がある。本研究では思考過程を可視化するための思考ツールとして、ワークシートを活用した。ワークシートでは、確認問題を解き既習事項の確認を行ってから問題を解く過程に入る形式とした。G. ポリア(2011)は問題を解く筋道を「問題を理解すること」、「計画をたてること」、「計画を実行すること」、「ふり返ってみること」の4つの区分に分けて述べている。このことから本研究で使用するワークシートでは、問題を解く過程を4つのStepに分けた。Step 1では問題からわかることを数や図、グラフ等で表すことで整理し、求めるものを確認する。Step 2では、Step 1で整理したことを基に問題を解く計画をしていく。計画を立てる際には、確認問題で確認した既習事項を活用して、求められる値や使うことのできる公式や定理から、答えを求めるために必要なものを根拠に基づいて考えて式を立てていく。この Step 1, 2の流れが問題を解く際の思考過程であり、それをワークシートに書き出すことで可視化され、筋道を立てて考える際の手助けになると考えた。Step 3ではペアになり、Step 2の計画を共有し、解法を、根拠を明らかにしながら筋道に沿って書いていく。Step 4では、4人グループで振り返りを行い、問題の解き方の流れやポイントの確認を行い、振り返った内容を応用問題に活用できないかを考察し、理解を深められるようにワークシートを作成した。Step 3において、思考過程が可視化されたワークシートを用いて問題を解く計画を、ペアに対して根拠に基づいて筋道を立てて説明し合い、問題の解法をまとめる活動を行うことで、本研究で身につけたい力の育成に繋がるのではないかと考えた。また、Step 4において振り返りと応用問題に取り組むことで、より多くの考えが得られ、理解が深まり、よりわかりやすい説明ができるようになるのではないかと考えた。このワークシートを用いた対話的活動を取り入れた授業を4時間行った。

3. 研究の結果

検証前テストと検証後テストの解法の書き方を比較すると、検証前は「〇〇の公式に代入して」という説明のみであったのに対し、検証後のテストでは90%の生徒が公式を使う根拠とともに解法を書くことができていた。平均点も検証前テストと比較すると28点上がっていた。思考過程を可視化するワークシートで問題に取り組み、ペアで説明し合うことで、今までどのような流れで問題に取り組んだらいいかわからない状態であったのが、思考過程に沿って筋道を立てて考えることができるようになった結果であるといえる。検証後のアンケートの「今回の授業を通して、根拠に基づいて論理的に説明する力が伸びたと思いますか?」という質問において、96%の生徒が肯定的な回答をしていた。否定的な回答をしている生徒の意見は「しょうがないと思うが、自分的には進むのが早いと思った。」や「もっと解く必要があると思った。」という記述があり、解くスピードが遅い生徒に対する支援の工夫や、今回の取り組みを継続し、ワークシートをうまく活用できるように支援していくことで改善できると考える。

4. 成果

- (1) 思考過程を可視化するワークシートを用いた対話的活動を通して、根拠に基づいて論理的に説明できる力を育成できた。
- (2) 対話的活動を通して問題を振り返り応用問題に取り組むことで、理解が深まった。

5. 課題

- (1) ペアによっては時間が足りず解法を書くまでにたどり着けないペアもいたので、ペアの組み方や、ペア活動における教師の声かけ等、支援の仕方に工夫が必要である。
- (2) 数学が得意な生徒に関しては、思考過程が可視化されていなくても問題が解けるため、生徒のレベルに応じたワークシートの形式を考察する必要がある。

[参考文献]

- G. ポリア 柿内賢信訳(2011). いかにして問題をとくか. 丸善出版
- 千葉美貴(2021). 根拠に基づいて論理的に説明できる生徒を育成する授業の工夫. 沖縄県立総合教育センター後期長期研修員第69集研究集録.

九数教大会開催地一覧

年度	回	開催地	年度	回	開催地
昭和22	1	熊本市	60	39	宮崎市
23	2	別府市	61	40	武雄市
24	3	宮崎市	62	41	福岡市（日数教全国大会）
25	4	佐賀市	63	42	佐世保市
26	5	福岡市（日数教全国大会）	平成元	43	鹿児島市
27	6	長崎市	2	44	熊本市
28	7	鹿児島市	3	45	浦添市・西原町
29	8	別府市	4	46	大分市
30	9	熊本市	5	47	宮崎市
31	10	宮崎市	6	48	唐津市
32	11	佐賀市	7	49	北九州市
33	12	福岡市	8	50	長崎市（日数教全国大会）
34	13	佐世保市	9	51	鹿児島市
35	14	鹿児島市	10	52	熊本市
36	15	熊本市	11	53	浦添市・那覇市
37	16	別府市	12	54	大分市
38	17	宮崎市	13	55	宮崎市
39	18	武雄市	14	56	佐賀市
40	19	北九州市	15	57	福岡市
41	20	長崎市	16	58	鹿児島市（日数教全国大会）
42	21	鹿児島市	17	59	佐世保市
43	22	大分市	18	60	熊本市
44	23	熊本市（日数教全国大会）	19	61	宜野湾市・那覇市
45	24	宮崎市	20	62	大分市
46	25	唐津市	21	63	宮崎市
47	26	福岡市（日数教全国大会）	22	64	佐賀市
48	27	佐世保市	23	65	長崎市
49	28	鹿児島市	24	66	北九州市（日数教全国大会）
50	29	熊本市	25	67	鹿児島市
51	30	那覇市	26	68	熊本市
52	31	大分市	27	69	浦添市・那覇市・西原町
53	32	宮崎市（日数教全国大会）	28	70	大分市
54	33	佐賀市	29	71	宮崎市
55	34	北九州市	30	72	佐賀県武雄市
56	35	長崎市	令和元	73	那覇市・宜野湾市（日数教全国大会）
57	36	鹿児島市	2	74	福岡市（中止）
58	37	熊本市	3	75	佐世保市（中止）
59	38	大分市	4	76	鹿児島