

高校数学教育

沖縄県高等学校数学教育会誌

第59号

2023年（令和5年）7月24日（月）

沖縄県高等学校数学教育会 発行

目 次

沖縄県高等学校数学教育会会長あいさつ	会長 西原 誠	1
沖縄県高等学校数学教育会第61回総会・高校数学教育を考える会実施要項		2
沖縄県高等学校数学教育会会則		3
令和4年度	会 務 報 告	4
	決 算 報 告	5
	会 計 監 査 報 告	6
令和5年度	役 員	7
	行 事 計 画	8
	予 算 案	9
第47回「高校数学教育を考える会」大学入試問題研究		10
第77回九州算数・数学教育研究(熊本)大会発表論文		29
九州数学教育会総会開催地一覧表		32

令和4年度より沖縄県高等学校数学教育会の会長を務めております南風原高等学校の西原誠と申します。平素より本研究会の活動にご支援ご協力を頂いておりますことに心より感謝申し上げます。

さて、新学習指導要領では、高等学校数学科の目標を「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成することを目指す。」と設定し、さらに数学の学習においては、『数学的な見方・考え方』を働かせながら、知識及び技能を習得したり、習得した知識及び技能を活用して探究したりすることにより、知識は生きて働くものとなり、技能の習熟・熟達につながるとともに、より広い領域や複雑な事象の問題を解決するための思考力、判断力、表現力等や、自らの学びを振り返って次の学びに向かおうとする力などが育成される。また、このような学習を通じて、『数学的な見方・考え方』が更に確かで豊かなものとなっていくと考えられる。」と記しております。

どうすれば、生徒たちの「数学的な見方・考え方」を働かせることができるのか、数学的活動を如何に工夫していくのか、学校教育現場で数学教育に携わる我々教師に求められる重要な課題であると考えます。

本研究会では、今後も教育行政機関や大学等との連携を図りながら、高校数学教育の研究と発展に努めて参りたいと思います。

今年度は新型コロナもようやく落ち着きをみせ、初めての試みで【部会総会】、【高校数学教育を考える会】、【研究大会】、を同日開催致しました。

【第47回高校数学教育を考える会】では令和5年度琉球大学入試問題に関して、作問の意図や採点基準、受験生の解答等について大学側および本研究会双方の意見交換を致しました。お忙しい中、琉球大学より参加されました4名の先生方に心より感謝いたします。

【研究大会】では、美里高等学校の阿嘉博之教諭、本部高等学校の小松真澄教諭、読谷高等学校の田中千大教諭のご三名の先生方が、それぞれの教科指導法のテーマを追求した研究発表が行われましました。本発表は、7月に開催される九州算数数学教育研究（熊本）大会のリハーサルも兼ねております。多くの先生方が参加していましたが、ご自身の指導法に参考にして頂き、今後の実践に役立てて頂けたら幸いに思います。また、本研究大会の趣旨に賛同頂き、指導助言者として参加くださいました、琉球大学の山城康一准教授に心から感謝申し上げます。

今後も新型コロナ感染対策をしながら、会員の先生方による研究を推進していけるよう、様々な対応をしてまいりますので、どうぞよろしくお願い申し上げます。

結びに、学期末のお忙しい折、ご参加頂いた諸先生方、企画運営にご尽力下さいました役員、事務局の先生方、心より感謝申し上げます。今後とも、本研究会のさらなる活性化に向け、ご理解とご協力をお願い申し上げます。

沖縄県高等学校数学教育会 第61回総会および第47回高校数学教育を考える会

1 日 程	令和5年6月22日(木)	
	受 付	13:00～
	沖数教総会	13:30～14:00 (高数教受付 13:40～)
	高校部会総会	14:10～14:40
	高校数学教育を考える会	14:50～15:50
	研究大会	16:00～17:00

2 会 場 琉球大学 50 周年記念会館

3 部会総会 (14:10～14:40) 司会：研究集会委員

- (1)開会のことば 副会長 安仁屋 宗一郎(首里)
- (2)会長あいさつ 会 長 西 原 誠(南風原)
- (3)議 事 ※議長選出
 - ①令和4年度会務報告
 - ②令和4年度決算報告及び監査報告
 - ③令和5年度役員(案)について
 - ④令和5年度行事計画(案)について
 - ⑤令和5年度予算(案)について
 - ⑥その他
- (4)閉会のことば 事務局 金 城 徹 也(小禄)
- (5)感謝状贈呈(予定)

4 高校数学教育を考える会 (14:50～15:50) 司会：研究集会委員

- (1)開会のことば 副会長 永 吉 和 紀(向陽)
 - [大学入試問題研究委員会委員長 田 口 清 陽(沖縄水産)]
 - 令和5年度琉球大学入試問題について
 - ①採点者の感想と高校側への要望
 - ②高校から大学側への要望、質疑応答
 - ③その他
- ※琉球大学から参加予定の先生方 【伊藤雅彦・千原浩之・山城康一・菅修一】
- (2)閉会のことば 副会長 前 里 哲 寿(那覇)

5 研究大会(16:00～17:00) 司会：研究集会委員

- (1)研究発表
 - 阿嘉博之(美里) 「数学的活動を円滑に進めるための授業の工夫」
 - 小松真澄(本部) 「自ら考える力を育む「データの分析」の授業づくり」
 - 田中千大(読谷) 「知識を活用する力と数学的な表現を用いて説明する力を育む
協調学習の授業づくり」
- (2)質疑応答
- (3)指導助言 山 城 康 一(琉球大学教育学部准教授)

6 大会当日の役員

総務	会 長(案)	西 原	誠(南風原)	
	副会長(案)	安仁屋	宗一郎(首 里)	永 吉 和 紀(向 陽)
		前 里	哲 寿(那 覇)	
	事務局	金 城	徹 也(小 禄)	
	研究集会委員			

沖縄県高等学校数学教育会会則

- 第1条 本会は沖縄県高等学校数学教育会と称す。
- 第2条 本会の事務局は原則として那覇市近郊の高等学校におく。
- 第3条 本会は沖縄県高等学校数学教育会の興隆と会員の相互親睦を図ることを目的とする。
- 第4条 本会は前条の目的を達成するために次の事業を行う。
1、数学教育に関する研究と調査
2、講習会、講演会および研修会などの開催
3、会誌の発行
4、九州数学教育会、日本数学教育学会との連携
5、その他
- 第5条 本会は沖縄県の高等学校数学教師ならびに本会の目的に賛同する者をもって組織する。
- 第6条 本会の目的を達成するために次の機関を置く。
1、総会 2、代議員会 3、理事会 4、各種委員会
- 第7条 総会は会長が召集し、年1回以上開き、次の事項を付議する。
1、代議員会の決定事項および会計監査の承認
2、本会の解散、合併またはそれに準ずる事項
3、その他重要な事項
2 総会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第8条 代議員会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議決定する。
1、事業計画および予算 2、事業報告および決算
3、会則および内規の改正 4、その他理事会の起案する事項
2 代議員会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第9条 理事会は会長が召集し、この会則の定める事項の他、次の事項を審議する。
1、代議員会に提案する事項
2、代議員会で決定した事項の執行
2 理事会の議事は出席者の過半数をもって決する。
- 第10条 本会に次の役員をおく。
役員の任期は1年とし、再選を妨げない。
会長 1名 副会長 3名
理事 若干名（うち1名は常任理事）
監事 3名
- 第11条 役員は代議員会において選出する。
1、会長は本会を代表し、会務を総理する。
2、副会長は会長を補佐し、会長に事故あるときは、その職務を代行する
3、理事は理事会を構成し、会務を執行する。
4、常任理事は事務局を構成する。
5、監事は本会の会計を監査する。
- 第12条 代議員は各高等学校において会員中より1名選出し、また必要に応じて会長が委嘱する。代議員は代議員会を構成する。
- 第13条 本会の会計年度は、4月1日に始まり、翌年3月31日に終わる。
- 第14条 本会の経費は、会費、補助金、およびその他の収入を持ってこれに充てる。
- 第15条 本会の会員は、会費を納入するものとする。
- 第16条 この会則の施行についての細則は、代議員会において決定する。

付 則
この会則は、1967年4月1日より施行する。
一部改正 平成17年4月1日

令和 4 年度 沖縄県高等学校数学教育会 会務報告

令和 4 年

- 4月15日 第1回 沖数教事務局長会（首里高校）
・令和4年度役員、年間行事計画、会誌49号、総会の持ち方、九数教（鹿児島）大会等について
- 4月21日 第1回 高数教役員会（南風原高校）
・令和4年度役員、年間行事計画、会誌58号の発行等について
- 5月11日 第1回 高数教理事会・代議員会（書面会議）
- 5月13日 第1回 沖数教役員会（首里高校）
・令和4年度役員、理事会・代議員会、会誌49号、総会の持ち方、小中高合同研究会について
- 5月20日 第1回 高数教理事会・代議員会の書面表決〆切
- 6月21日 第1回 沖数教理事会・代議員会（書面会議）
- 6月28日 令和4年度 沖縄県高等学校数学教育会 第60回総会（西原高校）
第46回 高校数学教育を考える会（西原高校）
令和4年度琉球大学入試問題について（県内各校より28名参加）
琉球大学【前田高士先生・木本一史先生・松下尚弘先生・眞野智行先生】
- 7月 上旬 第1回 診断テスト実施
- 7月 1日 第1回 沖数教理事会・代議員会の書面表決〆切
- 7月26日 会誌58号「高校数学教育」発行
- 7月27日 第76回 九州数学教育会総会並びに九州算数・数学教育研究（鹿児島）大会
～29日 発表者 中里 卓哉 先生（コザ高等学校）
洲鎌 啓祐 先生（糸満高等学校）
千葉 美貴 先生（那覇国際高等学校）
指導助言者：山城 康一 先生（琉球大学）
- 8月 4日 第1回 小中高合同準備委員会（web 会議）
- 10月 7日 第3回 沖数教役員会（首里高校）
- 10月21日 第2回 沖数教理事会・代議員会（書面会議）
九数教（鹿児島）大会、第49回沖数教総会、第46回小中高合同研究会について
- 10月31日 第2回 沖数教理事会・代議員会の書面表決〆切
- 11月25日 第49回 沖数教総会（オンライン開催）
第46回 小中高合同研究会（オンライン開催）
- 12月 3日 九数教事務局長会議・理事会・代表委員会（web 会議）
類比方式による数学ⅠA問題集編集会議（web 会議）
算数・数学教育研修会並びに代表委員会
・九州数学教育会総会並びに算数・数学教育研究会（鹿児島）大会報告
・九数教（熊本）大会に向けて
- 12月 上旬 第2回 診断テスト実施
- 12月22日 診断テスト廃止の公文発送

令和 5 年

- 2月 3日 第5回 沖数教役員会（首里高校）
- 2月16日 第3回 沖数教理事会・代議員会（書面会議）
- 3月 下旬 第1回 大学入試問題研究委員会（第2回4月下旬予定）

令和4年度 沖縄県高等学校数学教育会 決算

収入	支出	残金
1,363,669	490,941	872,728

収入の部

項	目	科 目	予 算 額	決算額	△未・過収入額	説 明
1	1	学 校 分 担 金	250,000	249,271	△ 729	分担金+会費
	2	会 費				
	3	繰 越 金	754,390	754,390	0	前年度からの繰越
	4	補 助 金	10,000	10,000	0	九数教からの補助
	5	協 賛 金	230,000	200,000	△ 30,000	管理職等からの協賛金
	6	雑 収 入	150,000	150,000	0	診断テスト委10万 基礎問題集編集委5万
	7	通 帳 利 息	7	8	1	
計			1,394,397	1,363,669	△ 30,728	

支出の部

項	目	科 目	予 算 額	決 算 額	残 額	説 明
1		運 営 費	85,000	74,096	10,904	
	1	庶 務 費	10,000	0	10,000	
	2	会 議 費	3,000	2,096	904	西原高校施設費
	3	手 当	46,000	46,000	0	事務局4万+監査2千×3
	4	沖 数 教 会 費	26,000	26,000	0	振込は3項の沖数教分担金とまとめて行った
2		事 務 費	305,000	139,135	165,865	
	1	研 究 発 表 補 助 費	30,000	39,600	△ 9,600	九州大会発表費3名 (参加費3000円+補助費10000円)
	2	派 遣 費	180,000	9,110	170,890	九州大会(オンライン)参加費3名 (会長、事務局、指導助言者)
	3	講 習 ・ 講 演 会 費	5,000	0	5,000	
	4	委 員 会 活 動 費	25,000	25,000	0	高数教手当3委員 (大学入試問題研究委など)
	5	研 究 調 査 補 助 費	5,000	0	5,000	
	6	支 部 活 動 補 助 費	0	0	0	
	7	会 誌 発 行 費	60,000	65,425	△ 5,425	会誌第発行費、郵送費
3		沖 数 教 分 担 金	270,000	270,550	△ 550	振込手数料550
4		雑 費	0	2,160	△ 2,160	琉大教授手土産
5		全国大会運営委員・ 発表者参加費	0	0	0	
6		九数教沖縄大会積立費	300,000	5,000	295,000	
7		予 備 費	434,390		434,390	
計			1,394,390	490,941	903,449	

監査報告書

沖縄県高等学校数学教育会

会長 西原 誠 殿

令和4年度沖縄県高等学校数学教育会の会計監査の結果を下記の通り報告します。

記

会計監査は、金銭出納簿、証書書類および預金通帳によって実施した。

1. 証書類は、金銭出納簿の通り整理されていた。
2. 残高 872,728円 は、琉球銀行小禄支店普通預金口座 205-278に預金されていることを確認した。
3. 九数教沖縄大会通帳として、琉球銀行小禄支店普通預金口座 470-560に金額 1,042,867円 が預金されていることを確認した。
(※前年度繰越金 1,037,857円 に利息 10円。高数教より積立金 5,000円)

以上、監査の結果、異常を認めない。

令和5年 3 月 28 日 (火)

沖縄県高等学校数学教育会

監査委員

日高 輝 忠

前田 聖 子

知石 勝 史

令和5年度 沖縄県高等学校数学教育会役員(案)

高数教三役

高数教	名前	勤務先	備考
会長	西原 誠	南風原	校長
副会長	安仁屋宗一郎	首里	教頭
	前里哲寿	那覇	
	永吉和紀	向陽	
事務局	金城徹也	小禄	教諭
庶務	新垣比呂人	小禄	
会計	大嶺和大	小禄	

高数教理事

高数教	名前	勤務先	備考
理事	各種委員会	田口清陽	大学入試問題研究委員長
		糸数 啓	基礎問題集編集委員会委員長
		真栄田義尚	研修集会委員長
		日高輝忠	特別委員会委員長
	冲数教	西村松太朗	冲数教事務局
	校長	仲地範禮	
		前三盛英明	
		金城伸子	
		宮城竜幸	
		金城栄一	
		金城達也	
	教頭	金城昭人	
		川添貴司	
		玉城重光	
		宮城広行	
		新井孝雄	
		真喜屋篤	
	行政	半嶺 満	教育長
		玉城 学	教育指導統括監
		崎間恒哉	県立学校教育課課長
		新垣公崇	県立学校教育課
		花城健彰	県立学校教育課
		湧川泰成	県立学校教育課
		金城順也	総務課
		山城芳則	学校人事課
		平良哲也	学校人事課
		渡嘉敷真吾	学校人事課
		金城正樹	保健体育課課長
		喜久本直貴	保健体育課
		上江洲寿	働き方改革推進課課長
		津嘉山 誠	生涯学習振興課
		伊志嶺嘉典	教職研修総括
		生島英輝	教育センター
		宮里恵太	
		高原香織	離島児童生徒支援センター
		津波古章吾	

冲数教役員(高数教選出)

冲数教	名前	勤務先	備考
副会長	西原 誠	南風原	校長
理事	金城伸子	豊見城南	校長
	宮城竜幸	向陽	
	金城栄一	糸満	
代議員	金城昭人	宜野湾	教頭
	川添貴司	陽明	
	安仁屋宗一郎	首里	
	前里哲寿	那覇	
	永吉和紀	向陽	
	金城順也	総務課	教育庁
	新垣公崇	県立学校教育課	
監査	上江洲隆	読谷	教諭

各種委員会

大学入試 問題研究 委員会	◎田口清陽	沖縄水産	洲鎌啓祐	糸満
	石川吉幸	高等特支	下里幸司	宮古工業
	屋富祖直	那覇西	平良秀史	那覇
	米吉亮一	向陽	金城裕介	向陽
	徳門 潔	首里		
基礎問題集 編集委員会	◎糸数 啓	浦添	垣花康夫	開邦
	平田直樹	浦添	安座間淳	西原
	城間直美	浦添		
研究集会 委員会	◎真栄田義尚	浦添商	大城貴洋	那覇西
	新城拳聖	西原	禰保研光	宜野湾
	金城裕介	向陽		
特別委員会 (観点別評価) (1人1台端末)	◎日高輝忠	北谷	豊里力也	コザ
	砂川真木	豊見城	松元 輝	八重山
	神谷百恵	北中城	古波津哲也	豊見城
	西村松太朗	首里	大城 愛	南風原
	池間昌也	球陽	石川 睦	嘉手納

高数教監査

監事	知名勝史	首里東
	仲座真紀	那覇工業
	前泊聖子	豊見城南

令和5年度 行事計画（案）

1. 会員の各種委員会での教育研究活動および親睦
2. 冲数教・九数教・日数教との連携および活動

月	行事予定	説明
4	4/14(金) 第1回冲数教事務局長会 4/25(火) 第1回高数教役員会	17:30 ～ 首里高校 16:30 ～ 南風原高校
5	5/11(木) 第1回理事・代議員会 5/12(金) 第1回冲数教役員会	例年5月中旬頃(中間考査期間)
6	6/22(木) 冲数教 第50回総会 高数教 第61回総会 高校数学教育を考える会 高数教 研究大会 第2回冲数教役員会 第1回冲数教理事会・代議員会	例年6月下旬頃(期末考査期間) 場所：琉球大学50周年記念館
7	7/26(水)～28(金) 第77回九数教（熊本）大会	沖縄県高等学校部会発表者 本部高校 小松 真澄 先生 美里高校 阿嘉 博之 先生 読谷高校 田中 千大 先生
8	8/9(水)～10(木) 第105回全国（青森）大会	【会誌第59号発行予定】
9	第1回小中高合同準備委員会	
10	10/5(木) 第4回冲数教役員会 10/19(木) 第2回冲数教理事会・代議員会 第2回小中高合同準備委員会	首里高校 琉球大学
11	小中高合同研究会（11月予定）	研究授業高校部会が実施予定
12	九数教理事・代議員会（上旬）	会長・事務局長派遣
1		
2	2/1(木) 第5回冲数教役員会 2/8(木) 第3回冲数教理事会	首里高校 琉球大学
3	大学入試問題研究委員会（下旬）	

※その他必要に応じて役員会予定

令和5年度 沖縄県高等学校数学教育会 予算（案）

収入の部

項	目	科 目	予 算 額	前年度予算額	増 △減	説 明
1	1	学 校 分 担 金	250,000	250,000	0	分担金＋会費
	2	会 費				
	3	繰 越 金	872,728	754,390	118,338	前年度からの繰越
	4	補 助 金	10,000	10,000	0	九数教からの補助
	5	協 賛 金	160,000	230,000	△ 70,000	管理職からの協賛金(16名)
	6	雑 収 入	50,000	150,000	△ 100,000	基礎問題集5万円
	7	通 帳 利 息	8	7	1	
計			1,342,736	1,394,397	△ 51,661	

支出の部

項	目	科 目	予 算 額	前年度予算額	増 △減	説 明
1		運 営 費	85,000	85,000	0	
	1	庶 務 費	10,000	10,000	0	通信費, 消耗品費
	2	会 議 費	3,000	3,000	0	会議, 大会運営費
	3	手 当	46,000	46,000	0	事務局, 会計, 庶務・・・4万円 ＋監査2千円×3
	4	沖 数 教 会 費	26,000	26,000	0	沖数教への会費
2		事 務 費	365,000	305,000	60,000	
	1	研究発表補助費	45,000	30,000	15,000	補助費3名(1万円×3) 参加費3名(5千円×3)
	2	派 遣 費	225,000	180,000	45,000	7月:九数教大会(会長, 助言者) 12月:九数教理事会(会長) 九数教大会参加費3名(5千円×3)
	3	講習・講演会費	5,000	5,000	0	
	4	委員会活動費	25,000	25,000	0	大学入試問題研究委員会 研究集会委員会, 特別委員会
	5	研究調査補助費	5,000	5,000	0	
	6	支部活動補助費	0	0	0	
	7	会 誌 発 行 費	60,000	60,000	0	会誌第59号製本代
3		沖 数 教 分 担 金	270,000	270,000	0	
4		雑 費	0	0	0	
5		全国大会運営委員・ 発表者参加費	0	0	0	
6		九数教沖縄大会積立費	5,000	300,000	△ 295,000	
7		予 備 費	617,736	434,390	183,346	
計			1,342,736	1,394,390	△ 51,654	

※九州大会発表者3名、全国大会参加者1名分の旅費は県費対応

令和 5 年度

第 4 7 回高校数学教育を考える会 (沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学)

目次

令和 5 年度	琉球大学入試試験問題についての感想と質問 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 0
前期日程	乙	1 1
後期日程		1 2
令和 5 年度	琉球大学入試問題 解答例 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 3 ~ 2 1
前期日程	乙	2 2 ~ 2 3
後期日程		2 4 ~ 2 8

令和5年度(2023)琉球大学入試問題(前期・甲)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2	数Ⅲ 数Ⅲ	微分法 積分法	標準 やや易	・ 解きやすい問題だったのではないか。 ・ 採点して何か気になる点はあったか。
2 問1 問2	数Ⅲ 数Ⅲ	微分法 積分法	標準 標準	・ 絶対値記号を使ったのは場合分けをさせたいという意図があったのか。 ・ グラフが原点に関して対象であることを利用する際はしっかり説明できていたか。$(f(-x) = -f(x))$の説明が無いものはどうなったか) ・ 作問の際にどんな議論があったか。 ・ 採点して何か気になる点はあったか。
3 問1 問2	数B 数Ⅲ	空間ベクトル 微分法	標準 標準	・ ベクトルで解くものが多かったか。いろいろな解法があったか。 ・ できはどうだったか。 ・ 大小の比較は説明できていたか。説明が無いもの・不十分なものには減点等があったか。
4 問1 問2 問3	数A 数B 数B	確率 数列 数列	標準 標準 標準	・ 問2はどのような解き方があったか。 ・ いろいろな考え方・解き方が使われていて良い問題だったと思います。 ・ できはどうだったか。
全体	・ 微積分・空間図形・確率・数列など、幅広い範囲からの出題で良かったです。 ・ 難易度も難しすぎず良かったと思います。採点した印象はどうだったか。 ・ 証明がありませんでしたが、記述で説明する力は見ることができたか。			

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和5年度(2023)琉球大学入試問題(前期・乙)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質 問 事 項
1 問1 問2	数Ⅰ 数Ⅱ	整数 数列	標準 標準	・どんなつまずきがあったか(17で割ることが出来ていたか。一つの整数の組も容易に求まるものではなかったが、ユークリッドの互除法を用いた後、代入により整数解を求めることが出来ていたか。) ・問2は、問題の意味(段を超える際、白から始まること)を理解できていたか。 ・記述が難しかったと思うが、意味が分かる文章を書けていたか。 ・どのような採点基準があったか。
2 問1 問2 問3	数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅱ	微分法 積分法 微分法	やや易 標準 標準	・増減・極値については、増減表があれば良かったか。(「～のときに増加。」「$x=\Delta$のときに極大値○をとる」などの記述まで必要だったか。) ・グラフを書くことが出来ていたか。 ・問2ができないと問3もできない形でしたが、どうだったでしょうか。 ・$0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$については説明が必要だったか。
全体 ・いろいろな分野から出題されていましたが、どこができていた・どこができていなかったか。 ・例年より難しい印象がありましたが、できはどうだったか。				

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和5年度(2023)琉球大学入試問題(後期)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2	数Ⅲ 数Ⅲ	微分法 積分法	標準 標準	・解きやすい問題だったと思うが、定義域の記述や大小関係、原点に関して対称などの記述までできていたか。 ・細かい採点基準などはあったか。
2 問1 問2	数Ⅲ 数Ⅲ	積分法 積分法	標準 標準	・$F'(3x)$ をどのように計算していたか。 ・置換積分をしっかりとつかえていたか。 ・$\tan x$ の逆関数 ($\tan^{-1} x$) に関する出題だったと思うが、作問の際に大学の範囲を着想とすることは多いのか。
3 問1 問2	数B 数B	数列 数列	標準 標準	・問1, 問2それぞれに問題の着想は何かありますか？ ・帰納法を使う証明問題でしたが、できはどうでしたか。
4 問1 問2 問3 問4	数A 数B 数B 数A	確率 数列 数列 確率	標準 標準 やや難 標準	・誘導が丁寧で解きやすく、いろいろな考え方が必要な良い問題だと感じました。 ・この問題は、誘導も最初からあったのか、後から誘導を作った形か。
全体 ・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。 ・確率と数列を融合する問題が前期甲・後期と出題があったが、意識して出題をしているか。				

(注: 易・標準・難は教科書レベルにおいて)

1 $a > 0$ とする。座標平面で関数 $y = \frac{1}{x^a}$ のグラフ上の点 $(1, 1)$ における接線が x 軸と交わる点を A , y 軸と交わる点を

B とし、原点を O とする。三角形 OAB の面積を $S(a)$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問1 $S(a)$ を求めよ。

問2 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答 問1 $y = \frac{1}{x^a} = x^{-a}$ より, $y' = -ax^{-a-1}$

$x=1$ のとき, $y' = -ax^{-a-1} = -a$ より,

点 $(1, 1)$ における接線の方程式は $y-1 = -a(x-1)$

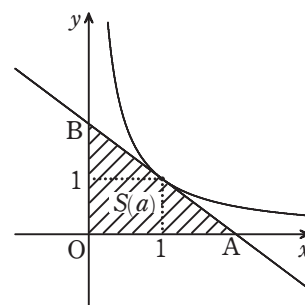
すなわち, $y = -ax + a + 1 \cdots \textcircled{1}$

y 切片を考えると, $B(0, a+1)$

また, $\textcircled{1}$ で $y=0$ とすると $a > 0$ より, $x = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$

よって, $A\left(1 + \frac{1}{a}, 0\right)$

$1 + \frac{1}{a} > 0$, $a+1 > 0$ だから $S(a) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)(a+1) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \cdots \text{図}$



問2 問1 より, $S(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} + 2\right)$ であるから, $S'(a) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(a+1)(a-1)}{2a^2}$

$S'(a) = 0$ のとき, $a > 0$ より, $a = 1$

$a > 0$ より, 増減表は以下のようになる。

a	0	...	1	...
$S'(a)$	/	-	0	+
$S(a)$	/	↘	最小	↗

よって, $S(a)$ は, $a=1$ のとき, 最小値 $S(1) = \frac{2^2}{2} = 2$ をとる。 $\cdots \text{図}$

別解 問1の結果より, $a > 0$ のとき, 相加平均と相乗平均の大小関係を用いると,

$$S(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2\right) = 2$$

上の不等式の等号は, $a = \frac{1}{a}$ すなわち $a^2 = 1$

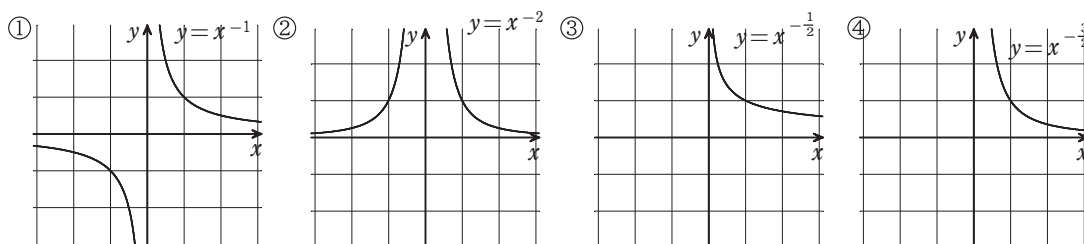
$a > 0$ より, $a = 1$ のときに等号は成立する。

よって, $S(a)$ は, $a=1$ のとき, 最小値 2 をとる。 $\cdots \text{図}$

参考 $y = x^k$ (べき関数、累乗関数) について考える。 $k=1, 2$ のとき, グラフは直線 $y=x$, 放物線 $y=x^2$ となる。本問題は, $k < 0$ を考えているので, まずは k を整数として, $k=-1, -2$ のとき, グラフ ①, ② になる。

さらに, 本問題は, k が整数という条件はないので, $k = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ のとき, グラフ ③, ④ になる。

①~④のいずれのグラフも, 確かに定点 $(1, 1)$ を通り, 点 $(1, 1)$ における接線を引くことができる。



GRAPESなどのグラフソフトを用いて、 $y=x^k$ の k の値を動かしてグラフの様子を調べると、 y 軸より左側の部分が①、②のように現れたり、③、④のように消えたりすることがわかる。ここで、左側の部分が無いときに $x<0$ の値を代入することを考えてみる。

例えば、 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ に $x=-2$ を代入すると $y=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}i}=-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ であり、複素数となる。

このように、 $x<0$ のとき、 y は複素数で表すことはできないかと考え、 $\text{Re } y$ 、 $\text{Im } y$ をそれぞれ y の実部、虚部とすると右のようなグラフ⑤になった。

($x=-t$ とおくと、 $y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{-t}}=\frac{1}{\sqrt{t}i}=-\frac{1}{\sqrt{t}}i$)

より一般的に考えるには、複素関数の定義に従って以下のように行う。

$x=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$)とおくと、 $y=x^k=r^k e^{ik\theta}=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

実際は x は複素数全体であるが、本問題に合わせて x は実数とすると、

(i) $x>0$ のとき、 $r=x$ かつ $\theta=2n\pi$ (n は整数) よって、 $y=x^k(\cos 2kn\pi+i\sin 2kn\pi)$ (n は整数)

(ii) $x<0$ のとき、 $r=-x$ かつ $\theta=-\pi+2n\pi$ (n は整数)

よって、 $y=(-x)^k\{\cos(-k\pi+2kn\pi)+i\sin(-k\pi+2kn\pi)\}$ (n は整数)

グラフ⑤と比較するために、 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ について $x=2$ 、 $x=-2$ のときについて考えると、

$k=-\frac{1}{2}$ 、 $x=2$ のとき、(i)より $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(-n\pi)+i\sin(-n\pi)\}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

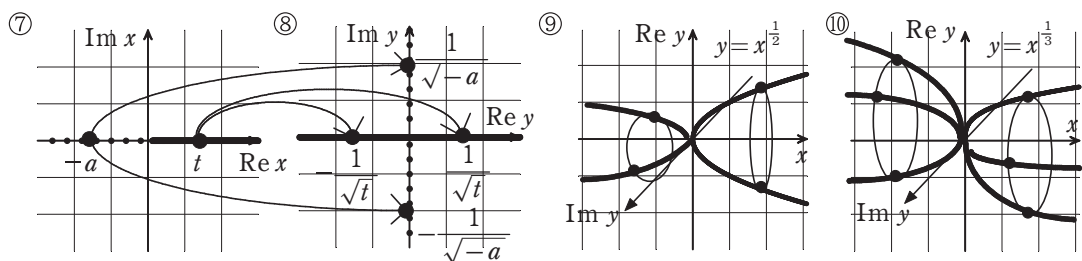
$k=-\frac{1}{2}$ 、 $x=-2$ のとき、

(ii)より $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}i$ 、 $-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

いずれも、1つの x について2つの y の値をとり、 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ のグラフは右のグラフ⑥のようになる。

これは、下の複素数平面⑦の実軸上の点が複素数平面⑧に移るとも考えられる。

また、同様に考えると、 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 、 $y=x^{\frac{1}{3}}$ のグラフはそれぞれ⑨、⑩のようになる。



また、グラフ⑥、⑨、⑩から、 m を自然数とすると、

$y=x^{\frac{1}{m}}$ のグラフは $x=a(a\neq 0)$ のとき、 $\text{Re } y$ 、 $\text{Im } y$ 平面上に半径 $\sqrt[m]{|a|}$ の円上に m 個の点をとる、

$y=x^{-\frac{1}{m}}$ のグラフは $x=a(a\neq 0)$ のとき、 $\text{Re } y$ 、 $\text{Im } y$ 平面上に半径 $\frac{1}{\sqrt[m]{|a|}}$ の円上に m 個の点をとる。

このように、複素関数論の範囲でべき関数 $w=z^\alpha$ ($w=z^\alpha=e^{\alpha\log(re^{i\theta})}=e^{\alpha(\log r+i(\theta+2n\pi))}$ (n : 整数) とする)

や対数関数 $w=\log z$ ($w=\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)$ (n : 整数) とする) を考えるとき、解を複数個持つ

多価関数となる。また、これらにより、 i^i や $\log i$ なども考えられるようになり、

$$(1) i^i=e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ (主値)} \quad (2) \log i=\frac{\pi}{2}i \text{ (主値)} \quad (3) \sqrt{1}=\pm 1 \quad (4) 8^{\frac{1}{3}}=2, -1\pm\sqrt{3}i$$

など、実数の範囲では考えられなかった結果が導かれることがある。

(1)は実数、(2)は純虚数になることや(3)、(4)は複数の値をとることが驚きである。)

2 a を実数とし, $f(x) = xe^{-|x|}$, $g(x) = ax$ とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f(x)$ の増減を調べ, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

問2 $0 < a < 1$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

【解答】 問1 (i) $x \geq 0$ のとき, $f(x) = xe^{-x}$ より, $f'(x) = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0$ のとき, $x = 1$ であるから, 増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

また, 条件より $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$

(ii) $x < 0$ のとき, $f(x) = xe^x$ より, $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'(x) = 0$ のとき, $x = -1$ であるから, 増減表は以下のようになる。

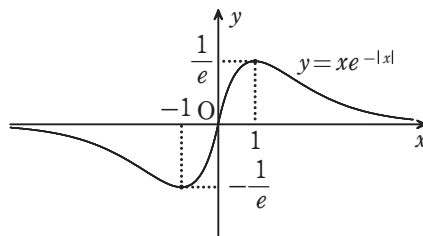
x	...	-1	...	0
$f'(x)$	-	0	+	/
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

また, $x = -t$ とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{t \rightarrow \infty} -te^{-t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$$

(i), (ii) より, グラフは右図のようになる。

【別解】 (ii) は, 「 $f(x) = -f(-x)$ であるから関数 $y = f(x)$ は奇関数であり, グラフは原点对称である。」としてもよい。



問2 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ の交点の x 座標を求める。

$x \geq 0$ として, $xe^{-x} = ax$ を解くと,

$x(e^{-x} - a) = 0$ より, $x = 0$ または $e^{-x} = a$

したがって, $x = 0, -\log a$

$0 < a < 1$ であるから $\log a < 0$ より $-\log a > 0$

また, $f(x) = -f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$ であるから2つの関数のグラフは原点对称であり,

求める面積は, $x \geq 0$ における面積 $\int_0^{-\log a} (xe^{-x} - ax) dx$ を2倍したものを考えればよい。

$$\text{また, } \int xe^{-x} dx = \int x \cdot (-e^{-x})' dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx$$

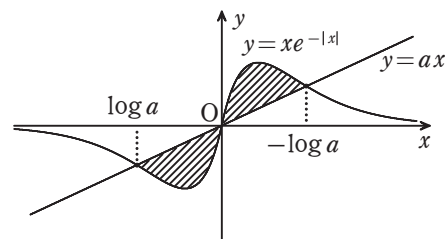
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \text{ であるから,}$$

$$\int_0^{-\log a} (xe^{-x} - ax) dx = \left[-e^{-x}(x+1) - \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^{-\log a}$$

$$= -e^{\log a}(-\log a + 1) - \frac{1}{2}a(-\log a)^2 + 1$$

$$= a(\log a - 1) - \frac{1}{2}a(\log a)^2 + 1$$

したがって, 求める面積は $2a(\log a - 1) - a(\log a)^2 + 2$... 図



3 空間内に 4 点 $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ をとる。時刻 $t=0$ から $t=1$ まで 3 点 P , Q , R は次のように動くものとする。

- ・ $t=0$ に 3 点は点 O を出発する。
- ・ 動点 P は線分 OA 上を速さ 1 で点 A に向かって動く。
- ・ 動点 Q は線分 OB 上を速さ $\frac{1}{2}$ で点 B に向かって動く。
- ・ 動点 R は線分 OC 上を速さ 2 で動く。 $t=\frac{1}{2}$ までは点 C へ向かって動き、 $t=\frac{1}{2}$ 以後は点 C から点 O に向かって動く。

時刻 t における三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $S(t)$ を求めよ。

問2 $S(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

解答 問1 時刻 t における点 P , Q の座標はそれぞれ $P(t, 0, 0)$, $Q(0, \frac{1}{2}t, 0)$,

R の座標は、 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $R(0, 0, 2t)$, $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき、 $R(0, 0, 2-2t)$

(i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{PQ} = (-t, \frac{1}{2}t, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-t, 0, 2t)$ であるから、

$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{5}{4}t^2$, $|\overrightarrow{PR}|^2 = 5t^2$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = t^2$

$$\text{したがって, } S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}t^2 \cdot 5t^2 - t^4} = \frac{\sqrt{21}}{4} t^2$$

(ii) $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき、 $\overrightarrow{PQ} = (-t, \frac{1}{2}t, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-t, 0, 2-2t)$ であるから、

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{5}{4}t^2, \quad |\overrightarrow{PR}|^2 = 5t^2 - 8t + 4, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = t^2$$

$$\begin{aligned} \text{したがって, } S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}t^2(5t^2 - 8t + 4) - t^4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2} \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{ より, } S(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{21}}{4} t^2 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} \sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2} & (\frac{1}{2} < t \leq 1) \end{cases} \quad \dots \text{図}$$

問2 (i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $S(t) = \frac{\sqrt{21}}{4} t^2$ より、 $S(t)$ は単調に増加し、 $t = \frac{1}{2}$ のときに最大値をとる。

$$(ii) \frac{1}{2} < t \leq 1 \text{ のとき, } S(t) = \frac{1}{4} \sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2}$$

$$f(t) = 21t^4 - 40t^3 + 20t^2 \text{ とおくと, } f'(t) = 84t^3 - 120t^2 + 40t = 4t(21t^2 - 30t + 10)$$

$\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき、 $f'(t) = 0$ とおくと、 $t = \frac{15 \pm \sqrt{15}}{21}$ より、 $f(t)$ の増減は次のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{15 - \sqrt{15}}{21}$	...	$\frac{15 + \sqrt{15}}{21}$	...	1
$f'(t)$	/	+	0	-	0	+	
$f(t)$	/	↗		↘		↗	1

(i), (ii) と $S(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{21}}{16} > \frac{1}{4} = S(1)$ より、 $S(t)$ を最大にする t の値は $t = \frac{15 - \sqrt{15}}{21}$... 図

【参考】 三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ は,

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \text{ のように導かれる。}$$

【別解】 ($S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ を利用する解法) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $|\overrightarrow{PQ}|^2$, $|\overrightarrow{PR}|^2$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ については解答と同様に求める。

問1 $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると,

$$(i) \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{t^2}{\frac{\sqrt{5}}{2} t \cdot \sqrt{5} t} = \frac{2}{5},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ であるから,}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} t \cdot \sqrt{5} t \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{\sqrt{21}}{4} t^2 \quad \dots \text{図}$$

$$(ii) \ \frac{1}{2} < t \leq 1 \text{ のとき, } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{t^2}{\frac{\sqrt{5}}{2} t \cdot \sqrt{5t^2 - 8t + 4}} = \frac{2t}{\sqrt{25t^2 - 40t + 20}},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4t^2}{25t^2 - 40t + 20}} = \sqrt{\frac{21t^2 - 40t + 20}{25t^2 - 40t + 20}} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} t \cdot \sqrt{5t^2 - 8t + 4} \cdot \sqrt{\frac{21t^2 - 40t + 20}{25t^2 - 40t + 20}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2} \quad \dots \text{図} \end{aligned}$$

【参考】 三角形の面積と外積

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ のとき, } \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積という。

$\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトル ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ の法線ベクトル) の一つである。

また, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積となる。

すなわち, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積 S は, $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ である。

【別解】 (ベクトルの外積を利用する解法)

問1 (i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき, $\overrightarrow{PQ} = \left(-t, \frac{1}{2}t, 0\right)$, $\overrightarrow{PR} = (-t, 0, 2t)$ であるから,

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{2}t \cdot 2t - 0 \cdot 0, -(-t) \cdot (2t) + 0 \cdot (-t), (-t) \cdot 0 - \frac{1}{2}t \cdot (-t)\right) = \left(t^2, 2t^2, \frac{1}{2}t^2\right) \text{ より,}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(t^2)^2 + (2t^2)^2 + \left(\frac{1}{2}t^2\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{21}{4}t^4} = \frac{\sqrt{21}}{4} t^2 \quad \dots \text{図}$$

(ii) $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき, $\overrightarrow{PQ} = \left(-t, \frac{1}{2}t, 0\right)$, $\overrightarrow{PR} = (-t, 0, 2-2t)$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{1}{2}t \cdot (2-2t) - 0 \cdot 0, -(-t) \cdot (2-2t) + 0 \cdot (-t), (-t) \cdot 0 - \frac{1}{2}t \cdot (-t)\right) \\ &= \left(t - t^2, 2t(1-t), \frac{1}{2}t^2\right) \text{ より,} \end{aligned}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(t - t^2)^2 + \{2t(1-t)\}^2 + \left(\frac{1}{2}t^2\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2} \quad \dots \text{図}$$

参考

① xyz 空間上で, x 切片, y 切片, z 切片がそれぞれ p, q, r のとき

3 点 $(p, 0, 0), (0, q, 0), (0, 0, r)$ を通る平面の方程式は $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ である。

② 平面 $ax + by + cz + d = 0$ と点 (x_1, y_1, z_1) との距離は $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

※ ①, ② は平面上における直線の方程式においても以下の公式 ①', ②' があるので一緒に覚えると良い。

①' xy 平面上で, x 切片, y 切片がそれぞれ p, q のとき

2 点 $(p, 0), (0, q)$ を通る直線の方程式は $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ である。

②' 直線 $ax + by + c = 0$ と点 (x_1, y_1) との距離は $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

※ 問 1 では, x 切片, y 切片, z 切片が分かっているのので, 平面 PQR の方程式と三角錐 OPQR の体積が容易に分かることから, 上の公式を利用して $S(t)$ を求める。

別解

問 1 (i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき, $P(t, 0, 0), Q(0, \frac{1}{2}t, 0), R(0, 0, 2t)$ より,

平面 PQR の方程式は $\frac{x}{t} + \frac{y}{\frac{1}{2}t} + \frac{z}{2t} = 1$ これを変形して, $4x + 8y + 2z - 4t = 0$ であるから,

平面 PQR と点 O との距離 h は $h = \frac{|-4t|}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}t$

三角錐 OPQR の体積を $V(t)$ とおくと, $V(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{2}t\right) \cdot 2t \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}t^3$

$V(t) = \frac{1}{3}hS(t)$ より, $S(t) = \frac{3V(t)}{h} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}t^3}{\frac{2}{\sqrt{21}}t} = \frac{\sqrt{21}}{4}t^2$... 図

ii) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき, $P(t, 0, 0), Q(0, \frac{1}{2}t, 0), R(0, 0, 2-2t)$ より,

平面 PQR の方程式は $\frac{x}{t} + \frac{y}{\frac{1}{2}t} + \frac{z}{2-2t} = 1$ これを変形して, $\frac{x}{t} + \frac{y}{\frac{1}{2}t} + \frac{z}{2-2t} - 1 = 0$ であるから,

平面 PQR と点 O との距離 h は

$$h = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t^2} + \frac{1}{4(1-t)^2}}} = \frac{2t(1-t)}{\sqrt{20(1-t)^2 + t^2}} = \frac{2t(1-t)}{\sqrt{21t^2 - 40t + 20}}$$

三角錐 OPQR の体積を $V(t)$ とおくと, $V(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{2}t\right) \cdot (2-2t) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}t^2(1-t)$

$V(t) = \frac{1}{3}hS(t)$ より, $S(t) = \frac{3V(t)}{h} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}t^2(1-t)}{\frac{2t(1-t)}{\sqrt{21t^2 - 40t + 20}}} = \frac{1}{4}\sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2}$... 図

参考

ヘロンの公式 三辺の長さ a, b, c の三角形の面積 S は $s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

別解

(ヘロンの公式を利用する解法)

問 1 (i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{5}}{2}t$, $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5}t$, $|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + 4t^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}t$ より,

$$s = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5}t + \frac{\sqrt{17}}{2}t}{2} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{17}}{4}t$$

$$S = \sqrt{\frac{3\sqrt{5} + \sqrt{17}}{4}t \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{17}}{4}t \times \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{17}}{4}t \times \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{17}}{4}t} = \frac{\sqrt{21}}{4}t^2 \quad \dots \text{図}$$

($\uparrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ がうまく使えるようになっている!)

i) $\frac{1}{2} < t \leq 1$ のとき, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{5}}{2}t$, $|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5t^2 - 8t + 4}$,

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + (2-2t)^2} = \frac{\sqrt{17t^2 - 32t + 16}}{2} \text{ より,}$$

$$s = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5t^2 - 8t + 4} + \frac{\sqrt{17t^2 - 32t + 16}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}t + 2\sqrt{5t^2 - 8t + 4} + \sqrt{17t^2 - 32t + 16}}{4}$$

$5t^2 - 8t + 4 = A$, $17t^2 - 32t + 16 = B$ とおくと,

$$S = \sqrt{\frac{\sqrt{5}t + 2\sqrt{A} + \sqrt{B}}{4} \times \frac{-\sqrt{5}t + 2\sqrt{A} + \sqrt{B}}{4} \times \frac{\sqrt{5}t - 2\sqrt{A} + \sqrt{B}}{4} \times \frac{\sqrt{5}t + 2\sqrt{A} - \sqrt{B}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}t + 2\sqrt{A})^2 - B}{4^2} \times \frac{B - (\sqrt{5}t - 2\sqrt{A})^2}{4^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5t^2 + 4t\sqrt{5A} + 4A - B}{4^2} \times \frac{B - 5t^2 + 4t\sqrt{5A} - 4A}{4^2}} = \sqrt{\frac{(4t\sqrt{5A})^2 - (4A - B + 5t^2)^2}{4^4}}$$

$$4A - B + 5t^2 = 8t^2 \text{ より, } S = \sqrt{\frac{80t^2A - 64t^4}{4^4}} = \sqrt{\frac{5t^2A - 4t^4}{4^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{21t^4 - 40t^3 + 20t^2} \quad \dots \text{図}$$

4 1 個のさいころを 6 の目が 2 回出るまで投げ続ける。 $k=1, 2, 3, \dots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出る確率とすると、次の問いに答えよ。

問 1 p_k を求めよ。

問 2 p_k を最大にする k の値を求めよ。

問 3 $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$ を求めよ。

解答

問 1 $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出るのは,

k 回目までで 6 の目がちょうど 1 回出て, $k+1$ 回目にも 6 の目が出るときである。

$$\text{よって, 求める確率 } p_k \text{ は, } p_k = {}_k C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{k \cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} \quad \dots \text{図}$$

問 2 $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+1)5^k}{6^{k+2}} \times \frac{6^{k+1}}{k \cdot 5^{k-1}} = \frac{5(k+1)}{6k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) を利用して, p_k を最大にする k の値を求める。

(i) $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$ すなわち $p_{k+1} > p_k$ となるのは, $\frac{5(k+1)}{6k} > 1$ より $k < 5$ のときである。

(ii) $\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$ すなわち $p_k = p_{k+1}$ となるのは, $\frac{5(k+1)}{6k} = 1$ より $k = 5$ のときである。

(iii) $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ すなわち $p_{k+1} < p_k$ となるのは, $\frac{5(k+1)}{6k} < 1$ より $k > 5$ のときである。

(i) ~ (iii) より, $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > p_8 > \dots$ となるので,

p_k を最大にする k の値は $k = 5, 6 \dots$ 図

別解 $p_{k+1} - p_k = \frac{(k+1)5^k}{6^{k+2}} - \frac{k \cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} = \frac{5^k}{6^{k+1}} \left\{ \frac{k}{5} - \frac{k+1}{6} \right\} = \frac{5^{k-1}}{6^{k+2}} (k-5) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$

を利用して, p_k を最大にする k の値を求める。 k は自然数であるから, $\frac{5^{k-2}}{6^{k+2}} > 0$ より,

(i) $p_{k+1} - p_k > 0$ すなわち $p_{k+1} > p_k$ となるのは, $k < 5$ のときである。

(ii) $\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$ すなわち $p_k = p_{k+1}$ となるのは, $k = 5$ のときである。

(iii) $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ すなわち $p_{k+1} < p_k$ となるのは, $k > 5$ のときである。

(i) ~ (iii) より, $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > p_8 > \dots$ となるので,

p_k を最大にする k の値は $k = 5, 6 \dots$ 図

参考 $p_k = \frac{k \cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} = \frac{1}{30} k \left(\frac{5}{6} \right)^k$ とする。

$$f(k) = k \left(\frac{5}{6} \right)^k \text{ とすると, } f'(k) = \left(\frac{5}{6} \right)^k + k \left(\frac{5}{6} \right)^k \log \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6} \right)^k \left(1 + k \log \frac{5}{6} \right)$$

$$f'(k) = 0 \text{ のとき } k = -\frac{1}{\log \frac{5}{6}} = \frac{1}{\log \frac{6}{5}} \text{ より, } k > 0 \text{ の範囲で } f(k) \text{ の増減表は以下のようになる。}$$

k	0	...	$\frac{1}{\log \frac{6}{5}}$	...
$f'(k)$	/	+	0	-
$f(k)$	/	↗	最大	↘

常用対数表や e の近似値などの条件がない中で, これ以上の評価するのは厳しかった。

問3 $S_n = \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1}$ より,

$$36S_n = 1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺に } \frac{5}{6} \text{ をかけて } 30S_n = 1 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^n \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 6S_n = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - n \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n}{1 - \frac{5}{6}} - n \left(\frac{5}{6} \right)^n = 6 \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n \right\} - n \left(\frac{5}{6} \right)^n = 6 - (n+6) \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

したがって, 求める S_n の値は, $S_n = 1 - \frac{n+6}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^n \dots$ 図

別解 S_n は, $n+1$ 回さいころを投げる試行において「2回目または3回目または... $n+1$ 回目に2回目の6の目が出る」という事象, すなわち「6の目が2回以上出る」事象の確率である。

その余事象は「6の目が出ない, または1回だけ出る」事象であり, その確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + {}_{n+1}C_1 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6} + \frac{n+1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{n+6}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ よって, } S_n = 1 - \frac{n+6}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \dots \text{図}$$

参考 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ である。これは「さいころを相当な回数投げれば, 6の目が2回以上は出るだろう」という素朴な感覚に一致する。

参考 X を「2回目の6の目が出るまでのさいころを投げる回数」とすると, X は確率変数でありその確率分布は以下の表ようになる。

X	1	2	3	4	...	n	...
P	0	$\frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^0$	$\frac{2}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^1$	$\frac{3}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^2$	...	$\frac{n-1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$	...

X の期待値 $E(X)$ は, 無限級数を用いて $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ と表される。

これを求めることにより, 2回目の6の目が出るまでの平均回数を知ることができる。

以下, $E(X)$ を求める方法を2通り示す。

解① (高校数学の範囲。ただし $|r| < 1$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^{n-1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 r^{n-1} = 0$ は既知とする。)

部分和 $\sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$ を S_n とすると,

$$36S_n = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \dots \text{①}$$

$$\text{両辺に } \frac{5}{6} \text{ を掛けて } 30S_n = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + (n-1)(n-2) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \dots \text{②}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ により } 6S_n = 0 + 2 + 2 \cdot 2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + 2(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって } S_n = \frac{1}{3} \left\{ 0 + 1 + 2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + (n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \right\} - \frac{n(n-1)}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\text{ここで } T_n = 0 + 1 + 2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \dots + (n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \text{ とおいて,}$$

$$T_n - \frac{5}{6} T_n \text{ を活用して } T_n \text{ を求めると } T_n = 36 - 6(n+5) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \text{ よって}$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left\{ 36 - 6(n+5) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \right\} - \frac{n(n-1)}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 12 - 2(n+5) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2(n+5) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 12 \therefore E(X) = 12$$

解② (無限級数が絶対収束するとき, 項別微分が可能であることを利用)

$$\text{一般に, 無限級数 } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ は } |x| < 1 \text{ のとき絶対収束し, } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{この式の両辺を2階微分して } \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

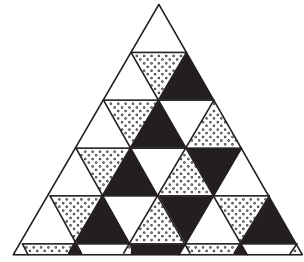
$$\text{さらに } x = \frac{5}{6} \text{ を代入すると } \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3} = 432$$

$$\text{よって } E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{432}{36} = 12$$

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $2023x + 374y = 17$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

問2 右図のように、同じ大きさの正三角形を並べて大きい正三角形を構築し、上から順番に 1 段目, 2 段目, 3 段目, ... と呼ぶことにして, 100 段目まで並べる。さらに, 右図のように, 各段の小三角形を左から白色, 灰色, 黒色の順に繰り返し塗り塗ることとする。このとき, 100 段目までの小三角形の総数と 100 段目までの白色の小三角形の個数を求めよ。



【解答】 問1 $2023x + 374y = 17$ の両辺を 17 で割ると, $119x + 22y = 1 \dots \textcircled{1}$

$$\text{ここで, } 119 = 22 \cdot 5 + 9 \quad 22 = 9 \cdot 2 + 4 \quad 9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$$\text{より, } 1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - (22 - 9 \cdot 2) \cdot 2 = 9 \cdot 5 - 22 \cdot 2 = (119 - 22 \cdot 5) \cdot 5 - 22 \cdot 2 = 119 \cdot 5 + 22 \cdot (-27)$$

$$\text{よって, } 119 \cdot 5 + 22 \cdot (-27) = 1$$

$$\text{であるから, } \textcircled{1} \text{ を満たす整数 } x, y \text{ の組の 1 つは, } (x, y) = (5, -27)$$

$$\text{すなわち, } 2023x + 374y = 17 \text{ を満たす整数 } x, y \text{ の組の 1 つは, } (x, y) = (5, -27) \dots \textcircled{\text{答}}$$

問2 1 段目, 2 段目, ... の小三角形の個数を並べた数列を $\{a_n\}$ とすると, 数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 2 の等差数列なので, その一般項は $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1 \dots \textcircled{2}$

$$100 \text{ 段目までの小三角形の総数は, } \sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{100} (2k-1) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1+199) = 10000 \dots \textcircled{\text{答}}$$

白色の小三角形の個数を求めるために 3 段ごとに分けて考える。 k が自然数とすると, $\textcircled{2}$ より,

$$\begin{cases} a_{3k-2} = 2(3k-2) - 1 = 6k-5 \\ a_{3k-1} = 2(3k-1) - 1 = 6k-3 \\ a_{3k} = 2 \cdot 3k - 1 = 6k-1 \end{cases}$$

1 段目, 2 段目, ... の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$\begin{cases} a_{3k-2} = 6k-5 = 3(2k-2) + 1 \\ a_{3k-1} = 6k-3 = 3(2k-1) \\ a_{3k} = 6k-1 = 3(2k-1) + 2 \end{cases} \quad \text{であるから,} \quad \begin{cases} b_{3k-2} = 2k-2 + 1 = 2k-1 \\ b_{3k-1} = 2k-1 \\ b_{3k} = 2k-1 + 1 = 2k \end{cases}$$

よって, 100 段目までの白色の小三角形の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{100} b_l &= \sum_{k=1}^{33} (b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k}) + b_{100} = \sum_{k=1}^{33} (6k-2) + b_{3 \cdot 34-2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (4+196) + 67 = 3300 + 67 = 3367 \dots \textcircled{\text{答}} \end{aligned}$$

【別解】 n 段目までの小三角形の総数は n^2 であるから, 100 段目までの小三角形の総数は $100^2 = 10000 \dots \textcircled{\text{答}}$

【別解】 1 段目, 2 段目, ... の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ として 100 段目まで並べると,

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, \dots, 63, 64, 65, 65, 66, 67$$

$$(1+2+3+\dots+67) + (1+3+\dots+65) = \frac{1}{2} \cdot 67 \cdot (67+1) + \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (1+65) = 2278 + 1089 = 3367 \dots \textcircled{\text{答}}$$

【別解】 1 段目, 2 段目, ... の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ として並べると,

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, \dots$$

$$3 \text{ 項ずつまとめて } \sum_{l=1}^{100} b_l \text{ を考えると, } \sum_{l=1}^{100} b_l = \sum_{l=1}^{99} b_l + b_{100} \text{ であり,}$$

$$\sum_{l=1}^{99} b_l = 4 + 10 + 16 + \dots + (6 \cdot 33 - 2) = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot (4 + 196) = 3300, \quad b_{100} = b_{99} + 1 = 2 \cdot 33 + 1 = 67$$

$$\text{したがって, } \sum_{l=1}^{100} b_l = 3300 + 67 = 3367 \dots \textcircled{\text{答}}$$

2 $f(x)=x^3+x^2$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f(x)$ の増減, 極値を調べ, $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

問2 $0 < a < 1$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ によって囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ。

問3 $0 < a < 1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

解答 問1 $f(x)=x^3+x^2$ より, $f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$

$f'(x)=0$ のとき, $x=-\frac{2}{3}, 0$ であるから, $f(x)$ の増減表は, 次のようになる。

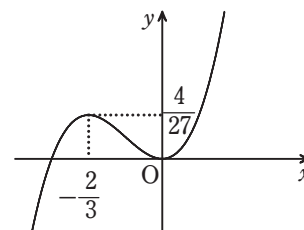
x	...	$-\frac{2}{3}$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}, f(0)=0 \text{ より,}$$

$f(x)$ は, $x=-\frac{2}{3}$ のとき, 極大値 $\frac{4}{27}$,

$x=0$ のとき, 極小値 0 をとる。

また, $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。…



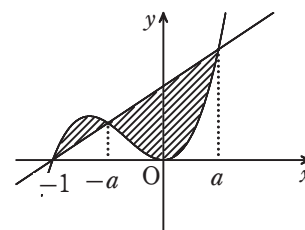
問2 曲線 $f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ との共有点の x 座標をもとめる。

$x^3+x^2=a^2(x+1)$ より, $(x+a)(x-a)(x+1)=0$ であるから,

$x=-1, \pm a$

ここで, $0 < a < 1$ より, $-1 < -a < 0 < a < 1$ であるから,

$S(a)$ は右図の斜線部分の面積となり,



$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_{-1}^{-a} \{x^3+x^2-a^2(x+1)\} dx + \int_{-a}^a \{a^2(x+1)-(x^3+x^2)\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_{-1}^{-a} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 + a^2x \right]_{-a}^a \\
 &= \left\{ \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^4 + a^3 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) \right\} \\
 &\quad + \left\{ \left(-\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^4 + a^3 \right) - \left(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^4 - a^3 \right) \right\} \\
 &= \left(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12} \right) + \left(-\frac{2}{3}a^3 + 2a^3 \right) \\
 &= -\frac{1}{4}a^4 + 2a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12} \quad \dots \text{}
 \end{aligned}$$

問3 問2より, $S'(a)=-a^3+6a^2-a=-a(a^2-6a+1)$

$S'(a)=0$ のとき, $0 < a < 1$ より, $a=3-2\sqrt{2}$

したがって, $0 < a < 1$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	$3-2\sqrt{2}$	...	1
$S'(a)$	/	-	0	+	/
$S(a)$	/	↘	最小	↗	/

以上より, $S(a)$ を最小にする a の値は $a=3-2\sqrt{2}$ …

1 関数 $y = x\sqrt{9-x^2}$ に対して、次の問いに答えよ。(50点)

問1 増減を調べてこの関数のグラフの概形をかけ。

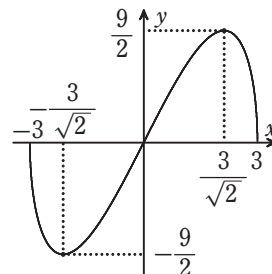
問2 この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ。

解答 問1 $9-x^2 \geq 0$ より、定義域は $-3 \leq x \leq 3$ である。

$$y' = \sqrt{9-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

より、増減表およびグラフの概形は次のようになる。

x	-3	...	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	...	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0



問2 図形は原点に関して対称なので、求める面積は、 $2 \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx = 2 \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 18 \dots$ 図

別解 $x = 3\sin\theta$ とすると、

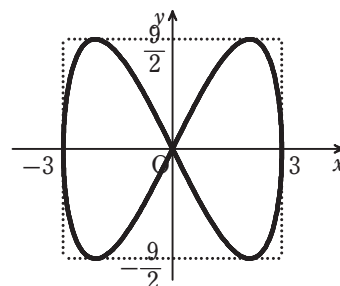
$$\begin{aligned} 2 \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\theta \sqrt{9-(3\sin\theta)^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin\theta |\cos\theta| dx = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta dx \\ &= -18 \left[\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{9}{2} (-1 - 1) = 18 \dots \text{図} \end{aligned}$$

参考 $x = 3\sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とすると

$$y = 3\sin\theta \sqrt{9-(3\sin\theta)^2} = 9\sin\theta \cos\theta = \frac{9}{2} \sin 2\theta$$

よって、この曲線はリサージュ曲線 $x = 3\sin\theta$, $y = \frac{9}{2} \sin 2\theta$

(右図) の $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の部分である。



2 $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とし, $f(x) = F(3x) - F(x)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f'(x)$ を求めよ。

問2 $x \geq 0$ の範囲で, $f(x)$ の最大値を求めよ。

【解答】 問1 $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $u=3x$ とすると $\frac{d}{dx}F(3x) = \frac{d}{du}F(u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$
 なので, $f'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}$ …

問2 $f'(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}$ より, $x \geq 0$ の範囲で, 増減表を書くと, 次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$

したがって, $x \geq 0$ の範囲で, $f(x)$ の最大値は, 次の積分で与えられる。

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F(\sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$$

ここで, $t = \tan \theta$ とおくと, $\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり,

$$t: \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{3} \text{ のとき, } \theta: \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \text{ より, } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \dots \text{$$

【参考】 $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ の逆関数 $y = \tan^{-1} x$ について

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ。

【証明】 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \tan y$

$$\text{両辺を } y \text{ で微分して } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\text{よって } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{すなわち } (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{だから} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\text{よって } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \left[\tan^{-1} t \right]_0^x = \tan^{-1} x - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} x \quad \text{だから}$$

$$f(x) = F(3x) - F(x) = \tan^{-1} 3x - \tan^{-1} x$$

これを用いると, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F\left(3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \dots \text{$$

3 自然数からなる2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定める。次の問いに答えよ。

(50点)

問1 すべての自然数 n に対して, a_n は奇数, b_n は偶数であることを示せ。

問2 すべての自然数 n に対して, $1+2+3+\dots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2}=1+3+5+\dots+(b_n-3)+(b_n-1)$ が成立することを示せ。

解答 問1 i) $n=1$ のとき, $a_1=3$, $b_1=2$ より a_n は奇数, b_n は偶数である

ii) $n=k$ のとき, a_k は奇数, b_k は偶数である。すなわち, a_k は奇数, b_k は偶数であると仮定すると,

$n=k+1$ のとき,

$$a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2} = (a_k + b_k\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 3a_k + 4b_k + (2a_k + 3b_k)\sqrt{2}$$

a_k, b_k は自然数で, $\sqrt{2}$ は無理数なので, $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$, $b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$

$a_{k+1} = 3a_k + 4b_k$ と, $3a_k$ は奇数, $4b_k$ は偶数であるから a_{k+1} は奇数

$b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ と, $2a_k$ は偶数, $3b_k$ は偶数であるから b_{k+1} は偶数

以上より, すべての自然数 n に対して, a_n は奇数, b_n は偶数である。…

$$\text{問2} \quad 1+2+3+\dots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n-1}{2} \cdot \frac{a_n+1}{2} = \frac{a_n^2-1}{8}$$

$$1+3+5+\dots+(b_n-3)+(b_n-1) = \frac{b_n^2}{4}$$

なので, $\frac{a_n^2-1}{8} = \frac{b_n^2}{4}$ すなわち $a_n^2-1=2b_n^2 \dots \textcircled{1}$ を示せばいい。

i) $n=1$ のとき, (左辺) $=a_1^2-1=9-1=8$, (右辺) $=2b_1^2=2 \cdot 4=8$ より $\textcircled{1}$ は成り立つ。

ii) $n=k$ のとき, $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると, $a_k^2-1=2b_k^2$

$n=k+1$ のとき,

$$(\text{左辺}) = a_{k+1}^2-1 = (3a_k+4b_k)^2-1 = 9a_k^2+24a_kb_k+16b_k^2-1$$

$$(\text{右辺}) = 2b_{k+1}^2 = 2(2a_k+3b_k)^2 = 8a_k^2+24a_kb_k+18b_k^2$$

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = a_k^2-2b_k^2-1=0$$

より, $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上より, すべての自然数 n に対して,

$$1+2+3+\dots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2} = 1+3+5+\dots+(b_n-3)+(b_n-1) \text{ が成立する。} \dots \textcircled{QED}$$

参考

p, q を有理数として $p+q\sqrt{2}$ の共役 $\overline{p+q\sqrt{2}}$ を $\overline{p+q\sqrt{2}} = p-q\sqrt{2}$ と定義する。

(※ $p+q\sqrt{2}$ と $p-q\sqrt{2}$ は, 有理数体 Q の拡大体 $Q(\sqrt{2})$ 上の共役元である。)

このとき, 有理数 p, q, r, s に対して

$$\overline{(p+q\sqrt{2})(r+s\sqrt{2})} = \overline{p+q\sqrt{2}} \cdot \overline{r+s\sqrt{2}}$$

が成り立つ。

$$\text{証明) } \overline{(p+q\sqrt{2})(r+s\sqrt{2})} = \overline{(pr+2qs)+(ps+qr)\sqrt{2}}$$

$$= \overline{(pr+2qs)-(ps+qr)\sqrt{2}}$$

$$= (p-q\sqrt{2})(r-s\sqrt{2})$$

$$= \overline{p+q\sqrt{2}} \cdot \overline{r+s\sqrt{2}}$$

これにより $(3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2})^n = (3-2\sqrt{2})^n$ が成り立つから、

$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ の両辺の共役をとれば $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が得られる。

また、積 $(a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2})$ を計算すると

$$\begin{aligned}(a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) &= (3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n \\ &= \{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^n = 1\end{aligned}$$

すなわち $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ であるから、これにより問2で示したい等式 $a_n^2 - 1 = 2b_n^2$ が得られる。

参考 a_n, b_n は以下のように求められる。問1より、 $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ であるから、

$$a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} = 3a_n + 4b_n - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})a_n + (4-3\sqrt{2})b_n = (a_n - b_n\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$$

$a_1 = 3, b_1 = 2$ より、数列 $\{a_n - b_n\sqrt{2}\}$ は、初項 $3-2\sqrt{2}$ 、公比 $3-2\sqrt{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - b_n\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^n \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{これと、問題より、} \quad a_n + b_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) \div 2 \text{ より、} \quad a_n = \frac{1}{2} \{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\}$$

$$(\textcircled{2} - \textcircled{1}) \div 2\sqrt{2} \text{ より、} \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\}$$

参考 線形代数の行列の対角化を利用して、 a_n, b_n は以下のように求めることができる。

$$\text{問1より、} \quad a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \text{ であるから、} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ とおくと、} \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A の固有値を λ として、 $|A - \lambda E| = 0$ を解くと、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 2 \cdot 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1 \quad \text{より、} \quad \lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\lambda_1 = 3+2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3-2\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とすると、

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を解くと、} \quad x = \sqrt{2}y \text{ であるから、} \quad y = c_1 \text{ とおくと } \mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 4 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ を解くと、} \quad x = -\sqrt{2}y \text{ であるから、} \quad y = c_2 \text{ とおくと } \mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると、} \quad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} 1 & -(-\sqrt{2}) \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ であり、}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 8+6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -8+6\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と対角化できた。 $A = P \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned}A^n &= P \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (3+2\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3+2\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\} & 2\{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\} \\ (3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n & \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{したがって, } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})^{n-1}\} & 2\{(3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1}\} \\ (3+2\sqrt{2})^{n-1} - (3-2\sqrt{2})^{n-1} & \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})^{n-1}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (3\sqrt{2}+4)(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3\sqrt{2}-4)(3-2\sqrt{2})^{n-1} \\ (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1} + (3-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^n + \sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^n \\ (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \end{pmatrix} \\
\text{以上より, } a_n &= \frac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\}, \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\}
\end{aligned}$$

- 4 赤球が1個、白球が2個入った袋から球を1個取り出して、その色を見てから袋に戻すという試行を、白球が2回続けて出るまで行う。 n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を p_n 、 n 回目に赤球を取り出す確率を q_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

- 問1 p_{n+1} , q_{n+1} を, p_n , q_n を用いて表せ。
 問2 $a_n = p_n - q_n$ とするとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 問3 $b_n = (-3)^n p_n$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
 問4 $n+1$ 回目で試行が終わる確率を求めよ。

【解答】 問1 p_{n+1} は, 「 n 回目に赤球を取り出し, $n+1$ 回目に白球を取り出す」確率なので, $p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n$ ……

q_{n+1} は, 「 n 回目に赤球を取り出し, $n+1$ 回目に赤球を取り出す」または「 n 回目に白球を取り出し, $n+1$ 回目に赤球を取り出す」確率なので, $q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{3}(p_n + q_n)$ ……

問2 問1より, $a_{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n - \frac{1}{3}(p_n + q_n) = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) = -\frac{1}{3}a_n$

また, $a_1 = p_1 - q_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ なので, 数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列なので

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ……

問3 問1, 問2より, $p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}(p_n - a_n) = \frac{2}{3}p_n - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

両辺に $(-3)^{n+1}$ をかけると, $(-3)^{n+1}p_{n+1} = -2 \cdot (-3)^n p_n - 2$

$b_n = (-3)^n p_n$ より, $b_{n+1} = -2b_n - 2$ これを変形すると, $b_{n+1} + \frac{2}{3} = -2\left(b_n + \frac{2}{3}\right)$

となるので, 数列 $\left\{b_n + \frac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1 + \frac{2}{3} = -3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$, 公比 -2 の等比数列なので

$b_n + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}(-2)^{n-1} = \frac{2}{3}(-2)^n$ より, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}$ ……

【参考】 特性方程式 $c = -2c - 2$ を解くと $c = -\frac{2}{3}$ であるから, $b_{n+1} + \frac{2}{3} = -2\left(b_n + \frac{2}{3}\right)$ と変形できる。

問4 $n+1$ 回目で試行が終わる確率は, 「 n 回目に白球を取り出し, $n+1$ 回目に白球を取り出す」確率なので, 求める確率は, $\frac{2}{3}p_n$ である。

問3より, $b_n = \frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}$ であるから, $(-3)^n p_n = \frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}$ より, $p_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

以上より, 求める確率は $\frac{2}{3}p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ……

第 77 回九州算数・数学教育研究（熊本）大会発表論文

発表論文

阿嘉 博之 先生（美里高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 29

研究主題 『数学的活動を円滑に進めるための授業の工夫』

副 第 ～「三角比」における Quizizz と思考ツールの活用を通して～

小松 真澄 先生（本部高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 30

研究主題 『自ら考える力を育む「データの分析」の授業づくり』

副 題 ～PPDACサイクルを活用した教科等横断的な取り組みを通して（第2学年）～

田中 千大 先生（読谷高校）・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 31

研究主題 『知識を活用する力と数学的な表現を用いて説明する力を育む協同学習の授業づくり』

副 題 ～反転学習とジグソー法の手法を用いた学習活動を通して～

～「三角比」における Quizizz と思考ツールの活用を通して～

沖縄県立美里高等学校 阿嘉 博之

1 はじめに

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）では、「数学的活動とは、『事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること』である」とし、大きく 2 つの過程に分けている。

ここでは、図1の右側の【数学の世界】に着目する。A2は「数学化する」過程、BCは「見通しを立て、論理的に推論する」過程、D2は「統合的・発展的に考え、体系的に組み立てていく」過程と示されている。

生徒がそれぞれもっている数学的活動の過程にある困難さを減らすために、各過程に対して手立てを講じる。

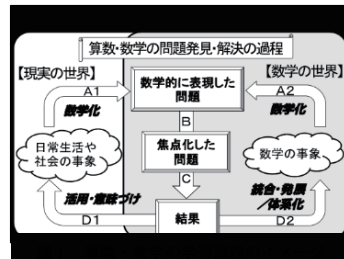
2 研究の目的と方法

数学的活動の過程で生徒がそれぞれもっている困難さが減り、数学的活動のサイクルを進めやすくなったとき、生徒が数学的活動を円滑に進めることができるようになったととらえる。過程A2には「Quizizz」で、過程BCには「三角ブロック」で手立てを講じる。また、過程D2にはQuizizzと「コンセプトマップ」で手立てを講じる。

先行研究にならって、これまでの4回の定期考査の総合得点に基づいて、生徒を平均値以上の上位群とそれ未満の下位群に区分した。上位群と下位群に分け、上記の工夫に効果があったのかどうかを、文章問題の解答の過程、数学的活動に関するアンケートの検証前後の変化、検証後に行う無記名の自由記述アンケートの内容、ワークシートや振り返りシートの記述や描画の内容から、生徒が数学的活動を円滑に進められたか、工夫に対して有用感が得られたかどうかを見とる。

3 実践の概要

授業の導入の場面では、Quizizz を活用して復習問題に取り組む学習活動を設定した(図2)。復習問題を解き終えた後に、Quizizz のレポートを活用し、復習問題の正解率を生徒ごとに確認した。これにより、生徒の既習事項の定着を個別に確認し、正解率の低い生徒に声掛けを行うことができた。



授業の展開の場面では、見通しと論理的な推論を組み立てるために、生徒に発問しながら三角ブロックを完成させた(図3)。

授業のまとめの場面では、完成させた三角ブロックを単純化するミニミニ三角ブロックを描く学習活動を設定した(図4)。これにより、コンセプトマップを描くことにつなげる(図5)。このコンセプトマップで、既習事項のつながりを可視化した。

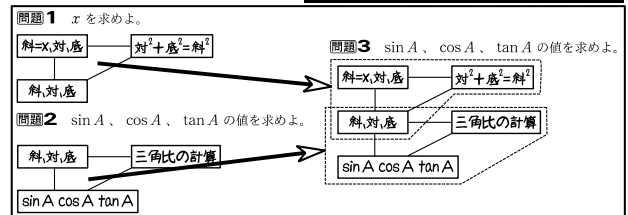
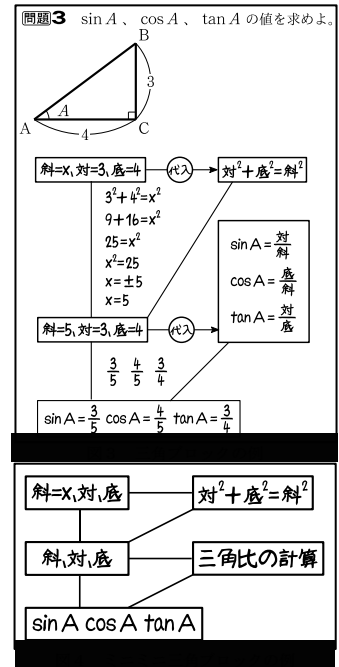


図5 コンセプトマップの例

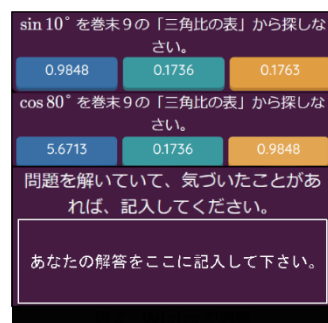
4 まとめ

上位群に、Quizizz と思考ツールの手立てを講じるこ
とにより、文章問題の解答の過程において、数学的活動
の過程 A 2、過程 B C への効果が見られた。また、アン
ケートから、Quizizz、三角ブロック、ミニミニ三角ブ
ロックとコンセプトマップの有用感を得ている様子が見ら
れた。下位群に、アンケートから、Quizizz、三角ブロッ
クの有用感を得ている様子が見られた。

5 課題

見通しと論理的な推論を、計算の実行過程に繋げることができない生徒への手立てが必要である。計算は反復学習が効果的なので、Quizizz を活用することが手立てになると考える。

また、コンセプトマップを描く頻度が多すぎると、生徒が有用感を得づらくなるおそれがある。コンセプトマップを描く活動を、節や章の終わり、テスト前などに設定するなど、学習計画の工夫が必要である。また、ワークシートや振り返りシートの工夫も必要であると考える。



1 はじめに

高等学校学習指導要領（平成30年告示）で、「数学的な見方・考え方」は「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること」と示されている。また、2022年度大学入学共通テストにおいては、「データの分析」の単元から10ページにもわたって出題された。そのため高校生にとって自ら考え課題を見つけ、多くの情報を分析し、解決していく力が強く求められていると感じた。

そこで本研究では、数学Ⅰの「データの分析」における分析力の深化に注目する。この数学的なアプローチから他教科における学習内容の深い理解に繋げ、それが、ある物事に対して生徒自らが考えていくための手段を身につけるきっかけになるのではないかと考え、本テーマを設定した。

2 研究の方法

本研究の対象クラスは2学年の情報コースの生徒12人である。生徒の多くは普段から読解力や語彙力が弱く、課題に対して自ら考えようとする意識が低く学習に取り組む意識が弱い様子も見られる。

そこで本

表1 PPDACサイクル

研究では、 課題解決の 手段として 統計的探究 プロセスで あるPPD AC（P：問	P	問題 (Problem)	・問題の把握 ・問題設定
	P	計画 (Plan)	・データの想定 ・収集計画
	D	収集 (Data)	・データの収集 ・表への整理
	A	分析 (Analysis)	・グラフの作成 ・特徴や傾向の把握
	C	結論 (Conclusion)	・結論付け ・振り返り

題の把握と明確化、P：仮説の設定・計画、D：データの収集・整理、A：分析、C：結果から考察・結論）サイクル（表1）を活用していく。これにより、身近な事柄から教師が問題を提起し、生徒が分析方法・手段を計画して、ICT機器の利用やグループ学習を通してデータを収集・分析を行い、そこから得られた結論を発表することで、論理的に考えた思考の過程を評価する。その際、生徒の興味・関心を促すことができる教材等を扱い、生徒の実態に合わせて授業を進めていく。

3 実践の概要

PPDACサイクルの「D」と「A」で必要となるグラフや図などについて復習したのち、このサイクルを活用した授業を基礎編と応用編に分けて実施した。

基礎編では、総務省政策統括官編集「生徒のための統

計活用～基礎編～」を参考にして授業計画を立てた。「政府統計の総合窓口（e-Stat）」等の公的統計から、社会の実態を把握するためのデータを活用し、身近な事柄や生活に即した内容を扱うことで、生徒の興味・関心を促しながらPPDACサイクルの具体的な活用方法を学習した。また、このサイクルを複数回繰り返すことで、より事象に対する考察を深めることができると示した。

応用編ではPPDACサイクルを活用した教科等横断的な取り組みについての授業実践を行った。6月に本校で行った総合的な探究の時間における平和学習会で取り組んだ「復帰の後に残った課題」について、具体的な課題の解決策をこのサイクルを活用して考察した。また、美術科職員の協力を得て「魂を込めた絵」や地歴・公民科職員と連携し「現代社会」と「基本数学」で行ったNIE実践の授業を通して、このサイクルを活用し、生徒は自分の考えを深め、個人ないしはグループで得られた結論を発表した。

最後の取り組みとして、「本部高校の活性化」について2チームに分かれ、それぞれ「定員割れの原因」に注目し、仮説を設定した。そして、このサイクルを活用して定員割れに対するよりよい改善策を競う形で検証し、発表した。

4 まとめと課題

PPDACサイクルを活用する上で、最も苦慮したことは課題の設定である。問題から計画やデータの収集等に繋がる課題・仮説を設定するためにロジックツリーの利用や、ワークシートの工夫など生徒の実態に合わせて、授業改善を図った。

検証授業を終えて、生徒の授業振り返りシート等より、「考える力が身についた」や「問題に対してすぐに答えを出さず、一度過程を考えてから解決するようになった」、「データや結果があると人を納得させやすい」、「教科等横断的な取り組みは面白かった」そして「これからも活用したい」という生徒の感想を得られた。また、学習活動やワークシートの記述等からも、生徒の「自ら考える力」が育まれた様子が見られた。それと同時に「自ら考えようとする」生徒の変容にも大きな成果を感じられた。

課題としては、本研究では教師が問題提起をしたが、生徒自身が問題提起することや、教科等横断的な取り組みをさらに行うこと、そして、生徒への声掛けや発問に対する工夫を行い、一層生徒の「自ら考える力」を育むことができるよう研鑽を積んでいきたい。

1 はじめに

本校は創立 73 年目を迎える生徒数約 950 名（各学年普通科 8 クラス）の全日制高校である。生徒の進学意識は高く、卒業生の多くが上級学校へと進学している。

『読高生はダイヤモンドの原石だ』をキャッチフレーズに、学校行事や部活動に一生懸命取り組む生徒が多い。

2 主題設定の理由

高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編理数編では、客観的かつ論理的に自分の考えなどを説明する力や、問題がすぐには解けなくても粘り強く考えることの必要性が示されている。

昨年度、本校 2 学年の生徒を対象に行ったアンケートでは、自分の考えを表現することに自信がない生徒や、数学の問題を解く上で解法を暗記して正解できるようになることを重視している生徒が多いことが分かった。これまでの私自身の授業を振り返ってみても、3 観点をバランス良く高めることの重要性を理解しながらも、知識及び技能の習得にやや重きを置いてきたように感じる。知識及び技能の定着を図りつつ、思考力、判断力、表現力等を高めるような実践に磨きをかけることは、次代を担う生徒の育成や自身の授業力の向上を目指す上でも非常に意味のあることだと考える。

そこで本研究では、反転学習とジグソー法の手法を用いて協調学習の授業づくりを行うことにより、生徒は既有知識を活用したり、自分の考えを数学的な表現を用いて説明したりする力を高めることができるのではないかと考え、本主題を設定した。

3 研究方法

ジグソー法の一連の活動（下記①～⑥）の中に、反転授業の手法を取り入れることにより、50 分の授業で完結することを目指した。具体的には、教師が作成したエキスパート活動の各部品に関する説明用動画を、生徒が事前視聴（予習）してくることとした。

- ①主課題の提示と役割分担
- ②事前学習動画の視聴
- ③エキスパート活動
- ④ジグソー活動
- ⑤活用テストまたは表現課題（解説動画作成）
- ⑥全体共有
- [取り組む場面]
- ①前時の終わり ②自学学習（予習） ③～⑥本時

4 研究の実際

ジグソー法は優れた授業法であるが、授業準備における教師の負担が大きいという側面がある。そのため、本研究においては、単元を通して全ての授業でこの形式の授業を行うのではなく、以下（1）～（3）のように単元の終盤や章末問題の学習時、模擬試験に向けた学習時等の場面で行った。

（1）知識を活用する力を高める取組

複数の知識及び技能が必要な教科書の例題等を課題に設定し、エキスパート活動とジグソー活動を行った。その後、同様の解法を用いて解くことができる初見の問題で小テストを行い、知識を活用する力の育成を図った。小テスト実施後は、ロイロノートを活用して、各自の答案の記述内容について全体で共有を図った。

（2）表現力を高める取組

模擬試験の過去問等を課題に設定し、ジグソー法形式の演習を行った後、生徒がホームグループで協力して解説動画を作成する取り組みを行った。各グループから提出された動画は、Teams 等で生徒が視聴できるようにして、自主学習への活用を促した。

（3）複数の解法を比較検討する取組

複数の解法が存在する教科書の章末問題等を課題に設定し、ジグソー法形式の演習を行った。各々の解法の良さについて議論させ、どちらの解法が優れているのかについてホームグループごとに発表させ、全体で共有を図った。

5 まとめと今後の課題

数年前から反転授業やジグソー法の手法を取り入れた授業に挑戦し、工夫改善を重ねてきた。生徒達から「説明が得意になった」や「理解が深まった」といった感想をもらう度に効果を実感する一方で、果たして深い学びにつながる授業になっているだろうかと思問自答を繰り返し続けている。授業法はあくまで学習活動の一手段に過ぎないという意識を念頭に置き、これからも対話を通じて深い学びを引き出すことができるような授業づくりや授業改善に努めていきたい。

〈参考文献〉

- ・東京大学 CoREF 2021 『協調学習 授業デザインハンドブック 第3版』
- ・酒井淳平 2022 『高等学校新学習指導要領 数学の授業づくり』 明治図書

九数教大会開催地一覧

年度	回	開催地	年度	回	開催地
昭和22	1	熊本市	61	40	武雄市
23	2	別府市	62	41	福岡市（日数教全国大会）
24	3	宮崎市	63	42	佐世保市
25	4	佐賀市	平成元	43	鹿児島市
26	5	福岡市（日数教全国大会）	2	44	熊本市
27	6	長崎市	3	45	浦添市・西原町
28	7	鹿児島市	4	46	大分市
29	8	別府市	5	47	宮崎市
30	9	熊本市	6	48	唐津市
31	10	宮崎市	7	49	北九州市
32	11	佐賀市	8	50	長崎市（日数教全国大会）
33	12	福岡市	9	51	鹿児島市
34	13	佐世保市	10	52	熊本市
35	14	鹿児島市	11	53	浦添市・那覇市
36	15	熊本市	12	54	大分市
37	16	別府市	13	55	宮崎市
38	17	宮崎市	14	56	佐賀市
39	18	武雄市	15	57	福岡市
40	19	北九州市	16	58	鹿児島市（日数教全国大会）
41	20	長崎市	17	59	佐世保市
42	21	鹿児島市	18	60	熊本市
43	22	大分市	19	61	宜野湾市・那覇市
44	23	熊本市（日数教全国大会）	20	62	大分市
45	24	宮崎市	21	63	宮崎市
46	25	唐津市	22	64	佐賀市
47	26	福岡市（日数教全国大会）	23	65	長崎市
48	27	佐世保市	24	66	北九州市（日数教全国大会）
49	28	鹿児島市	25	67	鹿児島市
50	29	熊本市	26	68	熊本市
51	30	那覇市	27	69	浦添市・那覇市・西原町
52	31	大分市	28	70	大分市
53	32	宮崎市（日数教全国大会）	29	71	宮崎市
54	33	佐賀市	30	72	佐賀県武雄市
55	34	北九州市	令和元	73	那覇市・宜野湾市（日数教全国大会）
56	35	長崎市	2	74	福岡市（中止）
57	36	鹿児島市	3	75	佐世保市（中止）
58	37	熊本市	4	76	鹿児島
59	38	大分市	5	77	熊本市
60	39	宮崎市			