第32回

高校数学教育を考える会

(琉球大学数理科学科との懇談会)

2008年5月16(金)　4:00〜5:00

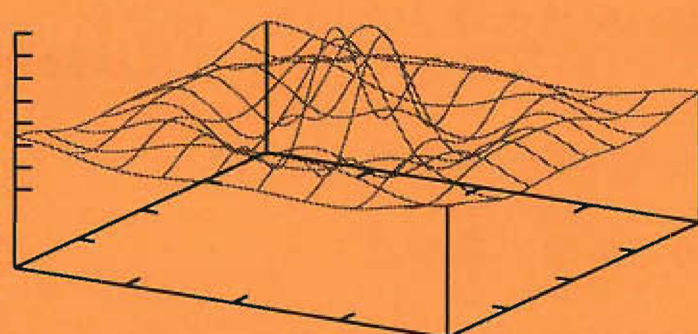


図 1: $z = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

場所：那覇高等学校（視聴覚教室）

沖縄県高等学校数学教育会

目　次

平成２０年度入学試験問題(前期日程)
数学甲(数Ｉ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ・数Ｃ)

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}$ は, $A^2=O$ を満たす。ただし, O は零行列である。 (50 点)

問 1　a の値を求めよ。

問 2　$B=2E+A$ とおく。ただし, E は単位行列である。自然数 n に対して, B^n を求めよ。

数学C（行列）：標準

Q　問1について，殆ど出来ていたのではないでしょうか？

Q　問2について，どういう解法が多かったでしょうか？
また，二項定理を用いた解答の割合はどのくらいでしょうか？

Q　問2について，計算ミスの解答が多かったのではないでしょうか？

Q　問1，問2の正答率はどのくらいでしょうか？

$\boxed{2}$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される曲線を C とする。(50 点)

問 1　曲線 C の凹凸を調べ，その概形を図示せよ。

問 2　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$　$(0<a<1)$ における接線 ℓ の x 切片，y 切片をそれぞれ a を用いて表せ。

問 3　問 2 において点 P が曲線 C 上を動くとき，P における接線 ℓ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積の最大値を求めよ。

数学Ⅲ（微分法の応用）：標準

Q　問 1 について，x 軸，y 軸との交わり方を概形として考慮したのでしょうか？

Q　小問の配点はどのくらいでしょうか？

Q　問 1 ～問 3 の正答率はどのくらいでしょうか？

$\boxed{3}$ Oを原点とする空間内にn個の点$P_k\left(\dfrac{k}{n}, 2-\dfrac{k}{n}, 0\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$をとる。また，z軸上に点Q_kを，線分P_kQ_kの長さが2になるようにとる。ただし，Q_kのz座標は正とする。(50点)

問1 三角形OP_kP_{k+1}の面積を求めよ。ただし，$1 \leqq k \leqq n-1$とする。

問2 三角錐$OP_kP_{k+1}Q_k$の体積V_kを求めよ。ただし，$1 \leqq k \leqq n-1$とする。

問3 $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$とおくとき，$I$を定積分を用いて表せ。ただし，$V_0=0$とする。

問4 Iの値を求めよ。

数学Ⅲ（区分求積法）：標準

Q 問1の三角形の面積の求め方には，どのようなパターンがありましたか？

Q kの範囲がまちまちなので生徒に戸惑いはなかったでしょうか？

Q 問3と問4の正答率に違いはありましたか？

4 r を 9 以上の整数として，赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある。この袋から 9 個の球を同時に取り出し，そのうちの赤球の個数を調べ，取り出した球に白球を 1 個加えて袋に戻すという試行を繰り返す。つまり，1 回の試行ごとに袋の中の白球が 1 個ずつ増えることになる。n 回目の試行において取り出された 9 個の球のうち，赤球がちょうど 4 個である確率を P_n で表す。(50 点)

問 1　$P_1 < P_2$ が成り立つことを示せ。

問 2　$P_n < P_{n+1}$ が成り立つための n の範囲を r を用いて表せ。

問 3　$r = 50$ のとき，P_n が最大となる n の値を求めよ。

数学A（確率）：やや難

Q　問 2 は計算力が問われたと思いますが，きちんと最後まで解答した答案はありましたか？

Q　問 1～問 3 の正答率はどのくらいでしょうか？

平成２０年度入学試験問題(前期日程)
数学乙(数Ｉ・数II・数Ａ・数Ｂ)

1 次の問に答えよ。(50 点)

問 1　次の方程式を解け。ただし，i は虚数単位，x は実数とする。

$$(1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$$

問 2　次の方程式を解け。

$$\log_4(4x-7)+\log_2 x=1+3\log_4(x-1)$$

問 3　3 点 O$(0,0)$, A$(t,0)$, B$(0,1-t)$　$(0<t<1)$ を頂点とする三角形 OAB を，x 軸の周りに回転させてできる立体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

数学II（小問集合）：基本

Q　問 1 を解の公式で解いた生徒はいましたか？

Q　問 2 の真数条件の処理はきちんとできていましたか？

Q　問 1～問 3 の正答率はどのくらいでしょうか.

Q　小問の配点はどれくらいでしょうか？

$\boxed{2}$ △ABCは，$\tan A = \dfrac{4}{3}$，$BC = 6$を満たしているものとする。ただし，$A = \angle BAC$とする。(50点)

問1　$\sin A$および$\cos A$の値をそれぞれ求めよ。

問2　△ABCの外接円の半径を求めよ。

問3　△ABCの面積の最大値と，そのときの辺ABの長さを求めよ。

数学Ⅰ（三角比）：標準

Q　問3ではどのような解法がありましたか？

Q　問3で「図より，高さが最大のとき面積が最大だから …」との解答は正解でしょうか？

Q　問1～問3の正答率はどのくらいでしょうか.

【前期入試全体について】

〇全問流れがスムーズで，抵抗無く問題に取り組めたと思います。

Q　数学甲の問題では医学科・数理学科で得点に差はついたのでしょうか？

Q　数学甲の問題について，医学科合格者の得点率はどれくらいでしょうか？

Q　数学甲，数学乙について，満点はどれくらいいましたか？

平成２０年度入学試験問題(後期日程)
数学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

1 曲線 $y=(x+1)^3$ で表される曲線を C とし，C 上の点 A$(-2, -1)$ における接線を ℓ とする。(50 点)

問 1　曲線 C と接線 ℓ の共有点で，A 以外のものを B とする。B の座標を求めよ。

問 2　点 P が曲線 C 上を A から B まで移動するとき，点 P と接線 ℓ との距離が最大となる点 P の x 座標と，そのときの距離を求めよ。

数学Ⅱ（微分法と積分法）: 基本

Q　「点 P における接線と ℓ が平行のとき，点 P と接線 ℓ の距離が最大となる …」とした直感的な解答と三次関数として距離の最大値を求めるやり方はどちらが多かったでしょうか？

Q　問 1，問 2 の正答率はどのくらいでしょうか？

Q　小問の配点について，それぞれ 25 点と考えていいでしょうか？

$\boxed{2}$ $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2S_n + 4S_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。
ただし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(n \geqq 1)$ で，$S_0 = 0$ である。　(50点)

問1　a_2, a_3, a_4 を求めよ。

問2　a_{n+2} を a_{n+1} と a_n の式で表せ。

問3　$b_n = a_{n+1} + a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求め，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問4　$c_n = a_{n+1} - 4a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の満たす漸化式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

問5　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

数学B（数列）：基本

Q　問題文の表現「$S_0 = 0$ である。」よりは,「$S_0 = 0$ とする。」とした方が自然ではないでしょうか？

Q　問3，問4の正答率は高かったのではないでしょうか？

$\boxed{3}$ 次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　不定積分 $\displaystyle\int xe^x\,dx$ を求めよ。

問 2　不定積分 $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ を求めよ。

問 3　$y=e^x$ で表される曲線を C とし，C 上の点 $(2,\,e^2)$ における接線を ℓ とする。C と ℓ および y 軸によって囲まれた図形を y 軸の周りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

数学Ⅲ（積分法）：標準

Q　問 1 〜問 3 の正答率はどのくらいでしょうか？

Q　小問の配点はどのくらいでしょうか？

$\boxed{4}$ 平面上で $|x+y|-|x-y| \geqq 1$ の表す領域を D とする。 (50点)

問1　領域 D を図示せよ。

問2　連立方程式 $|x+y|-|x-y| \geqq 1,\ x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域の面積を求めよ。

数学Ⅱ（図形と方程式）：標準

Q　問1の正答率はどのくらいでしょうか？図示はきちんと出来ていたでしょうか？

Q　問2の正答率は低かったのではないでしょうか？

●後期入試全体について

○　昨年と比べると易しくなっていると思うのですが，その意図があればお聞かせ下さい。

○　数学Ⅲの問題が $\boxed{3}$ だけと少ないのではないでしょうか？

Q　合格者の最高点・最低点はどのくらいでしょうか？

●その他

Q　採点して何か気付いた点はありますか？

○　今年も受験生に分かりやすい解答例を作って頂きありがとうございます.
また，来年も継続して作成下さいますようお願い致します。

Q　教科指導について，高校側への要望（特に指導を強化してほしい点等)があれば具体的にお願いします。

$\boxed{1}$

解答

問1

$A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}$ において

$$A^2-\{a+(a-4)\}A+\{a(a-4)-2a(a-3)\}E=O \quad (\text{Hamilton-Cayleyの定理})$$

すなわち

$$A^2=2(a-2)A+a(a-2)E=(a-2)(2A+aE)$$

が成り立つ.

ここで，$A^2=O$ より，$a=2$ または $A=-\dfrac{a}{2}E$ である.

$A=-\dfrac{a}{2}E$ とすると，$\begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}=-\dfrac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり，これを満たす a は存在しない.

$$\therefore\ a=2$$

問2

$B=2E+A$ より

$$B^n=(2E+A)^n$$

$$=(2E)^n+{}_nC_1(2E)^{n-1}A+{}_nC_2(2E)^{n-2}A^2+\cdots+{}_nC_k(2E)^{n-k}A^k+\cdots+A^n$$

であり，$k\geqq 2$ のとき $A^k=O$ であるから

$$B^n=2^nE+n\cdot 2^{n-1}A$$

$$=2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+n\cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (n+1)\cdot 2^n & n\cdot 2^{n+1} \\ -n\cdot 2^{n-1} & -(n-1)\cdot 2^n \end{pmatrix}$$ 答

$\boxed{2}$

解答

問1　C: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より，$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ である．

また，$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ より，$y=(1-\sqrt{x})^2$

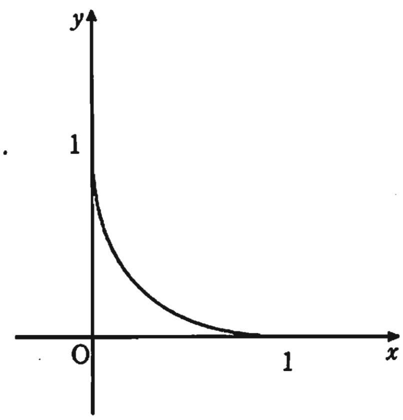
よって

$$y'=2(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\leqq 0\ (\because 0\leqq x\leqq 1)$$

$$y''=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2x\sqrt{x}}>0\ (\because 0\leqq x\leqq 1)$$

であるから，増減表より，C は下に凸で，右下がりのグラフである．

x	0	$\cdots$	1
y'	$-$	$-$	0
y''	$\times$	$+$	$+$
y	1	↘	0



問2　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-b=\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}(x-a)$$

であり，$b=(1-\sqrt{a})^2$ であるから

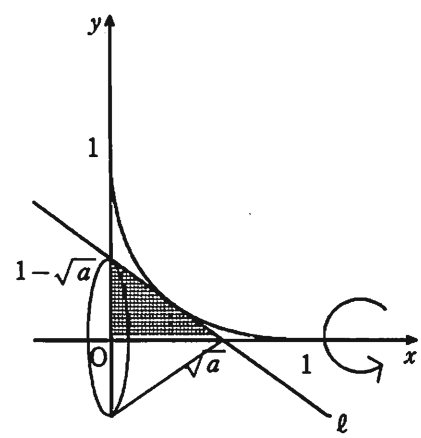
$$y-(1-\sqrt{a})^2=\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}(x-a)$$

この方程式において，

$y=0$ とすると，$x=\sqrt{a}$

$x=0$ とすると，$y=1-\sqrt{a}$

すなわち，x 切片は $\sqrt{a}$ ，y 切片は $1-\sqrt{a}$ である．



問3　題意の立体は，底面の半径が $1-\sqrt{a}$ ，高さが $\sqrt{a}$ の円錐であるから，その体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi(1-\sqrt{a})^2\sqrt{a}$$

ここで，$f(a)=(1-\sqrt{a})^2\sqrt{a}$ とすると

$$f'(a)=\left(a^{\frac{1}{2}}-2a+a^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{a}}-2+\frac{3}{2}\sqrt{a}=\frac{1-4\sqrt{a}+3a}{2\sqrt{a}}=\frac{(3\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)}{2\sqrt{a}}$$

よって，$0<a<1$ における $f(a)$ の増減表より

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{9}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	極大	↘	

V は，$x=\frac{1}{9}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{3}f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{81}\pi$ をとる．　**答**

$\boxed{3}$

解答

問1　点 $P_0(0,\ 2,\ 0)$ とする.

条件より，n 個の線分 P_0P_1，P_1P_2，…，P_kP_{k+1}，…，$P_{n-1}P_n$ の長さは等しい.

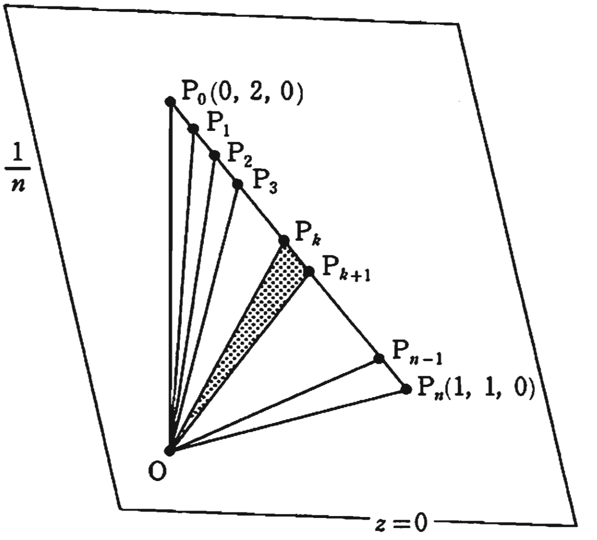
すなわち，$P_0P_1=P_1P_2=\cdots=P_kP_{k+1}=\cdots=P_{n-1}P_n$ であるから

$$\triangle OP_0P_1=\triangle OP_1P_2=\cdots=\triangle OP_kP_{k+1}=\cdots=\triangle OP_{n-1}P_n$$

である.

よって，$n\cdot(\triangle OP_kP_{k+1})=\triangle OP_0P_n$ が成り立つから

$$\triangle OP_kP_{k+1}=\frac{1}{n}\cdot(\triangle OP_0P_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot1=\frac{1}{n}$$



問2　$V_k=\dfrac{1}{3}\cdot(\triangle OP_kP_{k+1})\cdot OQ_k$ である.

また，直角三角形 OP_kQ_k であるから，

$P_kQ_k{}^2=OP_k{}^2+OQ_k{}^2$ が成り立つ.

$P_kQ_k=2$ より

$$2^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(2-\frac{k}{n}\right)^2+OQ_k{}^2$$

よって

$$OQ_k=\sqrt{2^2-\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(2-\frac{k}{n}\right)^2\right\}}=\sqrt{2\cdot\frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)}$$

であるから

$$V_k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{2k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)}$$

問3　$I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\,dx$

問4　$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

ここで，$x-1=\cos\theta$ とすると，$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$，

x	$0\to1$
θ	$\pi\to\frac{\pi}{2}$

であるから

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(-\sin^2\theta)\,d\theta\left(\because\ \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi \text{ のとき } \sin\theta\geqq0\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

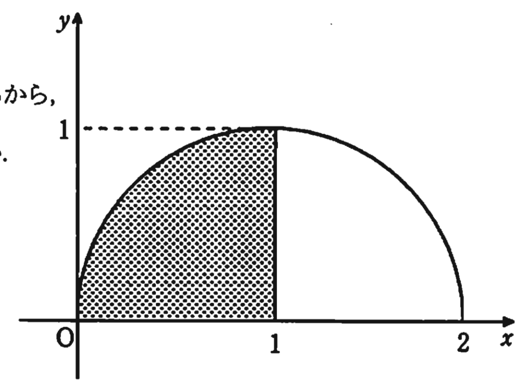
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$ 答

別解

$y=\sqrt{x(2-x)}$ とすると，$(x-1)^2+y^2=1$ $(y\geqq0)$ であるから，

$\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\,dx$ は半径が1である円の面積の $\frac{1}{4}$ に等しい．

$$\therefore\ I=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$



$\boxed{4}$

解答

問1　$P_1=\dfrac{{}_rC_4\cdot{}_{10}C_5}{{}_{r+10}C_9}$，$P_2=\dfrac{{}_rC_4\cdot{}_{11}C_5}{{}_{r+11}C_9}$ より

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{{}_{11}C_5\cdot{}_{r+10}C_9}{{}_{10}C_5\cdot{}_{r+11}C_9}=\frac{11(r+2)}{6(r+11)}$$

ここで（$P_1<P_2 \Leftrightarrow \dfrac{P_2}{P_1}=\dfrac{11(r+2)}{6(r+11)}>1 \Leftrightarrow 11(r+2)>6(r+11)$ を示せばよい）

$$11(r+2)-6(r+11)=5r-44\geqq 5\cdot 9-44 \quad (\because r\geqq 9)$$
$$=1>0$$

であるから

$$11(r+2)>6(r+11)$$

よって

$$\frac{P_2}{P_1}>1 \qquad \therefore P_1<P_2$$

〈CHECK〉

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

これを用いると，例えば

$\dfrac{{}_{11}C_5}{{}_{10}C_5}=\dfrac{11!}{5!6!}\cdot\dfrac{5!5!}{10!}=\dfrac{11}{6}$ となる．

問2　$P_n=\dfrac{{}_rC_4\cdot{}_{n+9}C_5}{{}_{n+r+9}C_9}$，$P_{n+1}=\dfrac{{}_rC_4\cdot{}_{r+10}C_5}{{}_{n+r+10}C_9}$ より

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_{n+10}C_5\cdot{}_{n+r+9}C_9}{{}_{n+9}C_5\cdot{}_{n+r+10}C_9}=\frac{(n+10)(n+r+1)}{(n+5)(n+r+10)}$$

ここで

$$(n+10)(n+r+1)-(n+5)(n+r+10)=-4n+5r-40$$

であり，$-4n+5r-40>0$ とすると

$$n<\frac{5(r-8)}{4}$$

よって，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ すなわち $P_n<P_{n+1}$ となる n の値の範囲は

$$1\leqq n<\frac{5(r-8)}{4} \quad (n \text{ は自然数})$$

である．

問3　$r=50$ のとき，$P_n<P_{n+1}$ となる n は $1\leqq n<\dfrac{105}{2}$ であるから，

$$1\leqq n\leqq 52 \text{ のとき } P_n<P_{n+1}，\quad 53\leqq n \text{ のとき } P_n>P_{n+1}$$

である．すなわち

$$P_1<P_2<\cdots<P_{52}<P_{53}>P_{54}>P_{55}>\cdots$$

よって，求める値は $n=53$ である．　**答**

平成20年度　前期日程　数学　乙

$\boxed{1}$

解答

問1　　$(1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$

実数 x であるから，整理して

$$(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i=0$$

よって

$$\begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$$ これらを同時に満たす実数 x は $x=2$ である．　答

別解　$(1+i)x^2-(1+3i)x-2(1-i)=0$

$$(1+i)(1-i)x^2-(1+3i)(1-i)x-2(1-i)^2=0$$

$$2x^2-2(2+i)x+4i=0$$

$$x^2-(2+i)x+2i=0$$ （これを因数分解すると）

$$(x-2)(x-i)=0 \quad \therefore x=2,\ i$$

ここで，x は実数であるから $x \neq i$　$\therefore x=2$

問2　　$\log_4(4x-7)+\log_2 x=1+3\log_4(x-1)$

真数条件より，$4x-7>0$ かつ $x>0$ かつ $x-1>0$　　$\therefore x>\dfrac{7}{4}$ … (*)

$$\log_4(4x-7)+2\log_4 x=\log_4 4+\log_4(x-1)^3$$

$$\log_4(4x-7)x^2=\log_4 4(x-1)^3$$

よって

$$(4x-7)x^2=4(x-1)^3$$

$$5x^2-12x+4=0$$

$$(5x-2)(x-2)=0$$

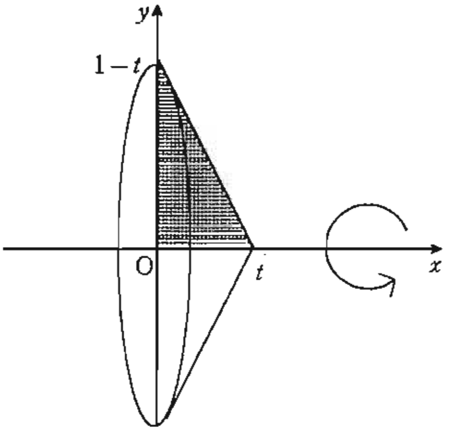
(*) より，$x=2$　答

$\boxed{1}$

解答

問3　題意の立体は，底面の半径が $1-t$，高さが t の円錐であるから，その体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(1-t)^2\cdot t=\frac{\pi}{3}(t^3-2t^2+t)$$



$f(t)=t^3-2t^2+t$ とすると

$$f'(t)=3t^2-4t+1=(3t-1)(t-1)$$

であるから，増減表より

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	極大	↘	

$0<t<1$ において，$f(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ のとき最大となる.

よって，V は $t=\frac{1}{3}$ で最大値 $\frac{\pi}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}\pi$ をとる.　**答**

$\boxed{2}$

解答

問1　$\tan A=\dfrac{4}{3}>0$ より，$0^\circ<A<90^\circ$ であり，$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ より

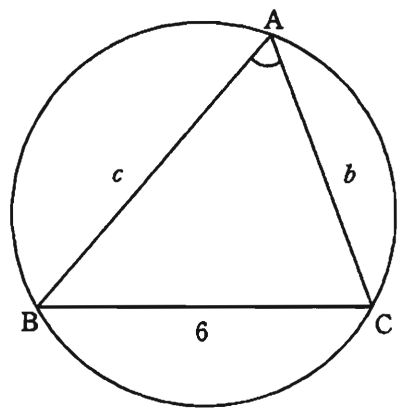
$$\cos A=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 A}}=\frac{3}{5}$$

よって

$$\sin A=\tan A\cos A=\frac{4}{5}$$

問2　△ABC の外接円の半径を R とすると，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$（正弦定理）より

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{15}{2}$$



問3　△ABC の面積を S，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{CA}=b$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2}{5}bc \quad \cdots ①$$

また（余弦定理）

$$6^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

より

$$b^2+c^2-\frac{6}{5}bc=36 \quad \cdots ②$$

ここで，$b^2>0$, $c^2>0$ より（相加平均·相乗平均の関係）

$$b^2+c^2\geqq 2\sqrt{b^2c^2}=2bc \ (\because b>0,\ c>0) \quad \cdots ③$$

が成り立つ．ただし，等号が成り立つのは $b=c$ のときである．

②，③より，$36+\dfrac{6}{5}bc\geqq 2bc \qquad \therefore\ bc\leqq 45 \quad \cdots ④$

①，④より

$$S=\frac{2}{5}bc\leqq\frac{2}{5}\cdot 45=18$$

ここで，等号が成り立つのは $b^2=45$ すなわち $b=c=3\sqrt{5}$ のときである．

よって，S は $b=c=3\sqrt{5}$ のとき最大値 18 をとる．

すなわち，△ABC の面積の最大値は 18 であり，このとき $\mathrm{AB}=3\sqrt{5}$ である．　**終**

$\boxed{2}$

問3

別解1

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2}{5}bc=\frac{8}{5}R^2\sin B\sin C\ \left(\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=\frac{8}{5}R^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}=-\frac{4}{5}R^2\{-\cos A-\cos(B-C)\}$$

$$=\frac{4}{5}R^2\left\{\frac{3}{5}+\cos(B-C)\right\}\leqq\frac{4}{5}R^2\left(\frac{3}{5}+1\right)$$ （$\because \cos(B-C)\leqq 1$，等号成立は $B=C$ のとき）

$$=\frac{32}{25}R^2=18$$ （以下略）

別解2

$$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 6\cdot\sin B=6R\sin B\sin C\ \left(\because \frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

$$=6R\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}=-3R\{-\cos A-\cos(B-C)\}$$

$$=3R\left\{\frac{3}{5}+\cos(B-C)\right\}\leqq 3R\left(\frac{3}{5}+1\right)=\frac{24}{5}R=18$$ （以下略）

別解3

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2}{5}bc$ より，$b^2c^2=\frac{25}{4}S^2$ …①

$6^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ より，$b^2+c^2=3(S+12)$ $\left(\because \cos A=\frac{3}{5},\ bc=\frac{5}{2}S\right)$ …②

①，②より，b^2，c^2 は x についての方程式 $x^2-3(S+12)x+\frac{25}{4}S^2=0$ の実数解である．

この判別式を D とすると

$$D=9(S+12)^2-25S^2=\{3(S+12)+5S\}\{3(S+12)-5S\}=(8S+12)(-2S+36)$$

であり，$D\geqq 0$ となればよいから

$(8S+12)(-2S+36)\geqq 0$

$-2S+36\geqq 0$ （$\because 8S+12>0$）

$\therefore S\leqq 18$ （以下略）

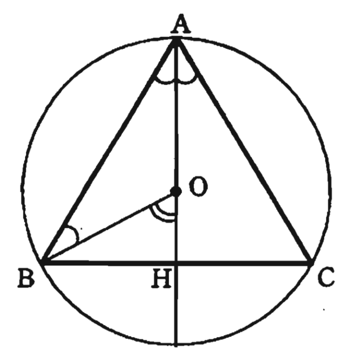
$\boxed{2}$

問3

別解4

底辺BCの長さは一定であるから，頂点Aからの高さ(AからBCに下ろした垂線の長さ)が最大のとき，△ABCの面積は最大になる．

△ABCの外接円の内部において，Aを通る線分の長さが最大となるのはAが直径の端点となるときであり，この直径とBCとの交点をHとする．ただし，Aは△ABCの外心Oに関してBCと反対側にある．



このとき，$\angle A = \angle BOH$ であるから，

$$OH = OB\cos\angle BOH = R\cos A$$

よって

$$AH = OA + OH = R + R\cos A = R(1+\cos A) = 6$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18 \quad \text{（以下略）}$$

平成20年度　後期日程　数学

$\boxed{1}$

解答

問1　C: $y=(x+1)^3$ より，$y'=3(x+1)^2$

よって，ℓ の方程式は

$$y-(-1)=3\{x-(-2)\} \quad \therefore\ \ell : y=3x+5$$

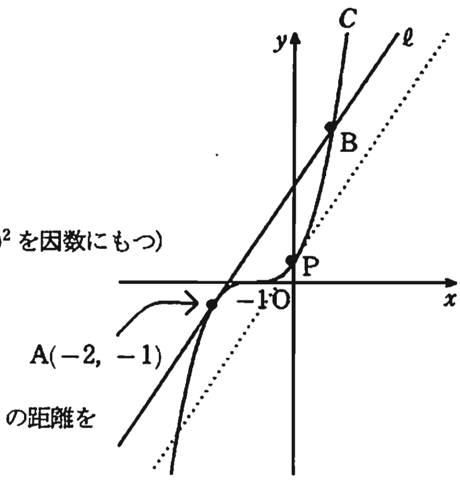
C と ℓ の共有点について，

$(x+1)^3=3x+5$ とすると（$x=-2$ で接することから $(x+2)^2$ を因数にもつ）

$$(x+2)^2(x-1)=0$$

$$x=-2,\ 1$$

$$\therefore\ \mathrm{B}(1,\ 8)$$



問2　点 $\mathrm{P}(t,\ (t+1)^3)$ $(-2\leqq t\leqq 1)$ とし，P と ℓ : $3x-y+5=0$ の距離を $f(t)$ とすると

$$f(t)=\frac{|3t-(t+1)^3+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|(t+2)^2(t-1)|}{\sqrt{10}}=\frac{-(t+2)^2(t-1)}{\sqrt{10}} \quad (\because\ -2\leqq t\leqq 1)$$

より

$$f'(t)=-\frac{2(t+2)(t-1)+(t+2)^2}{\sqrt{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}t(t+2)$$

増減表より

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	$f(-2)$	↗	極大	↘	$f(1)$

$f(t)$ は $t=0$ で最大値 $f(0)=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ をとる.

よって，求める P の x 座標は 0 であり，このときの P と ℓ の距離は $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ である.　答

$\boxed{2}$

解答

問1　$a_{n+1}=2S_n+4S_{n-1}$ において，

$n=1$ とすると，$a_2=2S_1+4S_0=2a_1=2$

$n=2$ とすると，$a_3=2S_2+4S_1=2(a_1+a_2)+4a_1=2(3a_1+a_2)=10$

$n=3$ とすると，$a_4=2S_3+4S_2=2(a_1+a_2+a_3)+4(a_1+a_2)=2(3a_1+3a_2+a_3)=38$

問2　$\begin{cases} a_{n+2}=2S_{n+1}+4S_n \\ a_{n+1}=2S_n+4S_{n-1} \end{cases}$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(S_{n+1}-S_n)+4(S_n-S_{n-1})$$

ここで，$S_k-S_{k-1}=a_k\ (k\geqq1)$ であるから

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}+4a_n \quad \therefore\ a_{n+2}=3a_{n+1}+4a_n\ (n\geqq1)$$

問3　$a_{n+2}-3a_{n+1}-4a_n=0$ より，

$t^2-3t-4=0$ とすると，

$$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore\ t=-1,\ 4$$

与えられた漸化式は

$$a_{n+2}+a_{n+1}=4(a_{n+1}+a_n)$$

と変形できるから，$b_n=a_{n+1}+a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=4b_n\ (n\geqq1)$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1，公比 4 の等比数列である．

$$\therefore\ b_n=b_1\cdot4^{n-1}=(a_2+a_1)\cdot4^{n-1}$$
$$=3\cdot4^{n-1}\ (n\geqq1)$$

〈CHECK〉

隣接3項間漸化式

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

において，

$t^2+pt+q=0$ の2つの解を α, β とすると，

この漸化式は

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

または

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

と変形できる．

問4　与えられた漸化式は

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=-(a_{n+1}-4a_n)$$

と変形できるから，$c_n=a_{n+1}-4a_n$ とおくと

$$c_{n+1}=-c_n\ (n\geqq1)$$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 c_1，公比 -1 の等比数列である．

$$\therefore\ c_n=c_1\cdot(-1)^{n-1}=(a_2-4a_1)\cdot(-1)^{n-1}=-2\cdot(-1)^{n-1}\ (n\geqq1)$$

問5　$b_n=3\cdot4^{n-1}$ より，$a_{n+1}+a_n=3\cdot4^{n-1}$ …①

$c_n=-2\cdot(-1)^{n-1}$ より，$a_{n+1}-4a_n=-2\cdot(-1)^{n-1}$ …②

①，②より

$$5a_n=3\cdot4^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{3\cdot4^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}}{5}\ (n\geqq1)$$ 答

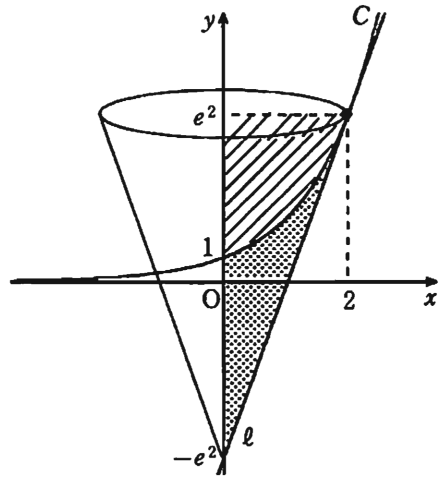
$\boxed{3}$

解答

問1　$\displaystyle\int xe^x\,dx=\int x(e^x)'\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C_1=(x-1)e^x+C_1$ (C_1 は積分定数)

問2　$\displaystyle\int x^2e^x\,dx=\int x^2(e^x)'\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx=x^2e^x-2(x-1)e^x+C_2$ ($\because$ 問1)

$$=(x^2-2x+2)e^x+C_2 \text{ (}C_2\text{ は積分定数)}$$



問3　C: $y=e^x$ より，$y'=e^x$

よって，ℓ の方程式は

$$y-e^2=e^2(x-2)\quad \therefore\ \ell : y=e^2(x-1)$$

題意の立体は，底面の半径が 2，高さが $2e^2$ の円錐から C と y 軸および直線 $y=e^2$ によって囲まれる図形を y 軸の周りに1回転して得られる立体を除いたものであるから

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2e^2-\int_1^{e^2}\pi x^2\,dy$$

$$=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\int_1^{e^2}x^2\,dy$$

ここで，$\displaystyle\int_1^{e^2}x^2\,dy$ において，

$y=e^x$ より，$\dfrac{dy}{dx}=e^x$，

y	$1\ \to\ e^2$
x	$0\ \to\ 2$

よって

$$\int_1^{e^2}x^2\,dy=\int_0^2 x^2e^x\,dx=\Big[(x^2-2x+2)e^x\Big]_0^2=2e^2-2$$

であるから

$$V=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi(2e^2-2)=\frac{2}{3}(e^2+3)\pi$$ 答

$\boxed{4}$

解答

問1　$|x+y|-|x-y|\geqq 1$ について

（i）（$x+y\geqq 0$ かつ $x-y\geqq 0$）すなわち（$y\leqq x$ かつ $y\geqq -x$）のとき

$$(x+y)-(x-y)\geqq 1 \quad \therefore\ y\geqq \frac{1}{2}$$

（ii）（$x+y\geqq 0$ かつ $x-y\leqq 0$）すなわち（$y\geqq x$ かつ $y\geqq -x$）のとき

$$(x+y)+(x-y)\geqq 1 \quad \therefore\ x\geqq \frac{1}{2}$$

（iii）（$x+y\leqq 0$ かつ $x-y\geqq 0$）すなわち（$y\leqq x$ かつ $y\leqq -x$）のとき

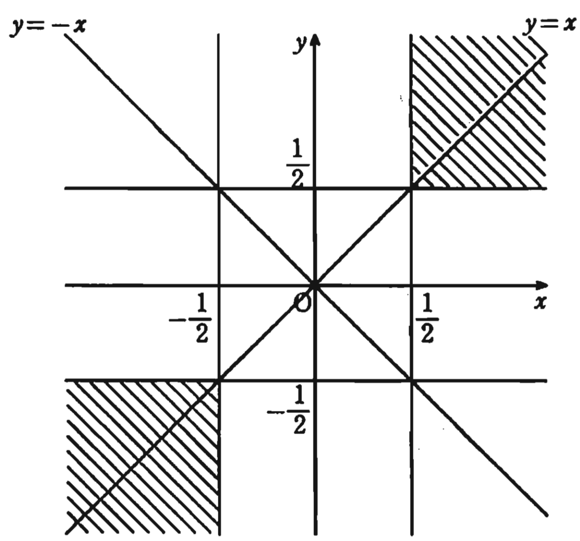
$$-(x+y)-(x-y)\geqq 1 \quad \therefore\ x\leqq -\frac{1}{2}$$

（iv）（$x+y\leqq 0$ かつ $x-y\leqq 0$）すなわち（$y\geqq x$ かつ $y\leqq -x$）のとき

$$-(x+y)+(x-y)\geqq 1 \quad \therefore\ y\leqq -\frac{1}{2}$$

以上より，求める領域は図の斜線部分である．

ただし，境界線を含む．



別解

$$|x+y|\geqq|x-y|+1 \quad \text{（この両辺は正であるから）}$$

$$\Longleftrightarrow |x+y|^2\geqq(|x-y|+1)^2$$

$$\Longleftrightarrow 4xy-2|x-y|-1\geqq 0$$

（i）$x-y\geqq 0$ すなわち $y\leqq x$ のとき

$$4xy-2(x-y)-1\geqq 0$$

$$(2x+1)(2y-1)\geqq 0$$

$$\therefore \begin{cases} x\geqq -\dfrac{1}{2} \\ y\geqq \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{または} \begin{cases} x\leqq -\dfrac{1}{2} \\ y\leqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

（ii）$x-y\leqq 0$ すなわち $y\geqq x$ のとき

$$4xy+2(x-y)-1\geqq 0$$

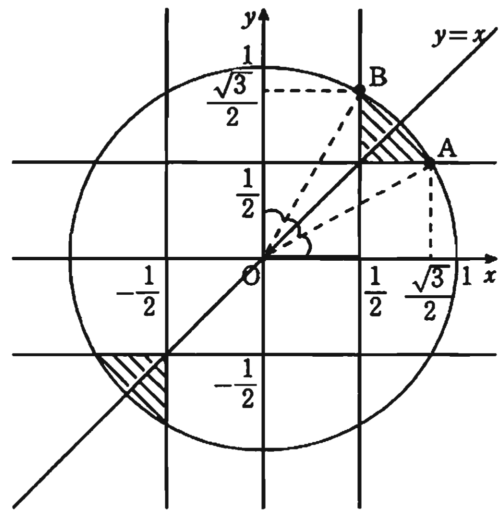
$$(2x-1)(2y+1)\geqq 0$$

$$\therefore \begin{cases} x\geqq \dfrac{1}{2} \\ y\geqq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{または} \begin{cases} x\leqq \dfrac{1}{2} \\ y\leqq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{4}$

解答

問2　図の斜線部分の面積を求めればよい．



2点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると，

扇形OABは，半径が1，中心角が $\frac{\pi}{6}$ であるから

$$扇形\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

点 $C\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ とすると

$$\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OCB}=2\cdot(\triangle\mathrm{OCA})$$

$$=2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

図の斜線部分の２つの図形は原点に関して対称であり，その面積は等しい．

よって，求める面積は

$$2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\quad 答$$

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $A^2 = \begin{pmatrix} 3a^2-6a & 4a^2-8a \\ 2a^2-10a+12 & 3a^2-14a+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$a^2-2a=0, \qquad a^2-5a+6=0, \qquad 3a^2-14a+16=0$$

これらの方程式を同時に満たすのは,

$$a=2$$

問 2 $B^2=(2E+A)^2=4E+4A+A^2=2^2E+2\cdot 2A, \qquad B^3=(2^2E+2\cdot 2A)(2E+A)=2^3E+2^2\cdot 3A$

よって,

$$B^n=2^nE+2^{n-1}\cdot nA \quad \cdots(*)$$

と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき, $B^1=2E+A=2^1E+2^{1-1}\cdot 1A$ より $(*)$ は成り立つ。$n=k$ のとき $(*)$ は成り立つとする。$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= (2^kE+2^{k-1}kA)(2E+A)=2^{k+1}E+2^kkA+2^kA+2^{k-1}kA^2 \\ &= 2^{k+1}E+2^k(k+1)A \end{aligned}$$

より $(*)$ は成り立つ。したがって,すべての n について $(*)$ は成り立つ。よって,

$$B^n=2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2^{n-1}n\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix} n+1 & 2n \\ -\frac{n}{2} & 1-n \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問1 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を式変形すると $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ である。

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x} \Leftrightarrow y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x \quad (0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$$

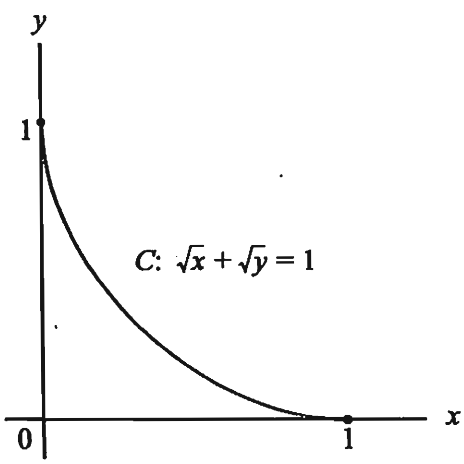
よって曲線 C は $y=1-2\sqrt{x}+x$ のグラフの一部である。

$$y'=-x^{-\frac{1}{2}}+1$$
$$y''=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

これをもとに増減表を書くと下のようになる。

x	0	$\cdots$	1
y'	/	$-$	/
y''	/	$+$	/
y	1	↘	0

よって C の概形は次のようになる。



問2 $\mathrm{P}(a,b)$ は C 上にあるので $b=1-2\sqrt{a}+a$

また問1より $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}+1$

これより

$$\ell : y = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)x - \sqrt{a}+1$$

$x=0$ とおいて y 切片を求めると $-\sqrt{a}+1$

$y=0$ とおいて x 切片を求めると $\sqrt{a}$

問3　求める立体は，底面が半径 $1-\sqrt{a}$ の円，高さが $\sqrt{a}$ の円錐である。よってその体積 V は

$$V = \frac{\sqrt{a}}{3}\pi(1-\sqrt{a})^2$$

$\sqrt{a}=t$ とおくと

$$V = \frac{1}{3}\pi t(1-t)^2$$

右辺を $f(t)$ とおき t に関して微分すると

$$f'(t) = \frac{1}{3}\pi(3t^2-4t+1) = \frac{1}{3}\pi(3t-1)(t-1)$$

これをもとに $f(t)$ の増減を調べると $0<t<1$ の範囲では $t=\dfrac{1}{3}$ のとき極大かつ最大になることがわかる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(t)$	／	↗	$\frac{4}{81}\pi$	↘	／

よって V は $a=\dfrac{1}{9}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{81}\pi$ を取る。

3 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　A(0,2,0) とすると $\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1} = \triangle \mathrm{OAP}_{k+1} - \triangle \mathrm{OAP}_k = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{n}$

問 2　$\mathrm{OQ}_k^2 = 2^2 - \mathrm{OP}_k^2 = 2^2 - \left\{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 + \left(2-\dfrac{k}{n}\right)^2\right\} = \dfrac{4k}{n} - 2\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ より

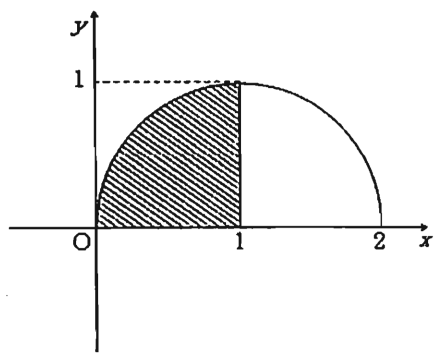
$$V_k = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot \mathrm{OQ}_k = \frac{1}{3n}\sqrt{\frac{4k}{n} - 2\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3n}\sqrt{\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

問 3

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} V_k = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,dx$$

問 4　$y = \sqrt{2x - x^2}$ とおくと $y^2 = 2x - x^2$ より $(x-1)^2 + y^2 = 1$ で，これは中心 (1,0)，半径 1 の円である。

よって定積分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,dx$ は，下図の斜線の部分の面積 $\dfrac{\pi}{4}$ に等しい。ゆえに $I = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{12}$



$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\frac{P_2}{P_1} &= \frac{{}_rC_4 \times {}_{11}C_5}{{}_{r+11}C_9} \times \frac{{}_{r+10}C_9}{{}_rC_4 \times {}_{10}C_5} = \frac{11!}{5!6!} \times \frac{9!(r+2)!}{(r+11)!} \times \frac{(r+10)!}{9!(r+1)!} \times \frac{5!5!}{10!} \\ &= \frac{11(r+2)}{6(r+11)}\end{aligned}$$

よって $\dfrac{11(r+2)}{6(r+11)} > 1$, つまり $r > 8.8$ のとき $P_1 < P_2$ が成り立つ。仮定より $r \geqq 9$ であるから $P_1 < P_2$ が成り立つ。

問 2

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_rC_4 \times {}_{n+10}C_5}{{}_{n+r+10}C_9} \times \frac{{}_{n+r+9}C_9}{{}_rC_4 \times {}_{n+9}C_5} \\ &= \frac{(n+10)!}{5!(n+5)!} \times \frac{9!(n+r+1)!}{(n+r+10)!} \times \frac{(n+r+9)!}{9!(n+r)!} \times \frac{5!(n+4)!}{(n+9)!} \\ &= \frac{(n+10)(n+r+1)}{(n+5)(n+r+10)}\end{aligned}$$

よって $P_n < P_{n+1} \Longleftrightarrow \dfrac{(n+10)(n+r+1)}{(n+5)(n+r+10)} > 1 \Longleftrightarrow n < \dfrac{5}{4}r - 10$

問 3 $r = 50$ であるから, 数列 $\{P_n\}$ は $n < \dfrac{5}{4} \times 50 - 10 = 52.5$ のとき $P_n < P_{n+1}$ が成り立ち, $n > 52.5$ のとき $P_n > P_{n+1}$ が成り立つ。よって P_n は

$$n = [52.5] + 1 = 53$$

のとき最大になる。

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $$(x^2-x-2)+i(x^2-3x+2)=0$$

よって

$$x^2-x-2=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

2つの方程式を同時に満たすのは

$$x=2$$

問 2 真数条件より，$4x-7>0,\quad x>0,\quad x-1>0$

よって，$x>\dfrac{7}{4}$

与式より

$$\log_4 x^2(4x-7)=\log_4 4(x-1)^3$$

よって

$$x^2(4x-7)=4(x-1)^3$$

$$5x^2-12x+4=0$$

$$x=\frac{2}{5},\ 2$$

真数条件より

$$x=2$$

問 3 回転体は底面の半径が $1-t$，高さが t の円錐だから，その体積は

$$V=\frac{1}{3}\pi t(1-t)^2$$

右辺を $f(t)$ とおき t に関して微分すると

$$f'(t)=\frac{1}{3}\pi(3t^2-4t+1)=\frac{1}{3}\pi(3t-1)(t-1)$$

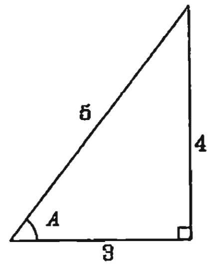
これをもとに $f(t)$ の増減を調べると $0<t<1$ の範囲では $t=\dfrac{1}{3}$ のとき極大かつ最大になることがわかる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(t)$	／	↗	$\frac{4}{81}\pi$	↘	／

したがって，最大値 $\dfrac{4}{81}\pi\quad\left(t=\dfrac{1}{3}\right)$

2 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　右図より



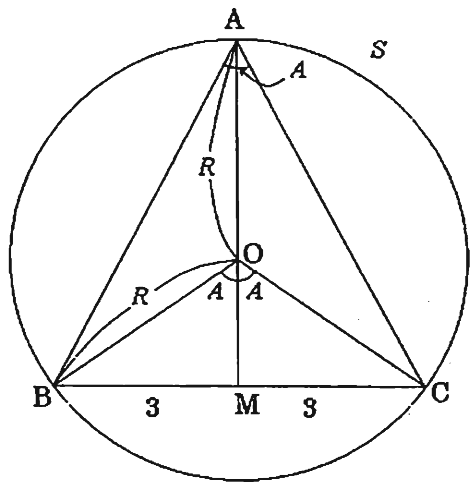
$$\sin A = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{3}{5}$$

問 2　△ABC の外接円の半径を R とすると，問 1 および正弦定理より

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{15}{2}$$

問 3　△ABC の外接円を S，その中心を O，BC の中点を M とする。△ABC の面積が最大になるのは，点 A と辺 BC の距離が最大になるときである。つまり，A が S の優弧（長い方の弧）BC の中点に一致するときである。



∠BOM $= A$ より，底辺 BC に対する △ABC の高さは

$$\mathrm{AM} = \mathrm{OA} + \mathrm{OM} = R + R\cos A$$

$$= \frac{15}{4} + \frac{15}{4}\cdot\frac{3}{5} = 6$$

ゆえに，△ABC の面積の最大値は，$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18$

またこのとき，AB$= \sqrt{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2} = 3\sqrt{5}$

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

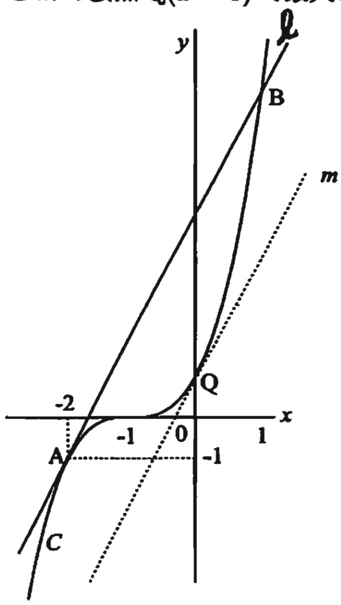
問1 $y' = 3(x+1)^2$ であるから，A$(-2,-1)$ における接線の傾きは $3(-1)^2 = 3$

よって，接線は $y = 3x+5$

$(x+1)^3 = 3x+5$ を整理すると $x^3+3x^2-4 = (x+2)^2(x-1) = 0$

よって，B の x 座標は 1 となり，B の座標は $(1, 8)$

問2 まず，C の接線 m で ℓ と平行なものを求める。$y' = 3(x+1)^2 = 3$ より $x = -2, 0$ となる。$x = -2$ のとき m は ℓ と一致するので，m が ℓ と平行になるのは $x = 0$ のときである。曲線 C の A から B までの部分は，図のように ℓ と m にはさまれているから，P と ℓ の距離は C と m の接点 Q$(x = 0)$ で最大になる。



ゆえに，求める x は $x = 0$ で，そのときの距離は $\ell : 3x - y + 5 = 0$ より

$$\frac{|-1+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned} a_2 &= 2S_1 + 4S_0 = 2a_1 = 2 \\ a_3 &= 2S_2 + 4S_1 = 2(a_1 + a_2) + 4a_1 = 2(1+2) + 4 = 10 \\ a_4 &= 2S_3 + 4S_2 = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 4(a_1 + a_2) = 2(1+2+10) + 4(1+2) = 38 \end{aligned}$$

問 2

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2S_{n+1} + 4S_n \cdots (1) \\ a_{n+1} &= 2S_n + 4S_{n-1} \cdots (2) \end{aligned}$$

(1) から (2) を辺々引くと

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= 2(S_{n+1} - S_n) + 4(S_n - S_{n-1}) \\ &= 2a_{n+1} + 4a_n \\ \therefore \quad a_{n+2} &= 3a_{n+1} + 4a_n \end{aligned}$$

問 3 問 2 より

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_{n+1} &= 4a_{n+1} + 4a_n = 4(a_{n+1} + a_n) \\ \therefore \quad b_{n+1} &= 4b_n = 4^2 b_{n-1} = \cdots = 4^n b_1 = 4^n(a_2 + a_1) = 3 \cdot 4^n \\ \therefore \quad b_n &= 3 \cdot 4^{n-1} \end{aligned}$$

問 4 問 2 より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} &= -a_{n+1} + 4a_n = (-1)(a_{n+1} - 4a_n) \\ \therefore \quad c_{n+1} &= (-1)c_n = (-1)^2 c_{n-1} = \cdots = (-1)^n c_1 = (-1)^n(a_2 - 4a_1) = (-2) \cdot (-1)^n \\ \therefore \quad c_n &= -2 \cdot (-1)^{n-1} = 2 \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

問 5 問 3, 問 4 より

$$a_n = \frac{1}{5}(b_n - c_n) = \frac{3}{5} \cdot 4^{n-1} + \frac{2}{5} \cdot (-1)^{n-1}$$

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int x(e^x)' dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= (x-1)e^x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

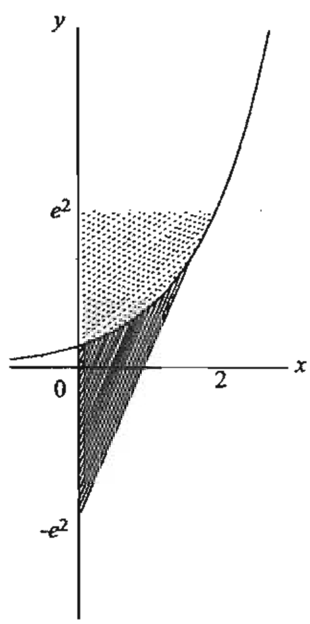
問 2

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx &= \int x^2(e^x)' dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx \cdots (1)\end{aligned}$$

問 1 を使って

$$\begin{aligned}(1) &= x^2e^x - 2(x-1)e^x + C' \\ &= (x^2-2x+2)e^x + C' \quad (C' \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

問 3 $y' = e^x$ であるから，接線 ℓ の方程式は，$y = e^2(x-2) + e^2 \quad \therefore y = e^2(x-1)$



ℓ と $y = e^2$ および y 軸によって囲まれた図形を y 軸のまわりに回転して得られる円錐の体積を V_1，図の打点部分を y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を V_2 とする。すると，求める体積は $V_1 - V_2$ で与えられる。

$\ell : y = e^2(x-1)$ であるから，ℓ は y 軸と $y = -e^2$ で交わる。ゆえに

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi\{e^2 - (-e^2)\} = \frac{8}{3}\pi e^2 \quad \cdots (1)$$

また,

$$V_2 = \pi \int_1^{e^2} x^2 dy \quad \cdots (2)$$

(2) では $x = \log y$ である。置換積分すると,

$$(2) = \pi \int_0^2 x^2 \frac{dy}{dx} dx = \pi \int_0^2 x^2 e^x dx \quad \cdots (3)$$

問 2 より $(3) = \pi(2e^2 - 2) \quad \cdots (4)$

(1)(4) より求める体積は $\pi \left(\frac{2}{3}e^2 + 2 \right)$

4 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問1 $x+y \geqq 0,\ x-y \geqq 0$ のとき，$(x+y)-(x-y)=2y \geqq 1 \quad \therefore y \geqq \dfrac{1}{2}$

$x+y \geqq 0,\ x-y \leqq 0$ のとき，$(x+y)+(x-y)=2x \geqq 1 \quad \therefore x \geqq \dfrac{1}{2}$

$x+y \leqq 0,\ x-y \geqq 0$ のとき，$-(x+y)-(x-y)=-2x \geqq 1 \quad \therefore x \leqq -\dfrac{1}{2}$

$x+y \leqq 0,\ x-y \leqq 0$ のとき，$-(x+y)+(x-y)=-2y \geqq 1 \quad \therefore y \leqq -\dfrac{1}{2}$

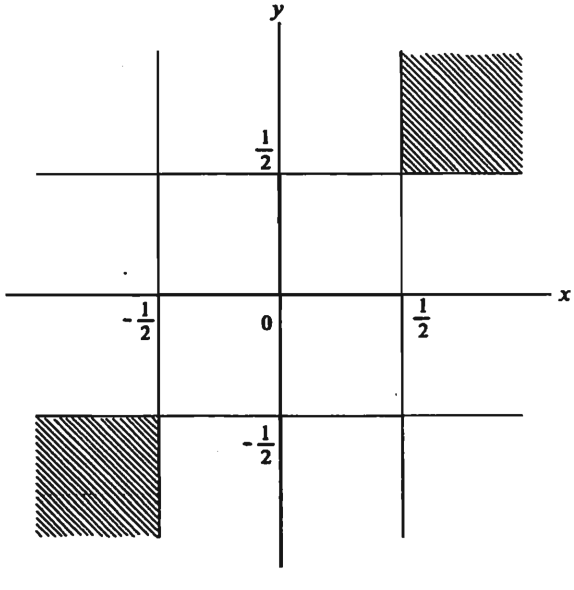
求める領域は下の左図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

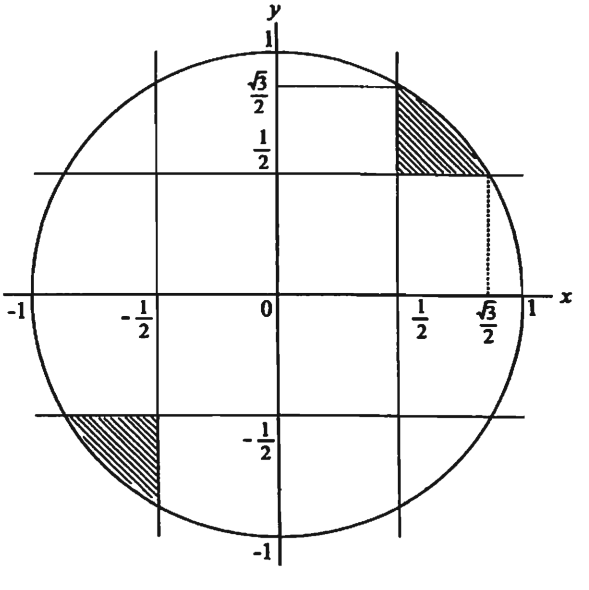
問2 問題の領域は，原点に関して対称な下の右図の斜線の部分なので，求める領域の面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right)dx = I - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{ただし，} I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \text{ である。}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t \cdot \cos t\, dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$





「第32回高校数学教育を考える会」実施報告

大学入試問題研究委員会
上江洲　寿（県立開邦高等学校）

1．はじめに

今年度で32回を迎える「高校数学教育を考える会 －琉球大学数理科学科との懇談会－」が下記の通り開催された。この会は、本年度の琉球大学入試の現状等を題材に、琉球大学数理科学科と本県高等学校数学科との間で情報・意見交換をすることによって、本県の高校数学教育のさらなる発展に寄与することを目的とした会である。

〔日　　時〕	平成20年5月16日（金）　16:00～17:00
〔場　　所〕	沖縄県立那覇高等学校視聴覚教室
〔琉球大学側参加者〕	西白保　敏彦，平安名　常儀，神山　靖彦，小須田　雅
〔司　　会〕	崎間　恒哉（知念高校）
〔代表質問者〕	上江洲　寿（開邦高校）
〔使用資料〕	「琉球大学平成20年度大学入試試験問題（前期甲・乙・後期）」 「琉球大学平成20年度大学入試解答例」（琉球大学作成） 「琉球大学平成20年度大学入試解答例」（大学入試問題研究委員会作成）

2．実施報告

今年の会も、これまでと同様に今年度の入試問題や受験生の解答状況を題材に、高校側からの質問に、大学側が返答するという形式で進められた。琉球大学から参加して頂いた先生方は、問題作成側としての守秘義務や限られた時間の下での返答となったので、全ての質問に十分な返答がなされたわけではないが、高校での指導における具体例や大学生の入学後の学習に向かう姿勢など、様々な情報・意見交換がなされ、高校の教科指導において多くの示唆を得ることができた。その中からいくつかの質問・返答を以下に示す。

①（入試問題全般に関して）

質　問　「各大問毎に小問の配点や正答率を教えて頂きたい。」

返　答　「具体的な正答率や平均点などはこの場ではお答えできません。後日、琉球大学側から発表される入試データ以外にはお伝えできることはありませんので、そちらを参考になさって下さい。私どもは、全国の受験生を公平に扱わないといけない立場上、ここにお集まり下さっている学校だけに有益な情報というのは伝えることができません。どうぞご理解下さい。」

②（前期日程（数学甲）の大問 $\boxed{1}$ 問2に関して）

質　問　「琉球大学から示された解答例は数学的帰納法を用いていますが、大学入試問題研究委員会では二項定理を用いて解答例を示しました。実際の受験生はどのような解答が多かったのでしょうか。」

返　答 「どちらの解法を用いた解答が多かったのかはよく分かりません。ただ、大学入試検討委員会で示された二項定理を用いた解法が成り立つのは、単位行列Eの積の可換性があるからです。大学に入学後、線形代数の講義で、行列の積の非可換性でとまどう学生が結構います。ぜひ、高校での授業でも、行列の積の非可換性についてしっかりと指導をお願いしたいと思います。」
「また、大学側では数学的帰納法を用いて解答例を示しましたが、この数学的帰納法の受験生の出来があまりよくありません。$n=k$で成り立つ仮定して、$n=k+1$ のときも成り立つことをその仮定のもとに示していけばよいのですが、$n=k$のkをすぐに$k+1$で置き換えただけで、すぐに$n=k+1$でも成り立つという解答例なども見られます。数学的帰納法の意味を理解していないせいでしょう。」

③（前期日程（数学甲）の大問 2 問1に関して）
質　問 「曲線の概形を図示する問題ですが、この曲線はx軸、y軸の近くでは軸に接するようになります。実際の採点では、このような所まで確認して採点を行ったのでしょうか。」
返　答 「実際の採点の具体的なお話はできないのですが、基本的には増減表にもとづいた曲線の概形が図示できていればよろしいと思います。ただ、実際の入試では、正しい増減表を書く前の計算を正しく処理できなかった受験生も結構いたようです。」

④（後期日程の大問 2 に関して）
質　問 「この数列の一般項を隣接３項間漸化式の特性方程式を用いて解答した場合はどのような採点になるのでしょうか。」
返　答 「正しく解答が記述されていれば、よろしいと思います。ただ、受験生の中には問題の解き方のパターンだけを暗記していて、その解き方が用いられる根拠や条件などを本当に分かっているのか怪しい解答もみられます。間違った条件や記述の仕方によっては認められないこともありますので、高校側でも教えるときには、その辺りまでしっかりと教えて頂きたいと思います。」

⑤（後期日程に関して）
質　問 「今回の後期日程の入試問題の大問が４つありますが、数学Ⅲ分野からの出題が１問しかありませんでした。後期日程は数理科学科の受験生だけが受験しますので、数理科学科に入学を志望する生徒にとっては、高校で数学Ⅲをしっかり学習して入学すべきだと思います。となると、後期日程の問題では数学Ⅲ分野からの出題が中心になると思うのですが、今年度はそうではなかった。これに関して何か意図があるならば教えて頂きたい。」
返　答 「数学Ⅲ分野からの出題が１問しかないというのは、今のご指摘で気がつきました。私どもが作問する際には、学習指導要領を超えた範囲での出題はないかどうか、表現は適切であるかどうか等には気を使っていますが、どの分野からどれだけ出題するかということには、あまり気を使っていませんでした。確かに、後期日程を受験するのは数理科学科の受験生だけですから、作問の自由度は前期に比べて高いと思います。その年の作問者によって、見たい力を見るという立場で出題していますので、今年度の後期日程の出題に関して特別な意図というものはありません。」

以上のような、質疑応答が５０分程続けられ、その後、今年度の受験で受験生の解答から感じた

ことを大学側参加者に話して頂いた。その内容をまとめると次の５つになるが、それらは我々の教科指導においても工夫改善が求められる点ではないだろうか。

①計算力が弱い。

②論理的な思考・表現ができていない。

③問題をよく読んで解答して欲しい。

④ただ、解答するのではなく、しっかりとイメージをもって解答して欲しい。

⑤解き終えたら、出た答えをチェックして欲しい。

そして、会の最後に、西白保敏彦先生より、今後の高校数学教育に望む３つの提言を頂いた。その提言を以下にまとめる。

【提言１】「基礎学力の充実」

基本的な計算や公式をきちんと使うことができない学生がまだまだいる。高校の数学教育の現場でも、まずこの基礎・基本の徹底をお願いしたい。

【提言２】「意欲を高める指導の工夫」

学生の数学を学ぶモチベーション（意欲）を育てて欲しい。そのためには、広い数学的なバックグランドに基づく、高い視点からの指導が必要である。ぜひ、そのような指導をお願いしたい。

【提言３】「論理思考力の育成」

学生の論理的思考力を育成する必要がある。大学生でも論理的に考えることがなかなかできない学生がいる。論理的思考力を育成していくためには、今までのような教師から生徒へ知識を伝達していくだけの１ＷＡＹ指導では駄目ではないか。オーラルコミュニケーションを用いながら授業を展開する２ＷＡＹ指導が有効なのではないか。

３．さいごに

この会は、琉球大学の数理科学科の先生方と高校数学科の先生方が一同に介して、入試問題を題材に、様々な情報・意見交換をする年に一度の貴重な会である。そこに集まる人は大学、高校と指導する学生の年が若干異なるだけで、数学を学ぶ若者を指導していくという立場は皆同じである。そして、そのような学生に向き合う想いも皆同じではないだろうか。数学を楽しく学んで欲しい、数学の力をできるだけ育ててあげたい、そのような想いを抱きながら、学生の指導を日々行っていることであろう。今回の会でも、高校の数学教育において、示唆に富む情報・意見交換がなされたと思う。しかし、それを学校に持ち帰り、指導の中で具現化するのは、授業で生徒一人一人と向き合う我々である。このことを肝に銘じて、これからの授業の工夫改善に努めていきたいと思う。あと、この会の意義を考えると、もっと多くの本県高校数学科の職員が参加してもよいのではないだろうか。年に一度しかない貴重な機会である。たまには、大学側の先生方と意見を交換して、違う視点から、自分自身の教科指導を再評価してみてもよいのではないかと思う。来年以降の会はより多くの高校数学科の職員の参加に期待したい。さいごに、お忙しい中、会のために貴重な時間を作っていただいた琉球大学数理科学科の西白保敏彦先生，平安名常儀先生，神山靖彦先生，小須田雅先生、会場となった那覇高等学校の先生方には心から感謝の意を示して本稿のむすびとしたい。