

第 3 3 回

高校数学を考える会

(琉球大学との懇談会)

日時：2009 年 6 月 12 日 (金)

16:30～17:30

場所：沖縄県立西原高等学校 (視聴覚教室)

沖縄県高等学校数学教育会

目 次

平成 21 年度 琉球大学入試試験問題についての感想と質問 (高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程・数学甲	入試問題分析	・ ・ ・ ・ ・	13
前期日程・数学乙	入試問題分析	・ ・ ・ ・ ・	14
後期日程	入試問題分析	・ ・ ・ ・ ・	15
前期日程・数学甲	入試問題について	・ ・ ・	16
前期日程・数学乙	入試問題について	・ ・ ・	17
後期日程	入試問題について	・ ・ ・	18

平成 21 年度 琉球大学入試問題 解答例 (高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 数学甲	・ ・ ・ ・ ・	19
前期日程 数学乙	・ ・ ・ ・ ・	26
後期日程	・ ・ ・ ・ ・	30

平成 21 年度 琉球大学入試問題 解答例 (琉球大学)

前期日程 数学甲	・ ・ ・ ・ ・	36
前期日程 数学乙	・ ・ ・ ・ ・	40
後期試験	・ ・ ・ ・ ・	42

「第 33 回高校数学教育を考える会」実施報告	・ ・ ・	48
-------------------------	-------	----

平成 21 年度 琉球大学（前期日程・数学甲）入試問題分析

<総 論>

数学Ⅲからの出題が中心であり、数学Cの「行列」や「2次曲線」からの出題はなかった。数学Ⅲに関しては、演習不足から不安を抱える受験生も多いであろう。しかし、出題されているのは標準的な問題が中心なので、時間配分をきちんとすれば、受験生にとっても取り組みやすい問題構成であったと思われる。ただ、図やグラフを描いて解答を記述する問題もあり、解答の記述力が求められる。また、高得点を狙うには、第4問の確率の計算をしっかりと行えるような計算力も求められる。

<設問ごとの分析>

問題番号	範囲	出題分野	コメント	難易度
1.	数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ	図形と計量 三角関数 微分法の応用	問題文を正しく読み取って、適切な図が描ければ、そんなに難しくないのであろう。問2の最小値は、問1で得られた式を微分してもよいし、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ において式変形してもよい。	標準
2.	数学Ⅲ	積分法 関数の極限	問1は絶対値のついた関数の定積分の問題。問2は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用した関数の極限の問題。問1、2ともに標準的な問題なので完答したい。問3は絶対値のついた三角関数のグラフの周期性に着目するのがポイント。また、解答をうまく記述する力も求められる。	やや難
3.	数学Ⅲ	積分法 積分法の応用 数列の極限	問1の部分積分法は基本問題。問2の定積分と不等式の証明問題は苦手な受験生もいると思うが、典型問題なので完答したい。問3は対数を利用するのがポイント。問1と問2の結果を用いて、はさみうちの原理を用いればよい。はさみうちの原理はうまく使えるように普段から練習しておく必要がある。	標準
4.	数学A	確率	座標平面上で規則にしたがって動く点の問題はよくみられる設定である。図を描いて、全ての場合を正しく把握できるかがポイント。問2では、計算力も求められる。	標準

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・甲問題）のレベルを基準に、難易度を5段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

<合格への学習対策>

今年度は数学Ⅲからの出題が中心であった、出題の中心は教科書やその併用問題集で扱われるような典型的な入試問題である。そのような典型問題をしっかりと解く力をつける必要がある。また、解答を論理的に記述する力やグラフや図を利用して記述する力も求められる。普段の学習から、答えだけでなく解答をしっかりと記述することを意識して問題演習に取り組むことが大切である。可能であれば、添削指導を受けることも有効であろう。

平成 21 年度 琉球大学（前期日程・数学乙）入試問題分析

<総 論>

昨年度の入試問題と比較すると少し易化した。今年度は全問題が数学Ⅱからの出題であった。典型的な問題ばかりだったので高得点をとった受験生もいたのではないだろうか。出題内容に関しては、相加平均と相乗平均の関係や定積分の頻出公式の証明問題等の教科書をしっかりと理解しているかを問うための問題が出題された。本当に基礎・基本が身についているかを問う良い出題であったと考える。

<設問ごとの分析>

問題番号	範囲	出題分野	コメント	難易度
1.	数学Ⅱ	不等式の証明 複素数と 2 次 方程式 対数関数	問 1 の相加平均と相乗平均の関係の証明は教科書レベルの基本問題。問 2 も基本問題で、解を方程式に代入するか、または 2 次方程式の解と係数の関係を用いてもよい。問 3 も対数関数の基本問題。底の変換公式と真数の条件がポイントとなる。	易
2.	数学Ⅱ	積分法	問 1 は頻出公式の証明問題。教科書の内容がしっかりと身についていれば易しいであろう。問 2 では問 1 で証明した公式を利用する典型問題である。	標準

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・乙問題）のレベルを基準に、難易度を 5 段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

<合格への学習対策>

教科書の学習内容の完全理解を目指して学習に取り組むことが大切である。やはり基礎・基本的な公式や定理はその使い方だけでなく、その証明までも含めてしっかり理解する必要がある。出題は標準的な難易度の問題だけなので、ちょっとした計算ミスや記述ミスが合否に影響することもあると考えられる。普段の学習から計算力や論理的な記述力を養うことを意識して学習に取り組むことが大切である。

平成 21 年度 琉球大学（後期日程）入試問題分析

<総 論>

数学ⅢC分野からの出題が中心の問題構成で、数理科学科の入試問題としては妥当な問題であった。ただし、第4問の整数（自然数）問題は難しかったので、ほとんどの受験生が正解できなかったであろう。第1問から第3問までをどれだけしっかり得点できたかがポイントになったと考える。多少複雑な式変形や計算もあるので、計算ミスでうまく得点できなかった受験生も結構いたであろう。

<設問ごとの分析>

問題番号	範囲	出題分野	コメント	難易度
1.	数学C	行列	問1は1次変換を表す行列を求める基本的な問題。問2は三角関数に関わる公式を利用して行列をきちんと変形することがポイントとなる。原点を中心とする回転移動を表す行列は基本事項。	やや易
2.	数学Ⅲ	微分法の応用 関数の極限	問1は基本的な問題で、減少関数であることを示すには導関数の値が負になることを示せばよい。問2は関数の極限を求める問題であるが、式がやや複雑になるので式変形をうまくできなかった受験生もいたのではないだろうか。数学Ⅲではしっかりとした計算力も求められる。問3は問1と問2の結果を使えば問題ないであろう。	標準
3.	数学Ⅲ	微分法の応用 積分法の応用	問1は基本的な問題。問2は接点以外に共有点を持たないことを示すためにはどのような方針で解答したらよいのか戸惑った受験生もいたと思われる。曲線と接線の式から得られる方程式が $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 以外の解を持たないことを関数の増減から示すことがポイントとなる。問3は面積を求める基本的な問題。	標準
4.	数学I 数学B または 数学Ⅲ	整数 数列の和 積分法の応用	全ての自然数 n に対して成り立つという条件から $n=1,2,3$ とし、得られる式をうまく変形することがポイントとなる。また、 $\alpha=1, \beta=3$ が十分条件であることも示す必要がある。第4問は受験生にとって難しい整数（自然数）問題で、さらに、小問での誘導もないので、多くの受験生が得点できなかったであろう。	難

問題の難易度は例年の琉球大学（後期日程）のレベルを基準に、難易度を5段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

<合格への学習対策>

数学ⅢC分野を中心に学習対策に取り組む必要がある。教科書や併用問題集等にある標準的な問題をしっかり解く力を養うことが大切である。特に、数学Ⅲでは多少複雑な式変形や微分法・積分法の計算などの計算力も問われるので、多くの練習問題に取り組んで、計算力を養うことが大切である。また、複雑な式変形や解答の流れを論理的に記述する記述力も問われるので、普段の学習から意識して解答を記述することが必要であろう。

平成 21 年度 琉球大学（前期日程・数学甲）入試問題について

問題番号	範囲	出題分野	質問事項	難易度
1.	数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ	図形と計量 三角関数 微分法の応用	(ア) 問 1 の問題文で「 x 軸の正の部分…と y 軸の正の部分…」とあるが、正しく読み取れていない受験生がいたのではないだろうか？ (イ) 問 2 では微分法を用いた解法と $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおいて式変形する解法があったと思われるが、どちらの解法を用いている受験生が多かったのか？ (ウ) 問 2 では最小値をとるとき θ の値を示さなくても完全正解となるのか？ (エ) 問 2 で琉球大学が提示した解答例において、増減表を示す前に、 $\sin \theta - \cos \theta$ の合成等を示す必要があるのではないか？ (オ) 受験生はどの程度できていたのか？	標準
2.	数学Ⅲ	積分法 関数の極限	(ア) 問 3 では関数のグラフの周期性を利用した解答では完全正解となるのか？ (イ) 問 3 は解答をうまく記述する力が求められると思われるが、実際の受験生のできはどうだったか？	やや難
3.	数学Ⅲ	積分法 積分法の応用 数列の極限	(ア) グラフ等を用いて解答する必要があったと思われるが、実際の受験生の解答はどうだったか？	標準
4.	数学 A	確率	(ア) 場合分けができていて、確率の計算で間違えた場合はどの程度の部分点が与えられるのか？ (イ) 問 2 の計算はどの程度の受験生ができていたのか？	標準
意見	全体的には各問題とも小問の設定がうまく考えられていて、良い問題構成であった。第 4 問の問 2 の確率の計算は少し厳しい出題であったと考える。また、入試に臨む受験生の心的状況を考えると、解答用紙（解答欄の配分等）は改善した方が良いのではないか。			

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・甲問題）のレベルを基準に、難易度を 5 段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

平成 21 年度 琉球大学（前期日程・数学乙）入試問題について

問題番号	範囲	出題分野	質問事項	難易度
1.	数学Ⅱ	不等式の証明 複素数と 2 次 方程式 対数関数	(ア) 問 1 では等号成立の場合を記述しなくても完全正解となるのか？ (イ) 問 2 では $b=0$ の場合の解が答えられなかった受験生も結構いたのではないかな？	易
2.	数学Ⅱ	積分法	(ア) 問 1 は教科書レベルの問題と思われるが、どの程度の受験生ができていたのか？ (イ) 問 1 は $-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の形まで因数分解できなくても、部分点がもらえたのか？ (ウ) 問 2 では琉球大学が提示した解答例のように p, q 以外の文字 t を用いて解答している受験生はどの程度いたのか？	標準
意見	数学乙は教科書レベルの基本問題からの出題であったので、受験生がどの程度できていたか、高校側としても大変興味あるところである。出題に関しては、各大問の問 1 のような教科書の基本公式をその証明まで含めてきちんと理解しているかを問う出題は良い出題であったと考える。			

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・乙問題）のレベルを基準に、難易度を 5 段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

平成 21 年度 琉球大学（後期日程）入試問題について

問題番号	範囲	出題分野	質問事項	難易度
1.	数学C	行列	(7) 問1は問題文で「l上にない点$p(x, y)$」という条件があるが、琉球大学が提示した解答例その2ではl上の点$(1, a)$を用いて解答しているのは不適切ではないか？この点を用いて解答した場合、受験生は完全正解となるのか？ (4) 問2の琉球大学が提示した解答例では、 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ の形から回転移動を表す行列と しているが、教科書では回転を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の形で扱うことになっています。受験生はこの形まで変形しなくても完全正解となるのか？	やや易
2.	数学Ⅲ	微分法の応用 関数の極限	(7) 問2はきちんと式変形する必要があるが、受験生のできはあまり良くないのではないかと？ (4) 問3の証明問題において$\log 2 < f(2x) - f(x)$だけや$f(2x) - f(x) < 2\log 2$だけ示した受験生もいたのではないかと？その場合はどの程度の減点となるのか？	標準
3.	数学Ⅲ	微分法の応用 積分法の応用	(7) 問1では問題文を読み違えて、接線の方程式ではなく、傾きの値だけを答えた受験生もいたのではないだろうか？その場合は部分点はもらえるのか？ (4) 問2では、$y = f(x)$の概形から示した解答では完全正解となるのか？ (9) 問3では、曲線と直線の上下関係までは示さなくても完全正解となるのか？	標準
4.	数学Ⅰ 数学B または 数学Ⅲ	整数 数列の和 積分法の応用	(7) この問題の出題の意図は？ (4) 琉球大学が提示した解答例の後半では帰納法を用いているが、数列の和の公式を用いてもいいのではないかと？ (9) 大学入試検討委員会の提示した解答例でも完全正解となるか？補足の部分まで記述は必要か？ (5) 完全正解している受験生はいたのか？	難
意見	数学ⅢCが中心の問題構成で、数理科学科の入試問題としては妥当な問題であったと考える。ただし、第4問の整数（自然数）の問題は受験生にとって大変難しい問題であったと考えられ、どれほどの受験生が正解していたのか興味あるところである。			

問題の難易度は例年の琉球大学（後期日程）のレベルを基準に、難易度を5段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

1 座標平面の x 軸の正の部分にある点 A と y 軸の正の部分にある点 B を考える。原点 O から点 A, B を通る

直線 ℓ におろした垂線と、直線 ℓ との交点を P とする。 $OP=1$ であるように点 A, B が動くとき、次の問に答えよ。(50点)

問1 $\theta = \angle AOP$ とするとき、 $OA+OB-AB$ を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ で表せ。

問2 $OA+OB-AB$ の最小値を求めよ。

解答

問1 直線 ℓ は、円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における、

この円の接線であるから

$$\ell : x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

よって、座標軸と ℓ との交点の座標は

$$\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

である。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$ であるから

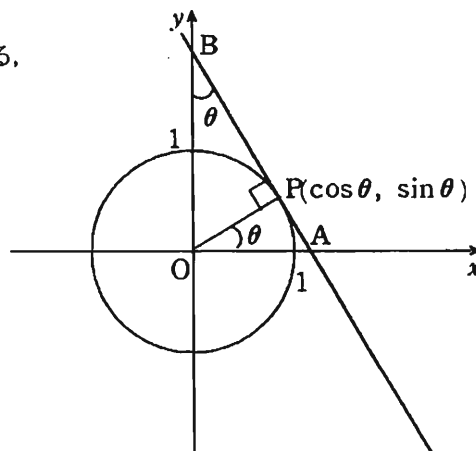
$$OA = \frac{1}{\cos \theta}, OB = \frac{1}{\sin \theta}$$

また、 $\triangle OAB \sim \triangle PAO$ より、 $AB:OB=AO:PO$ であり、 $OP=1$ より

$$AB = AO \cdot OB = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$$

したがって

$$\begin{aligned} OA + OB - AB &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \text{終} \end{aligned}$$



【解答】(前頁 1) の続き)

問2 $y = \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$

とすると

$$y = \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\frac{1}{2}[(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1]} = \frac{2(\sin \theta + \cos \theta - 1)}{(\sin \theta + \cos \theta + 1)(\sin \theta + \cos \theta - 1)} = \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta + 1}$$

と表される。

ここで、 $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと

$$t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

さらに、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \alpha$ とおくと

$$t = \sqrt{2} \sin \alpha \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3}{4}\pi\right)$$

であるから

$$1 < t \leq \sqrt{2}$$

よって

$$y = \frac{2}{t+1} \quad (1 < t \leq \sqrt{2})$$

であるから、 y は単調に減少して、

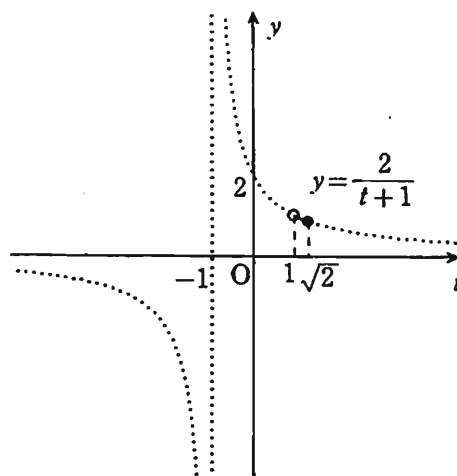
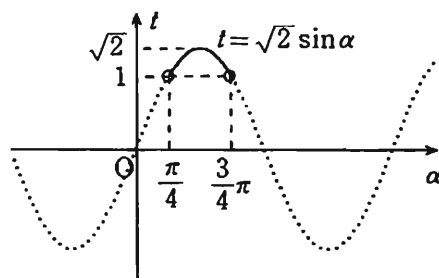
$$t = \sqrt{2} \text{ で最小値 } \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1) \text{ をとる。}$$

このとき

$$\sin \alpha = 1 \quad \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3}{4}\pi\right)$$

より

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ である。} \quad \text{■}$$



2 $a > 0$ とし、 $f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos ax| dx$ とする。次の問に答えよ。(50点)

問1 $0 < a < 1$ のとき、 $f(a)$ を求めよ。

問2 $\lim_{a \rightarrow +0} f(a)$ を求めよ。

問3 自然数 n に対して、 $f(n)$ を求めよ。

解答

問1 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 \leq ax \leq \frac{\pi}{2} a < \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 < a < 1$)

よって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\cos ax > 0$ であるから

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax \, dx = \left[\frac{1}{a} \sin ax \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a} \sin \frac{\pi}{2} a \quad \text{㊟}$$

問2 問1より

$$\lim_{a \rightarrow +0} f(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a} \sin \frac{\pi}{2} a = \frac{\pi}{2} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} a}{\frac{\pi}{2} a} = \frac{\pi}{2} \quad \text{㊟}$$

問3 $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| dx$ (n は自然数) について、

$y = |\cos nx|$ の周期は $\frac{\pi}{n}$ であり、そのグラフの y 軸に関する対称性を考えると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} |\cos nx| dx = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} |\cos nx| dx = \int_{\frac{3\pi}{2n}}^{\frac{5\pi}{2n}} |\cos nx| dx = \cdots = \int_{\frac{(n-1)\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| dx$$

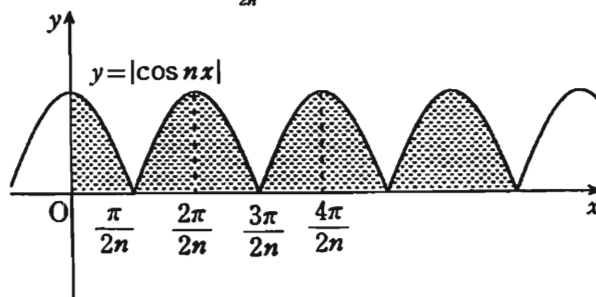
よって、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n} \times n$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos nx \, dx$$

が成り立つ。

したがって

$$f(n) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos nx \, dx \right) \times n = n \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2n}} = 1 \quad \text{㊟}$$



3 n を2以上の自然数とする。次の問に答えよ。(50点)

問1 定積分 $\int_1^n x \log x \, dx$ を求めよ。

問2 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) < \sum_{k=1}^n k \log k < \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) + n \log n$$

問3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} \right\}$ を求めよ。

解答

問1 $\int_1^n x \log x \, dx = \int_1^n \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1)$ 終

問2 $f(x) = x \log x$ とおくと

$$f'(x) = \log x + 1$$

よって、 $x \geq 1$ のとき、 $f'(x) > 0$ であるから、 $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調に増加する。

$k \leq x \leq k+1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$) において

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$$

であるから

$$\int_k^{k+1} f(k) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \int_k^{k+1} f(k+1) \, dx$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(k) \, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(k+1) \, dx$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(k) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) - f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(k+1) \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^n f(k) \quad (\because f(1) = 0)$$

また

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) \, dx = \int_1^n f(x) \, dx$$

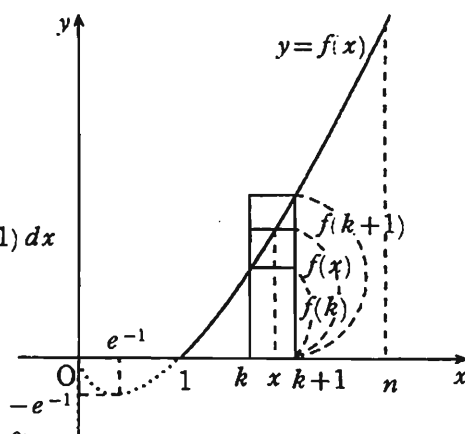
であるから

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(n) \leq \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \quad \therefore \int_1^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) \, dx + f(n)$$

すなわち

$$\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) \leq \sum_{k=1}^n k \log k \leq \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) + n \log n$$

が成り立つ。 終



【解答】(前頁 3) の続き

問3 $I_n = (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}}$, $J_n = \int_1^n x \log x \, dx$ とする。

問2より

$$J_n < \sum_{k=1}^n k \log k < J_n + n \log n$$

$$\therefore \frac{J_n}{n^2 \log n} < \frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n k \log k < \frac{J_n}{n^2 \log n} + \frac{1}{n}$$

ここで

$$\frac{J_n}{n^2 \log n} = \frac{1}{n^2 \log n} \left\{ \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1) \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{n^2 \log n} \right)$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{n^2 \log n} = \frac{1}{2}$$

であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{J_n}{n^2 \log n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n k \log k \right) = \frac{1}{2}$$

また

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n k \log k &= \frac{1}{n^2 \log n} (1 \cdot \log 1 + 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 + \dots + n \cdot \log n) \\ &= \frac{1}{n^2 \log n} \log(1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n) \\ &= \log(1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} \\ &= \log I_n \end{aligned}$$

と変形できるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log I_n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \quad \square$$

- 4 1個のサイコロを投げ、座標平面内の原点 O から出発する点 P を、次の規則にしたがって動かすとする。

- ・出たサイコロの目が1ならば、 x 軸の正の向きに1動かす。
- ・出たサイコロの目が2ならば、 x 軸の負の向きに1動かす。
- ・出たサイコロの目が3ならば、 y 軸の正の向きに1動かす。
- ・出たサイコロの目が4ならば、 y 軸の負の向きに1動かす。
- ・出たサイコロの目が5か6ならば、動かさない。

このとき、次の問に答えよ。(50点)

問1 3回サイコロを投げるとき、 $OP=1$ となる確率を求めよ。

問2 7回サイコロを投げるとき、 $OP=5$ となる確率を求めよ。

解答

x 軸、 y 軸の正の向きに1動かすときをそれぞれ「→」、「↑」で表し、
 x 軸、 y 軸の負の向きに1動かすときをそれぞれ「←」、「↓」で、
 動かさないときを「×」で表すことにする。

このとき、毎回の試行における「→」、「↑」、「←」、「↓」の確率はいずれも $\frac{1}{6}$ で、

「×」の確率は $\frac{1}{3}$ である。

問1 サイコロを3回投げたときの点 P の座標を $P(x, y)$ とすると、 $OP=1$ より、 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす整数の組 (x, y) を求めて、 $P(\pm 1, 0)$ 、 $P(0, \pm 1)$ の4通りある。

これら4点に達する確率はいずれも等しい。

そこで、 $P(1, 0)$ に達する確率を求める。

(i) 「××→」の場合、順序も考えて

$$\frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \quad (= {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6})$$

(ii) 「→→←」の場合、順序も考えて

$$\frac{3!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72} \quad (= {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6})$$

(iii) 「↑↓→」の場合、順序も考えて

$$3! \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

よって、 $P(1, 0)$ に達する確率は $\frac{1}{18} + \frac{1}{72} + \frac{1}{36} = \frac{7}{72}$ であるから、

求める確率は $\frac{7}{72} \times 4 = \frac{7}{18}$ である。 **終**

【解答】(前頁 4) の続き

問2 問1と同様にして、 $OP=5$ より、 $x^2+y^2=25$ を満たす整数の組 (x, y) を求めて、

$P(\pm 3, \pm 4)$, $P(\pm 4, \pm 3)$, $P(\pm 5, 0)$, $P(0, \pm 5)$ の12通りある。

これら12点のうち、対称性を考えて

$P(\pm 3, \pm 4)$, $P(\pm 4, \pm 3)$ の8点に達する確率はいずれも等しく、

$P(\pm 5, 0)$, $P(0, \pm 5)$ の4点に達する確率はいずれも等しい。

まず、 $P(3, 4)$ に達する確率を求める。

「 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$ 」の場合で、順序も考えて

$$\frac{7!}{3!4!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{35}{6^7} \quad (= {}_7C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4)$$

次に、 $P(5, 0)$ に達する確率を求める。

(i) 「 $\times \times \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 」の場合、順序も考えて

$$\frac{7!}{2!5!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{21 \times 4}{6^7} \quad (= {}_7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^5)$$

(ii) 「 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow$ 」の場合、順序も考えて

$$\frac{7!}{6!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{7}{6^7} \quad (= {}_7C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6)$$

(iii) 「 $\uparrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 」の場合、順序も考えて

$$\frac{7!}{5!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{7 \times 6}{6^7} \quad (= {}_7C_5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6})$$

以上より、求める確率は

$$\frac{35}{6^7} \times 8 + \frac{21 \times 4 + 7 + 7 \times 6}{6^7} \times 4 = \frac{7 \times 4}{6^7} (5 \times 2 + 12 + 1 + 6) = \frac{7 \times 29}{9 \times 6^5} = \frac{203}{69984}$$

である。 図

1 次の問に答えよ。(50点)

問1 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ。

問2 a, b を実数とする。 x の方程式 $x^2 + ax + 4 = 0$ が $-1 + bi$ をもつとき, a, b の値を求めよ。
ただし, i は虚数単位とする。

問3 $0 < a < 1$ とする。このとき, x の不等式 $\log_a(x-1) \geq \log_a(x+11)$ を解け。

解答

問1
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \quad (\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0)$$

よって, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

等号が成り立つのは, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ すなわち $a = b$ のときのみである。 終

問2 $b = 0$ のとき, 解 $x = -1$ であるから, 与えられた方程式に代入して

$$1 - a + 4 = 0$$

$$\therefore a = 5$$

$b \neq 0$ のとき, 与えられた方程式は実数係数の方程式であるから, $x = -1 - bi$ も解である。

よって

$$\begin{cases} (-1 + bi) + (-1 - bi) = -a \\ (-1 + bi)(-1 - bi) = 4 \end{cases}$$

が成り立つから (解と係数の関係)

$$a = 2, b = \pm\sqrt{3}$$

以上より

$$(a, b) = (5, 0), (2, \pm\sqrt{3}) \quad \text{終}$$

解答 (前頁 1 の続き)

問3 $\log_a(x-1) \geq \log_{a^2}(x+11) \dots \textcircled{1}$

真数について

$$x-1 > 0 \text{ かつ } x+11 > 0$$

$$\therefore x > 1 \dots \textcircled{2}$$

①は

$$\log_a(x-1) \geq \frac{\log_a(x+11)}{\log_a a^2} = \frac{\log_a(x+11)}{2}$$

$$2\log_a(x-1) \geq \log_a(x+11)$$

$$\log_a(x-1)^2 \geq \log_a(x+11)$$

と変形できて、 $0 < a < 1$ であるから

$$(x-1)^2 \leq x+11$$

これを解いて

$$x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$(x+2)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 5$$

②より、求める解は

$$1 < x \leq 5 \quad \text{答}$$

参考 対数関数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) において

$a > 1$ のとき、 y は単調に増加するから

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

$0 < a < 1$ のとき、 y は単調に減少するから

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

2 次の問に答えよ。(50点)

問1 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

問2 放物線 $y = x^2 + px + q$ を C_1 とし、放物線 $y = -x^2$ を C_2 とする。 C_1 は直線 $y = 2x$ 上に頂点をもち、 C_2 と相異なる2点で交わるとする。 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が最大となる実数 p, q の値と、そのときの面積を求めよ。

解答

$$\begin{aligned} \text{問1} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\{2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3(\alpha + \beta)^2 + 6\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)(-\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \text{終} \end{aligned}$$

別解 $\int (x - a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x - a)^{n+1} + C$ (C は積分定数) を用いて以下のようにも証明できる。

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) + (\alpha - \beta)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

【解答】(前頁 2) の続き)

問2 $C_1: y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$

の頂点 $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$ が直線 $y = 2x$ 上にあるから

$$-\frac{p^2}{4} + q = -p \quad \therefore q = \frac{p^2}{4} - p \quad \dots \textcircled{1}$$

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2 + px + q = -x^2$$

より

$$2x^2 + px + q = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

の実数解である。②が実数解をもつことから

$$p^2 - 8q > 0$$

①より

$$p^2 - 8\left(\frac{p^2}{4} - p\right) > 0$$

$$p(p-8) < 0 \quad \therefore 0 < p < 8$$

また、②の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$\alpha = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 8q}}{4}, \quad \beta = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 8q}}{4}$$

より

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{p^2 - 8q}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 - (x^2 + px + q)\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 + px + q) dx = -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \right\} = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

であり、③より

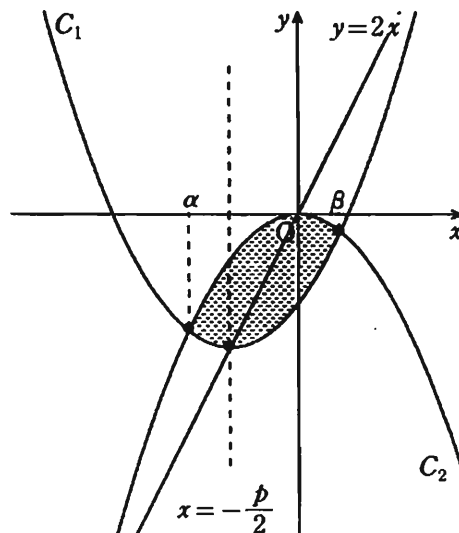
$$S = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{p^2 - 8q}}{2} \right)^3 = \frac{1}{24} (\sqrt{-p^2 + 8p})^3 = \frac{1}{24} (\sqrt{-(p-4)^2 + 16})^3$$

ここで、 $0 < p < 8$ より、 $-(p-4)^2 + 16$ は $p=4$ で最大値 16 をとるから

$$S \text{ は } p=4 \text{ で最大値 } \frac{1}{24} \cdot 4^3 = \frac{8}{3} \text{ をとる。}$$

以上より、

$p=4, q=0$ のとき面積は最大となり、そのときの面積は $\frac{8}{3}$ である。 図



1 座標平面内の原点を通る直線 $y=ax$ を ℓ で表す。 ℓ 上にない点 $P(x, y)$ から ℓ におろした垂線と

ℓ との交点を $Q(x', y')$ とする。次の問に答えよ。(50点)

問1 行列 A を用いて、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を書いたとき、 A を求めよ。

問2 $a = \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 n を自然数、 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とし、 E を単位行列とすると、
行列 $\{J(2A - E)\}^n$ を θ を用いて表せ。

解答

問1 点 $Q(x', y')$ は直線 $\ell : ax - y = 0$ 上にあるから

$$ax' - y' = 0 \quad \cdots \text{①}$$

$PQ \perp \ell$ より

$$1 \cdot (x - x') + a(y - y') = 0$$

$$\therefore x' + ay' = x + ay \quad \cdots \text{②}$$

①, ②より

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots \text{③}$$

と表される。

$a^2 - (-1) \cdot 1 = a^2 + 1 \neq 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

よって、③の両辺に左から $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{終}$$

【解答】(前頁 1) の続き)

$$\begin{aligned}
 \text{問2} \quad J(2A-E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ -2a & -2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2-(a^2+1) & 2a \\ -2a & -2a^2+a^2+1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ -2a & 1-a^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$a = \tan \theta$ のとき

$$\begin{aligned}
 J(2A-E) &= \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \begin{pmatrix} 1 - \tan^2 \theta & 2 \tan \theta \\ -2 \tan \theta & 1 - \tan^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \cos^2 \theta \begin{pmatrix} 1 - \tan^2 \theta & 2 \tan \theta \\ -2 \tan \theta & 1 - \tan^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(-2\theta) & -\sin(-2\theta) \\ \sin(-2\theta) & \cos(-2\theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

これは、原点 O の周りに角 -2θ だけ回転する 1 次変換を表す行列であるから

$$\begin{aligned}
 \{J(2A-E)\}^n &= \begin{pmatrix} \cos(-2n\theta) & -\sin(-2n\theta) \\ \sin(-2n\theta) & \cos(-2n\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2n\theta & \sin 2n\theta \\ -\sin 2n\theta & \cos 2n\theta \end{pmatrix} \quad \square
 \end{aligned}$$

2 $x > 1$ において、関数 $f(x) = x \log x - (x-1) \log(x-1)$ を考える。次の問に答えよ。(50点)

問1 $x > 1$ のとき、 $f(2x) - f(x)$ は減少関数であることを示せ。

問2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(2x) - f(x)\}$ を求めよ。

問3 次の不等式が成り立つことを示せ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であることは用いてよい。

$$\log 2 < f(2x) - f(x) < 2 \log 2$$

解答

問1 $f(x) = x \log x - (x-1) \log(x-1)$ より

$$f'(x) = \log x + 1 - \log(x-1) - 1 = \log \frac{x}{x-1}$$

よって、 $g(x) = f(2x) - f(x)$ ($x > 1$) とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f'(2x) - f'(x) = 2 \log \frac{2x}{2x-1} - \log \frac{x}{x-1} = \log \left\{ \left(\frac{2x}{2x-1} \right)^2 \cdot \frac{x-1}{x} \right\} \\ &= \log \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2} = \log \frac{(2x-1)^2 - 1}{(2x-1)^2} = \log \left\{ 1 - \frac{1}{(2x-1)^2} \right\} < \log 1 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(x) < 0$$

よって、 $x > 1$ のとき $g(x)$ すなわち $f(2x) - f(x)$ は減少関数である。 ㊟

問2 $g(x) = f(2x) - f(x) = \{2x \log 2x - (2x-1) \log(2x-1)\} - \{x \log x - (x-1) \log(x-1)\}$

$$\begin{aligned} &= \log \frac{2x^{2x}}{(2x-1)^{2x-1}} - \log \frac{x^x}{(x-1)^{x-1}} = \log \left\{ 2x \cdot \left(\frac{2x}{2x-1} \right)^{2x-1} \right\} - \log \left\{ x \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)^{x-1} \right\} \\ &= \log 2x + \log \left(1 + \frac{1}{2x-1} \right)^{2x-1} - \log x - \log \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \\ &= \log 2 + \log \left(1 + \frac{1}{2x-1} \right)^{2x-1} - \log \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \log 2 + \log e - \log e = \log 2 \quad \text{㊟}$$

参考 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

問3 $\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(2x) - f(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(2x) - \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(2) = 2 \log 2$

であり、問1、問2より、

$$g(x) \text{ は } x > 1 \text{ で減少関数、} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \log 2$$

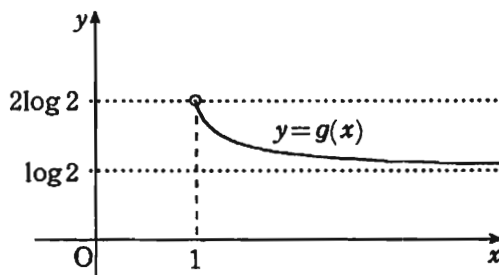
であるから

$$\log 2 < g(x) < 2 \log 2$$

すなわち

$$\log 2 < f(2x) - f(x) < 2 \log 2$$

が成り立つ。 ㊟



3 $x \geq 0$ において、関数 $f(x) = -xe^{-x^2}$ を考える。次の問に答えよ。(50点)

- 問1 $y = f(x)$ の接線で、傾きが最大であるものを求めよ。
 問2 問1 で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ は接点以外に共有点を持たないことを示せ。
 問3 問1 で求めた接線と、曲線 $y = f(x)$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

問1 $f(x) = -xe^{-x^2}$ より

$$f'(x) = -\{e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x)\} = (2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 4xe^{-x^2} + (2x^2 - 1)e^{-x^2} \cdot (-2x) = (-4x^3 + 6x)e^{-x^2} = -4x\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)e^{-x^2}$$

x	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+	最大	+
$f''(x)$	0	+		+	0	-
$f(x)$		↘		↗		↗

増減表より

$$f'(x) \text{ は } x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ で最大値 } f'\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 2e^{-\frac{3}{2}} \text{ をとる。}$$

よって、求める接線の方程式は

$$y - f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

であるから

$$y = 2e^{-\frac{3}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore y = 2e^{-\frac{3}{2}}x - \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{答}$$

【解答】(前頁 3) の続き)

問2 $g(x)=2e^{-\frac{3}{2}}x-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ とすると、題意より、方程式 $f(x)=g(x)$ が、 $x \geq 0$ においてただ1つの実数解をもつことを示せばよい。

$h(x)=f(x)-g(x)$ ($x \geq 0$) とおくと

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=(2x^2-1)e^{-x^2}-2e^{-\frac{3}{2}} \leq 0 \quad (\because f'(x) \leq 2e^{-\frac{3}{2}})$$

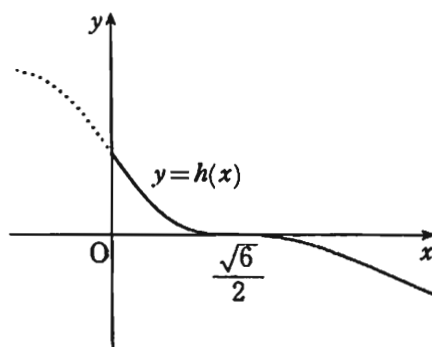
であるから、 $h(x)$ は $x \geq 0$ で単調に減少する。

かつ、 $h\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=0$ であるから、

方程式 $h(x)=0$ は、 $x \geq 0$ において

ただ1つの実数解 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ をもつ。

以上より、題意は示された。 ㊟



問3 $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ において、 $f(x) \geq g(x)$ であるから、

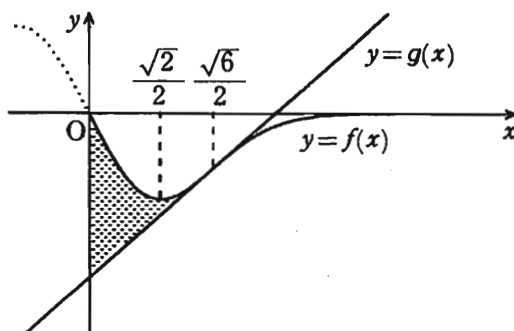
求める面積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left\{ -xe^{-x^2} - \left(2e^{-\frac{3}{2}}x - \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \right) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-x^2} - e^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}x \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\frac{3}{2}} - 1) - \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(7e^{-\frac{3}{2}} - 1) \quad \text{㊟}$$



4 α, β を正の定数とする。すべての自然数 n に対して

$$(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)^2 = 1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta$$

が成立するとき、 α, β を求めよ。(50点)

解答

$$(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)^2 = 1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta \quad \dots (*)$$

において、(すべての自然数 n について成立するから)

$n=2$ のとき

$$(1+2^\alpha)^2 = 1+2^\beta \quad \text{より} \quad 2 \cdot 2^\alpha + 2^{2\alpha} = 2^\beta$$

$$\therefore 2+2^\alpha = 2^{\beta-\alpha} \quad (\because 2^\alpha \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

$n=4$ のとき

$$\{(1+2^\alpha+3^\alpha)+4^\alpha\}^2 = 1+2^\beta+3^\beta+4^\beta \quad \text{より} \quad (1+2^\alpha+3^\alpha)^2 + 2 \cdot 4^\alpha(1+2^\alpha+3^\alpha) + 4^{2\alpha} = 1+2^\beta+3^\beta+4^\beta$$

ここで、 $n=3$ のとき、 $(1+2^\alpha+3^\alpha)^2 = 1+2^\beta+3^\beta$ が成立するから

$$2 \cdot 4^\alpha(1+2^\alpha+3^\alpha) + 4^{2\alpha} = 4^\beta \quad \text{よって} \quad 2(1+2^\alpha+3^\alpha) + 4^\alpha = 4^{\beta-\alpha} \quad (\because 4^\alpha \neq 0)$$

$$\therefore 2(1+2^\alpha+3^\alpha) + 2^{2\alpha} = (2^{\beta-\alpha})^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$2(1+2^\alpha+3^\alpha) + 2^{2\alpha} = (2+2^\alpha)^2$$

$$\therefore 3^\alpha = 2^\alpha + 1$$

これを満たす自然数 α は $\alpha=1$ のみであり、このとき、 $\beta=3$ である。

逆に、 $\alpha=1, \beta=3$ のとき、

(*) の左辺は

$$(1+2+\cdots+n)^2 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

(*) の右辺は

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

であるから、(*) はすべての自然数 n に対して成立する。

以上より、 $\alpha=1, \beta=3$ である。 $\square$

[補足] $f(\alpha) = 3^\alpha - 2^\alpha - 1$ ($\alpha > 0$) とおくと、

$$f'(\alpha) = 3^\alpha \log 3 - 2^\alpha \log 2$$

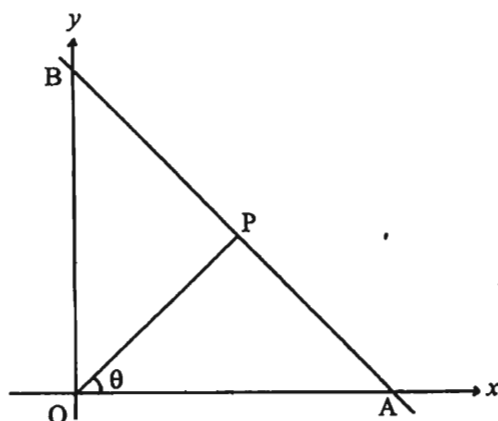
$$= 3^\alpha \log 3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^\alpha \frac{\log 2}{\log 3} \right\} > 0 \quad (\because \alpha > 0)$$

より、 $f(\alpha)$ は単調に増加して、かつ、 $f(1)=0$ であるから

$f(\alpha)=0$ は $\alpha > 0$ においてただ1つの実数解 $\alpha=1$ をもつ。

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1



図で $OP = 1$, $OP \perp AB$ より, $OA = \frac{1}{\cos \theta}$, $OB = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{1}{\sin \theta}$ となる。

$OP = 1$, $OP \perp AB$ より, $\triangle OAB$ の面積 $= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}OA \cdot OB$ となり, $AB = \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$ となるので,

$$OA + OB - AB = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$$

問 2 $f(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$ とおく。 θ が動く範囲は, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta - \cos \theta - \sin \theta)}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	/	-	0	+	/
$f(\theta)$	/	\	最小	/	/

従って増減表は, 上のようになり, 求める最小値は, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - 2$

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $0 < a < 1$ のとき $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos ax > 0$ だから,

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax \, dx = \left[\frac{\sin ax}{a} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} a}{a}$$

問 2

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} a}{a} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\pi \sin \frac{\pi}{2} a}{2 \cdot \frac{\pi}{2} a} = \frac{\pi}{2}$$

問 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| \, dx$ において, $t = nx$ とおくと, $dt = n dx$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\cos t| \, dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} |\cos t| \, dt$$

ここで, $u = t - \frac{(k-1)\pi}{2}$ とおくと, $dt = du$ で

$$\begin{aligned} \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} |\cos t| \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos \left(u + \frac{(k-1)\pi}{2} \right) \right| \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos u \cos \frac{(k-1)\pi}{2} - \sin u \sin \frac{(k-1)\pi}{2} \right| \, du \end{aligned}$$

従って,

$$\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} |\cos t| \, dt = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, du = \left[\sin u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 & k \text{ が奇数} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = \left[-\cos u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 & k \text{ が偶数} \end{cases}$$

$$\text{となり, } f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| \, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$$

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\int_1^n x \log x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^n - \frac{1}{2} \int_1^n x \, dx = \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} [x^2]_1^n = \frac{n^2}{2} \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1)$$

問 2

$(x \log x)' = \log x + 1$ より, $x \geq 1$ で $(x \log x)' > 0$ となり, この範囲で $x \log x$ は増加する.

$y = x \log x$ のグラフの概形は, $x \geq 1$ で下図の曲線になる.

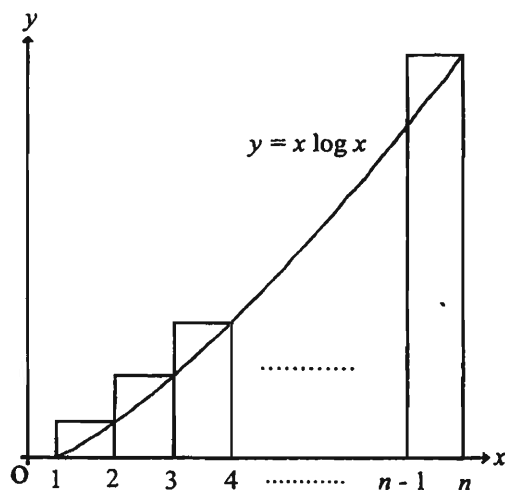


図 1

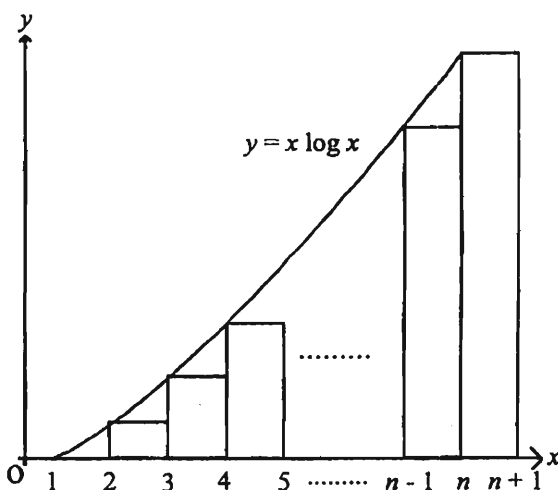


図 2

$\sum_{k=1}^n k \log k = \sum_{k=2}^n k \log k$ は図 1 の長方形部分の面積の総和であることを用いると,

$$\sum_{k=1}^n k \log k > \int_1^n x \log x \, dx = \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1)$$

また $\sum_{k=1}^n k \log k = \sum_{k=2}^{n-1} k \log k + n \log n$ は図 2 の長方形部分の面積の総和であることを用いると,

$$\sum_{k=1}^n k \log k < \int_1^n x \log x \, dx + n \log n = \frac{1}{2} n^2 \log n - \frac{1}{4} (n^2 - 1) + n \log n$$

問 3 $a_n = (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}}$ とおくと,

$$\log a_n = \frac{1}{n^2 \log n} \log (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n) = \frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n k \log k$$

問 1, 問 2 の結果より,

$$\frac{1}{2} - \frac{\frac{n^2-1}{4}}{n^2 \log n} < \log a_n < \frac{1}{2} - \frac{\frac{n^2-1}{4}}{n^2 \log n} + \frac{n \log n}{n^2 \log n}$$

従って,

$$\frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{4 \log n} < \log a_n < \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{4 \log n} + \frac{1}{n}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{1}{2}$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} = \sqrt{e}$

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $OP = 1$ となるのは、 P が $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ に動くときである。規則の対称性から、これらが起こる確率は、すべて等しい。 P が $(1, 0)$ にあるためには 1 が少なくとも 1 回出なければならない。従って P が $(1, 0)$ に動くためには、

- 1 が 1 回出て、残りは 3, 4 が 1 回ずつ出る。
- 1 が 1 回出て、残り 2 回は 5 か 6 が出る。
- 1 が 2 回でて、2 が 1 回出る。

のいずれかである。それぞれの確率は、 ${}_3P_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3$, ${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2$, ${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^3$ だから、

P が $(0, 1)$ に動く確率は、 $\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{72} = \frac{7}{72}$ である。よって求める確率は、

$$4 \cdot \frac{7}{72} = \frac{7}{18}$$

問 2 7 回サイコロを投げたときの P の座標を (x, y) とすると、 $|x| + |y| \leq 7$ が成立する。 $OP = 5$ のときは、 $x^2 + y^2 = 25$ が成立する。 x, y は整数値なので、これを満たす x, y の組は、

$$(\pm 5, 0), (0, \pm 5), (\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3)$$

である。

7 回サイコロを投げたとき、点 P が $(5, 0)$ に動くには、次のような目の出方となる。

- 1 が 5 回出て、残りを 3, 4 が 1 回ずつ出る。
- 1 が 5 回出て、残り 2 回は 5 か 6 が出る。
- 1 が 6 回出て、2 が 1 回出る。

それぞれの確率は、 ${}_7C_5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$, ${}_7C_5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2$, ${}_7C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^7$ となる。

P が $(-5, 0), (0, \pm 5)$ に動く確率も同じ値である。

点 P が $(3, 4)$ に動く確率は、1 が 3 回、3 が 4 回出る確率なので、 ${}_7C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^7$ である。

P が $(3, -4), (-3, 4), (-3, -4), (\pm 4, \pm 3)$ に動く確率も同じ値になる。

従って求める確率は、

$$4 \left\{ {}_7C_5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 + {}_7C_5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \right\} + 8 {}_7C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^7 = \frac{4 \cdot 7 \cdot 29}{6^7} = \frac{203}{69984}$$

乙 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ より、 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ となる。よって、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

問 2 $x = -1+bi$ を代入して

$$(-1+bi)^2 + a(-1+bi) + 4 = -(a+b^2-5) - i(2b-ab) = 0$$

よって、

$$\begin{cases} a+b^2-5=0 \\ b(2-a)=0 \end{cases}$$

これを解いて

$$(a, b) = (5, 0), (2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})$$

問 3 真数は正であるから、 $x-1 > 0$ かつ $x+11 > 0$ より、 $x > 1$ である。

$$\log_{a^2}(x+11) = \frac{\log_a(x+11)}{\log_a a^2} = \frac{\log_a(x+11)}{2}$$

よって、 $\log_a(x-1) \geq \log_{a^2}(x+11)$ は

$$\log_a(x-1)^2 \geq \log_a(x+11)$$

となる。 $0 < a < 1$ だから

$$(x-1)^2 \leq x+11$$

これを解くと、

$$-2 \leq x \leq 5$$

$x > 1$ とあわせて

$$1 < x \leq 5$$

2 [これと解法が違っても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\end{aligned}$$

問 2 C_1 の頂点を $(t, 2t)$ とおくと, C_1 の式は

$$y = (x-t)^2 + 2t = x^2 - 2tx + t^2 + 2t$$

となる。よって, C_1 と C_2 の交点の x 座標は

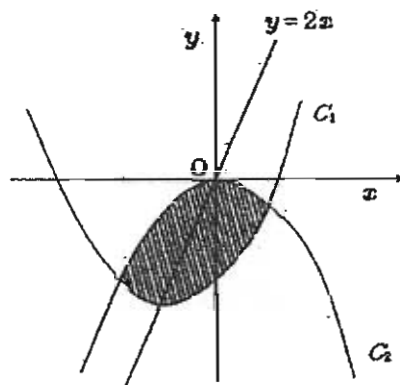
$$-x^2 = x^2 - 2tx + t^2 + 2t$$

より, x の二次方程式

$$2x^2 - 2tx + t^2 + 2t = 0$$

を満たす。よって

$$x = \frac{1}{2} \left(t \pm \sqrt{-t^2 - 4t} \right)$$



これが相異なる実数であるので

$$-4 < t < 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

である。この二つの解を $\alpha < \beta$ とおくと, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 - (x^2 - 2tx + t^2 + 2t)\} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 + 2tx - t^2 - 2t) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} \left(\sqrt{-t^2 - 4t} \right)^3\end{aligned}$$

$-t^2 - 4t = -(t+2)^2 + 4$ より, $t = -2$ は (1) を満たすから, $t = -2$ のとき最大値 $\frac{1}{3}\sqrt{4}^3 = \frac{8}{3}$ をとる。 $t = -2$ のとき C_1 は $y = x^2 + 4x$ だから $p = 4$, $q = 0$, そのときの面積 $\frac{8}{3}$

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

その 1

問 1 点 Q は l 上にあるので $y' = ax'$ である。また l の方向ベクトル $(1, a)$ と $\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y)$ は直交するので

$$0 = 1 \cdot (x' - x) + a \cdot (y' - y) = x' - x + a(ax' - y) = (1 + a^2)x' - (x + ay)$$

よって

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + ay}{1 + a^2} = \frac{1}{1 + a^2} \cdot x + \frac{a}{1 + a^2} \cdot y \\ y' &= ax' = \frac{a}{1 + a^2} \cdot x + \frac{a^2}{1 + a^2} \cdot y \end{aligned}$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

問 2

$$\begin{aligned} J(2A - E) &= \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{-2a}{1+a^2} & \frac{1-a^2}{1+a^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} & \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} & \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから

$$\{J(2A - E)\}^n = \begin{pmatrix} \cos 2n\theta & \sin 2n\theta \\ -\sin 2n\theta & \cos 2n\theta \end{pmatrix}$$

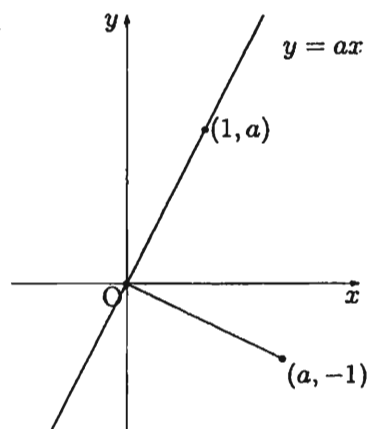
その2

問1 A の表す変換で、点 $(a, -1)$, $(1, a)$ はそれぞれ $(0, 0)$, $(1, a)$ にうつるから

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



問2 J は x 軸に関する折り返し。図から $2A - E$ は $\vec{P}$ を l に関する対称点にうつす。図のように角 α をとると、 $J(2A - E)$ は $\vec{P}$ を

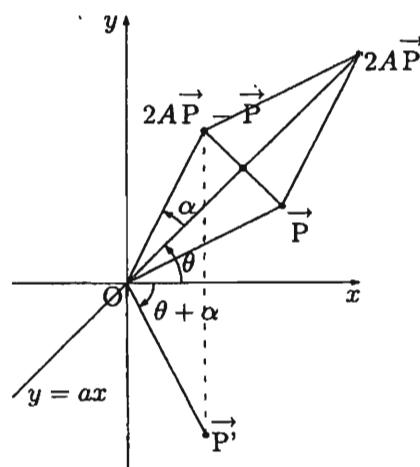
$$-(\theta - \alpha) - (\theta + \alpha) = -2\theta$$

だけ回転した点 $\vec{P'}$ にうつす。つまり

$$J(2A - E) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

よって

$$\{J(2A - E)\}^n = \begin{pmatrix} \cos 2n\theta & \sin 2n\theta \\ -\sin 2n\theta & \cos 2n\theta \end{pmatrix}$$



2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$f'(x) = \{x \log x - (x-1) \log(x-1)\}' = \log x - \log(x-1) = \log \frac{x}{x-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} \{f(2x) - f(x)\}' &= 2f'(2x) - f'(x) \\ &= 2 \log \frac{2x}{2x-1} - \log \frac{x}{x-1} \\ &= \log \frac{4x^2(x-1)}{(2x-1)^2x} \\ &= \log \frac{(2x-1)^2 - 1}{(2x-1)^2} \\ &= \log \left\{ 1 - \frac{1}{(2x-1)^2} \right\} < \log 1 = 0 \end{aligned}$$

すなわち $\{f(2x) - f(x)\}' < 0$, つまり $f(2x) - f(x)$ は減少関数。

問 2

$$\begin{aligned} f(2x) - f(x) &= 2x \log(2x) - (2x-1) \log(2x-1) - x \log x + (x-1) \log(x-1) \\ &= \log \frac{(2x)^{2x} (x-1)^{x-1}}{(2x-1)^{2x-1} x^x} \\ &= \log \frac{2x \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{2x-1}}{x \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1}} \\ &= \log \frac{2 \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)^{2x-1}}{\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}} \\ &\rightarrow \log \frac{2e}{e} = \log 2 \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

問 3

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(2x) - f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \{2x \log(2x) - (2x-1) \log(2x-1) - x \log x + (x-1) \log(x-1)\} \\ &= 2 \log 2 - 1 \cdot \log 1 - 1 \cdot \log 1 + 0 \\ &= 2 \log 2 \end{aligned}$$

したがって、問 1, 問 2 より

$$\log 2 < f(2x) - f(x) < 2 \log 2$$

が成り立つ。

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$f'(x) = -e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (2x^2 - 1)$$

$$f''(x) = e^{-x^2} (-4x^3 + 6x) = -4xe^{-x^2} (x^2 - \frac{3}{2})$$

だから $x \geq 0$ の範囲で $f''(x) = 0$ となるのは $x = 0, \sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき。よって $f'(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
f''	0	+	0 -
f'		↗	↘

したがって $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ で $f'(x)$ は最大となる。 $f'(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 2e^{-\frac{3}{2}}, f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$ だから求める接線は

$$y = 2e^{-\frac{3}{2}}(x - \sqrt{\frac{3}{2}}) - \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}} = 2e^{-\frac{3}{2}}x - 3\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$$

問 2

$$g(x) = f(x) - (2e^{-\frac{3}{2}}x - 3\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}) = f(x) - f'(\sqrt{\frac{3}{2}})(x - \sqrt{\frac{3}{2}}) + f(\sqrt{\frac{3}{2}})$$

とおくと共有点の x 座標は $g(x) = 0$ をみtas。 $x \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$ ならば、問 1 より、

$$g'(x) = f'(x) - f'(\sqrt{\frac{3}{2}}) < 0$$

だから $g(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
g'	-	0	-
g		↘	↘

よって $g(x)$ は減少関数であり、 $g(x) = 0$ となるのは $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ のときのみ。

問 3 問 2 より、求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (-xe^{-x^2} - 2e^{-\frac{3}{2}}x + 3\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}) dx = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2} - e^{-\frac{3}{2}}x^2 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}x \right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{7}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$$

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

その1

$$(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)^2 = 1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta$$

より

$$\left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \right)^2 = \frac{1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta}{n^{\beta+1}} \times n^{\beta+1-2(\alpha+1)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで

$$\begin{aligned} f_\alpha(n) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^\alpha} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha + \left(\frac{2}{n} \right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^\alpha \right\} \end{aligned}$$

とおくと①より

$$\frac{\{f_\alpha(n)\}^2}{f_\beta(n)} = n^{\beta-2\alpha-1} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_\alpha(n) = \int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

だから②より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2\alpha-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f_\alpha(n)\}^2}{f_\beta(n)} = \frac{\beta+1}{(\alpha+1)^2}$$

となる。この右辺は正定数だから、左辺のべき $\beta-2\alpha-1$ は0でなくてはならず、このとき左辺、よって右辺も1となる。つまり

$$\beta-2\alpha-1=0, \quad \frac{\beta+1}{(\alpha+1)^2} = 1$$

となり、これを解くと $\alpha=1, \beta=3$ となる。実際このとき、帰納法により

$$\begin{aligned} 1^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 &= \{1 + \cdots + (n-1)\}^2 + n^3 \\ &= \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}^2 + n^3 \\ &= \frac{n^2 \{(n-1)^2 + 4n\}}{2^2} \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= (1 + \cdots + n)^2 \end{aligned}$$

を確かめられる。よって

$$\alpha=1, \quad \beta=3$$

その 2 すべての自然数 n に対して

$$\begin{aligned} \{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha + (n+1)^\alpha\}^2 &= 1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta + (n+1)^\beta \\ (1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)^2 &= 1^\beta + 2^\beta + \cdots + n^\beta \end{aligned}$$

が成り立つ。差をとると、

$$\{2(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha) + (n+1)^\alpha\}(n+1)^\alpha = (n+1)^\beta$$

となるから、 $\gamma = \beta - \alpha$ とおくと、すべての自然数 n にたいして

$$2(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha) + (n+1)^\alpha = (n+1)^\gamma$$

が成り立つ。 $n = 1, 2, 3$ を代入して

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2^\alpha = 2^\gamma & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 2(1 + 2^\alpha) + 3^\alpha = 3^\gamma & \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \\ 2(1 + 2^\alpha + 3^\alpha) + 4^\alpha = 4^\gamma & \cdots \cdots \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。③より

$$4^\gamma = (2^\gamma)^2 = (2 + 2^\alpha)^2 = 4 + 4 \cdot 2^\alpha + 4^\alpha$$

これを⑤に代入して

$$2(1 + 2^\alpha + 3^\alpha) + 4^\alpha = 4 + 4 \cdot 2^\alpha + 4^\alpha$$

よって

$$1 + 2^\alpha = 3^\alpha$$

これを④に代入すると

$$3^\gamma = 2 \cdot 3^\alpha + 3^\alpha = 3 \cdot 3^\alpha = 3^{\alpha+1}$$

よって $\gamma = \alpha + 1$ である。これを③に代入すると

$$2 + 2^\alpha = 2^{\alpha+1} = 2 \cdot 2^\alpha$$

となり $2^\alpha = 2$ である。よって $\alpha = 1, \beta = 3$ でなくてはならない。すべての自然数 n に対して

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

が成り立つことが帰納法で容易に示せる。よって

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3$$

「高校数学教育を考える会」(平成 21 年 6 月 12 日, 於 西原高校)
における琉球大学入試問題に関する質疑応答まとめ

質問者：沖縄県高等学校数学教育会 大学入試問題研究委員会
 応答者：琉球大学 数学入試問題担当者

◆前期日程・数学甲 について◆

問題番号	範囲	出題分野	質問事項 & 返答	難易度
1.	数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ	図形と計量 三角関数 微分法の応用	(ア) 問題文で「x 軸の正の部分・・・と y 軸の正の部分・・・」とあるが、正しく読み取れていない受験生がいたのではないだろうか？ 答：読み取れていない受験生は実際にいました。 (イ) 問 2 では微分法を用いた解法と $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおいて式変形する解法があったと思われるが、どちらの解法を用いた受験生が多かったのか？ 答：微分法を用いた受験生が多かったようである。 (ウ) 問 2 では最小値をとるときの θ の値を示さなくても完全正解となるのか？ 答：増減表を書く時点で θ の値が示される。解答の流れの中で示されるはずなので、答として特に示さなくても完全正解となる。 (エ) 問 2 で琉球大学が提示した解答例において、増減表を示す前に、$\sin \theta - \cos \theta$ の合成等を示す必要があるのではないか？ 答：数学的に間違いがなければ、問題ない。 (オ) 受験生はどの程度できていたのか？ 答：(工学部の採点に限って) きちんとした、データがあるわけではないが、そんなにできている感じはない。	標準
2.	数学Ⅲ	積分法 関数の極限	(ア) 問 3 では関数のグラフの周期性を利用した解答では完全正解となるのか？ 答：この解答でも完全正解となる。 (イ) 問 3 は解答をうまく記述する力が求められると思われるが、実際の受験生のできはどうだったか？ 答：記述力を見ることも、この問題のねらいであった。しかし、ほぼ出来ていない。まず、問 2 が出来ていない。自然数の意味が分かっていない受験生も目に付いた。	やや難
3.	数学Ⅲ	積分法 積分法の応用 数列の極限	(ア) グラフ等を用いて解答する必要があったと思われるが、実際の受験生の解答はどうだったか？ 答：グラフを書かなくても、単調増加が示されていれば	標準

			よい。グラフは結構描けていたようである。しかし、思ったよりは正解者は少なかった。	
4.	数学A	確率	(7) 場合分けができていて、確率の計算で間違えた場合はどの程度の部分点が与えられるのか？ 答：場合分けだけでは、得点は与えていない。一つの場合と場合の数まで正解していれば、部分点を与えた。気になったのは、数え上げができない受験生がいる。泥臭く、しっかりと順序付けて数え上げる作業を普段からやっていないのではないか。 (4) 問2の計算はどの程度の受験生ができていたのか？ 答：あまりできていなかった。6の5乗などは計算していなくても、指数の形のまま答えていても正解とした。	標準
意見	全体的には各問題とも小問の設定がうまく考えられていて、良い問題構成であった。第4問の問2の確率の計算は少し厳しい出題であったと考える。また、入試に臨む受験生の心的状況を考えると、解答用紙（解答欄の配分等）は改善した方が良いのではないかな。			
琉球大学側からの試験後の感想	6割程度の平均を目指して作問している。実態は5割から4割の平均である。例年並み。一つ一つの問題はそんなに難しくないと考えている。時間がない受験生が多いのではないだろうか。今年度の出題は微分積分の領域が多かった。これは、高校でしっかりと微分積分を勉強してきて欲しいという考えがあるからである。例年、必ずしも微分積分が出題の中心となるわけではない。今年度は図形問題が出せなかったのは残念である。			

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・甲問題）のレベルを基準に、難易度を5段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

◆前期日程・数学乙 について◆

問題番号	範囲	出題分野	質問事項 & 返答	難易度
1.	数学Ⅱ	不等式の証明 複素数と2次方程式 対数関数	(7) 問1では等号成立の場合を記述しなくても完全正解となるのか？ 答：特に示さなくてもよい。気になったのは、証明すべき式から式変形していく解答があり、証明になっていない解答が結構見られた。 (4) 問2では$b=0$の場合の解が答えられなかった受験生も結構いたのではないかな？ 答：いたと思います。	易
2.	数学Ⅱ	積分法	(7) 問1は教科書レベルの問題と思われるが、どの程度の受験生ができていたのか？ 答：結構できていたと思う。 (4) 問1は$-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$の形まで因数分解できなくても、部分点がもれたのか？ 答：部分点は与えた。	標準

		(ウ) 問 2 では琉球大学が提示した解答例のように p, q 以外の文字 t を用いて解答している受験生はどの程度いたのか？ 答：いたと思うが、確かに p, q の文字を使って解いている受験生の方が多かった。	
意見	数学乙は教科書レベルの基本問題からの出題であったので、受験生がどの程度できていたか、高校側としても大変興味あるところである。出題に関しては、各大問の間 1 のような教科書の基本公式をその証明まで含めてきちんと理解しているかを問う出題は良い出題であったと考える。		
琉球大学側からの試験後の感想	数学乙問題の受験生のできが悪かった。ひどかった。受験生はしっかりと数学の勉強をしているのか疑問である。		

問題の難易度は例年の琉球大学（前期日程・乙問題）のレベルを基準に、難易度を 5 段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

◆後期日程 について◆

問題番号	範囲	出題分野	質問事項 & 返答	難易度
1.	数学C	行列	(ア) 問 1 は問題文で「l 上にある点 $p(x, y)$」という条件があるが、琉球大学が提示した解答例その 2 では l 上の点 $(1, a)$ を用いて解答しているのは不適切ではないか？この点を用いて解答した場合、受験生は完全正解となるのか？ 答：数学的に問題はないのでよい。問 1 に関しては、連立方程式が立てられても、変数 α が入った方程式が解けない受験生が目についた。 (イ) 問 2 の琉球大学が提示した解答例では、 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ の形から回転移動を表す行列と しているが、教科書では回転を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の形で扱うことになっている。受験生はこの形まで変形しなくても完全正解となるのか？ 答：数学的に問題はないのでよい。	やや易
2.	数学Ⅲ	微分法の応用 関数の極限	(ア) 問 2 はきちんと式変形する必要があるが、受験生の出来はあまり良くないのではないかと？ 答：出来は良くなかった。 (イ) 問 3 の証明問題において $\log 2 < f(2x) - f(x)$ だけや $f(2x) - f(x) < 2\log 2$ だけ示した受験生もいたのではないかと？その場合はどの程度の減点となるのか？	標準

			答：半分程度の部分点を与えた。	
3.	数学Ⅲ	微分法の応用 積分法の応用	この大問3に関しては、作問担当者が不在のため返答できないということであった。しかし、採点担当者から二次導関数を求めることができない受験生もいたという指摘があった。 (7) 問1では問題文を読み違えて、接線の方程式ではなく、傾きの値だけを答えた受験生もいたのではないだろうか？その場合は部分点はもらえるのか？ (4) 問2では、$y=f(x)$の概形から示した解答では完全正解となるのか？ (9) 問3では、曲線と直線の上下関係までは示さなくても完全正解となるのか？	標準
4.	数学Ⅰ 数学B または 数学Ⅲ	整数 数列の和 積分法の応用	(7) この問題の出題の意図は？ 答：思いついた問題を出題したというのが本音である。前期試験には厳しい問題なので後期試験で出題した。 (4) 琉球大学が提示した解答例の後半では帰納法を用いているが、数列の和の公式を用いて式変形すればよいのではないかと？ 答：良い。 (9) 大学入試研究委員会の提示した解答例でも完全正解となるか？補足の部分まで記述は必要か？ 答：正解となる。この解答であれば、補足まで解答する必要がある。 (5) 完全正解している受験生はいたのか？ 答：いませんでした。$\alpha=1$，$\beta=3$ が書けている受験生はいた。その理由まで、きちんと解答できている受験生はいなかった。	難
意見	問題構成は数学ⅢCが中心で、数理科学科の入試問題としては妥当な問題であったと考える。ただし、第4問の整数（自然数）の問題は受験生にとって大変難しい問題であったと考えられ、どれほどの受験生が正解していたのか興味のあるところである。			
琉球大学側からの試験後の感想	特になし。			

問題の難易度は例年の琉球大学（後期日程）のレベルを基準に、難易度を5段階【難・やや難・標準・やや易・易】で判断してあります。

◆入試全体について◆

(7) 問題毎の受験生の正答率ほどの程度か？

答：問題毎のきちんとしたデータはとっていない。全体的には、目標は平均が6割程度を考えていたが、実態は5割～4割のできだった。

(4) 問題毎の配点比率はどの程度か？

答：下に示した配点は、質疑応答の中で琉球大学側から、覚えている範囲で答えて頂いたものである。しかし、実際には、学部学科毎に異なるので、あくまで目安として捉える必要がある。空白部については不明。

◆前期試験 甲 問題◆

大問	小問	配点
1	問 1	20
	問 2	30
2	問 1	
	問 2	
	問 3	
3	問 1	10
	問 2	30
	問 3	10
4	問 1	15
	問 2	35

◆前期試験 乙 問題◆

大問	小問	配点
1	問 1	15
	問 2	15
	問 3	20
2	問 1	20
	問 2	30

◆後期試験◆

大問	小問	配点
1	問 1	20
	問 2	30
2	問 1	
	問 2	
	問 3	
3	問 1	
	問 2	
	問 3	
4	$\alpha = 1, \beta = 3$ が書かれていたら、15 点与えた。	

(9) 全体の最高得点、最低得点はどうなっているか？

答：記憶にある範囲で答えるということで答えて頂いた。下のようになる。

	前期甲	前期乙	後期
最高点	190	80~90	130
最低点	0	0	0に近い

(10) 合格者の最高得点、最低得点はどうなっているか

答：データを取っていないので、分からない。

(11) 受験生の計算力、記述力はどうか？

答：計算力もないし、基本的な数え上げもできていない。記述力を分析するレベルではない。解答は、ただ、式が羅列されているような感じである。あまりに汚い解答は見ない。

(12) 高校の指導に対する要望は？

答：個別学力試験の問題をできるようにすれば、センター試験はできるので、数学は解答をきちんと記述するように学習して欲しい。

高校で理数科のある学校は、情報Bを履修させて欲しい。