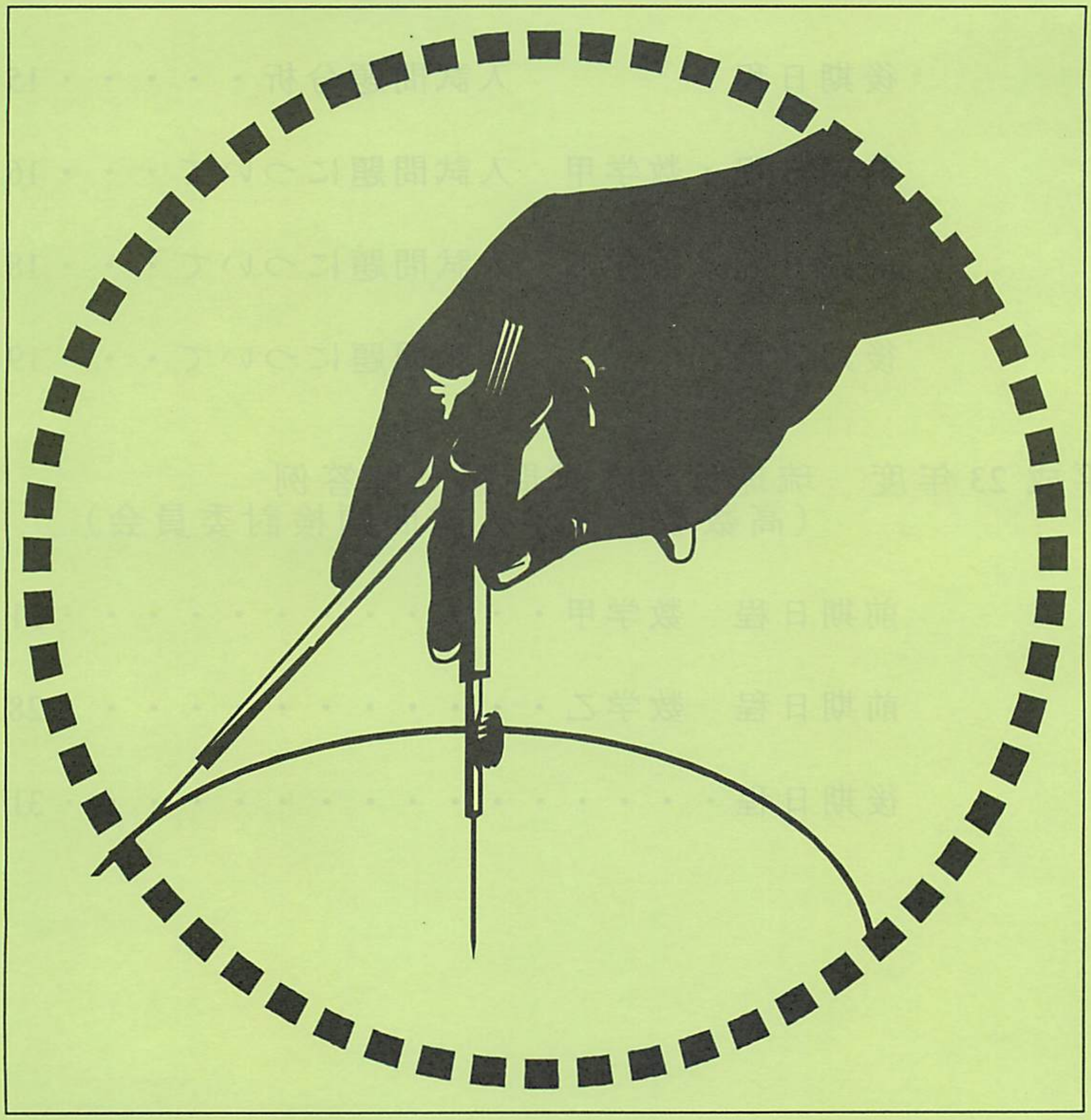
平成 23 年度
第 35 回　高校数学教育を考える会

（沖縄県高校数学教育会，琉球大学）



目 次

平成 23 年度　琉球大学入試問題（前期・甲）分析

《 総　論 》

今年度も大問が４つの構成で、昨年度の出題と同様の構成である。出題範囲については、数学Ａ、数学Ｂ、数学Ⅲ、数学Ｃから各１題ずつのバランスの良い出題であった。難易度に関しては、昨年度と比較して、全体的に易化したと考えられる。特に、$\boxed{3}$の確率の問題などは、センター試験レベルの問題であり、受験生にとって完答すべき問題である。ここ数年、甲問題の易化傾向が続いていると考えられる。受験生が普段の学習を通して、しっかりと基礎・基本を身に付けているかを問うにはまずますの良問であったと考える。

問題番号	科目	分野	難易度	コメント
$\boxed{1}$ 問１ 問２	数学Ｃ	行列	 易 標準	昨年度の$\boxed{1}$の問題とよく似た出題となっている。典型的な問題なので受験生にとっては完答すべき問題である。ここで扱われている数学的帰納法は頻出事項なので、受験生はしっかりと身に付ける必要がある。
$\boxed{2}$ 問１ 問２	数学Ｂ	空間図形	 易 やや難	昨年度も出題のあった空間図形の問題である。問１は非常に基本的な問題である。問２は難しいと感じた受験生も多くいたと考えられる。
$\boxed{3}$ 問１ 問２ 問３	数学Ａ	確率	 易 易 やや易	基本的な確率の問題である。個別学力試験の問題としては易しい問題で、センター試験に出題されてもおかしくない難易度である。受験生は完答すべき問題である。
$\boxed{4}$ 問１ 問２ 問３	数学Ⅲ	積分	 易 標準 標準	積分の問題としては典型的な問題である。問２でしっかりと場合分けして計算をすることができたかがポイントになる。問３は、問１と問２の結果を利用することになるが、それでも計算が煩雑になるため受験生にとって完答は厳しかったかもしれない。

平成 23 年度　琉球大学入試問題（前期・乙）入試問題分析

《 総　論 》

今年度も大問が２つの構成で、昨年度の出題と同様の構成だった。出題範囲については、数学Ⅰと数学Ⅱからの出題だけで、ほとんどが数学Ⅱからの出題となっており、数学Ａ、数学Ｂからの出題がなかった。範囲からすると少し偏った出題だったと言える。難易度は昨年度と同様に教科書レベルの難易度である。計算ミスや記述不足による減点等が合否に大きく影響することも考えられる。落ち着いて完答を目指すべき問題であり、実際にかなりの高得点を取った受験生もいたのではないだろうか。普段の学習内容をしっかりと身に付けているかを問うような出題だったと考える。

問題番号	科目	分野	難易度	コメント
1 問１ 問２ 問３	 数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅱ	 実数 ３次方程式 指数・対数関数	 易 易 やや易	問１、問２、問３とそれぞれが独立の問題である。各小問とも基本的な問題で教科書レベルの問題といえる。難易度からすると完答すべき問題であり、計算ミスや記述不足等が合否に影響すると考えられる。
2 問１ 問２	数学Ⅱ	微分と積分	 易 易	基本的な問題なので、落ち着いて取り組み、計算ミスや記述不足による減点等を避けて完答すべき問題である。

平成23年度　琉球大学入試問題（後期）入試問題分析

《総　論》

今年度も大問が４つで昨年度と同様の構成である。出題範囲については、数学Ⅱ、数学B、数学Ⅲからの出題であった。注目されたのは、整数に関する問題である。昨年度に引き続き出題された整数問題であるが、今年度は[2]の問３、[3]と全体に対する配点の分量が昨年度よりも増加している。数理科学科を目指す受験生にとっては、教科書の学習内容をしっかりと身に付けるだけでなく、整数問題等の教科書外の数学的な問題にも普段から触れておくことも大切になってくると考えられる。

問題番号	科目	分野	難易度	コメント
[1] 問１ 問２	数学Ⅱ	微分と積分	標準 標準	標準的な難易度の問題である。文字定数が含まれる計算を処理することになるが、この程度の計算力は身につけて入試に臨んで欲しい。完答すべき問題である。
[2] 問１ 問２ 問３	数学B	数列	易 易 やや難	問１、問２は典型的な漸化式の問題であり、問２は誘導もついているので数理科学科の受験生なら難なく完答すべき問題である。問３に関しては、教科書での扱いがあまり見られない問題なため、受験生にとっては難しかったであろう。
[3] 問１ 問２	数学Ⅰ	整数問題	やや難 やや難	教科書ではほとんど扱われない整数問題の出題である。ほとんどの受験生にとっては難しく感じられ、まったく手の出ない受験生も結構いたのではないだろうか。
[4] 問１ 問２ 問３	数学Ⅱ 数学Ⅲ	領域 積分法	やや易 やや易 標準	微分・積分の問題としては基本的な問題であり、個別学力試験の問題としては難易度はそう高くはない問題である。受験生にとっては完答したい問題である。

平成 23 年度　琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	科目	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問１ 問２	数学C	行列	 易 標準	(ｱ) 昨年度も$\boxed{1}$で行列、数学的帰納法に関する出題があり今年度も似たような出題でしたが何か意図があったのでしょうか。 (ｲ) 数学的帰納法の出来はどうだったでしょうか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２	数学B	空間図形	 易 やや難	(ｱ) 問１は非常に基本的な問題なので良く出来ていたのではないでしょうか。 (ｲ) 問２は受験生にとって難しかったと考えるのですが、どの程度の出来だったでしょうか。 (ｳ) ２変数を用いてＰＱを表わし、最小値を求める場合、“２つの変数が互いに独立である”ことを記述する必要があるのでしょうか。記述がなければ実際に減点対象となったのでしょうか。
$\boxed{3}$ 問１ 問２ 問３	数学A	確率	 易 易 やや易	(ｱ) 個別学力試験としては易しい問題と考えますが、受験生の出来はどうだったでしょうか。 (ｲ) 問３で$X=1$の確率を求めるときに余事象の考えを用いずに確率を求めた解答はなかったでしょうか。 (ｳ) 余事象の考えを用いて$X=1$の確率を求める場合に、$X=1$以外の事象が“排反”であることを記述する必要はあるのでしょうか。記述がなければ実際に減点対象となったのでしょうか。
$\boxed{4}$ 問１	数学Ⅲ	積分	 易	(ｱ) 問２で場合分けはどの程度の受験生が出来ていたでしょうか。

問２ 問３			標準 標準	(イ) 問３では計算をきちんと処理する必要があると考えますが、受験生の出来は悪かったのではないでしょうか。 (ウ) 完答できた受験生はどの程度いたでしょうか。
全　体	(ア) 全体としては、昨年度よりも少し易化したと考えますが意図的に易しい出題としたのでしょうか。 (イ) 全体的に受験生の出来はどうだったでしょうか。満点近い得点をとった受験生もいたのではないでしょうか。逆に、０点の生徒もいたのでしょうか。 (ウ) 医学部医学科では高得点の受験生も結構いたのではないかと考えますが、どの程度の出来だったでしょうか。 (エ) 多く見られた誤答や気になる誤答があればどのような誤答だったのでしょうか。 (オ) 受験生の記述力（論理的に解答を記述する力）はどのようなものだったのでしょうか。 (カ) 入試問題としては、今年度の難易度で妥当な出題だったとお考えでしょうか。			
意　見	少し易しい難易度の出題であったと考えるが、受験生の力を試すには良問であったと考える。来年度以降も多くの受験生のための良い出題をお願いしたい。 また、昨年度より琉球大学側の解答例が公表されなくなりましたが、出題意図や高校での学習指導を考えると是非とも公表していただきたい。			

平成23年度　琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	科目	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2 問3	 数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅱ	 実数 3次方程式 指数・対数関数	 易 易 標準	(ア) 教科書レベルの問題と考えられますが、受験生の出来は結構良い出来ではなかったでしょうか。 (イ) 問2では $x=2+\sqrt{3}i$ を代入する以外の方法で解答している受験生もいたのではないでしょうか。 (ウ) 問3では x の値に対して真数条件をチェックしていない解答はなかったでしょうか。その場合は減点対象となるのでしょうか。
2 問1 問2	数学Ⅱ	微分と積分	 易 易	(ア) 問1は文字定数、問2は具体的な数値が与えられた問題ですが、なぜこの並びで出題したのでしょうか。 (イ) 問2だけ解答している受験生もいたのではないでしょうか。 (ウ) 問2だけ解答した場合、配点の扱いはどのようになるのでしょうか。
全　体	(ア) 問題の難易度は大変易しいと考えられるが、受験生の出来はいかがだったでしょうか。 (イ) 入試問題として今年度程度の難易度が妥当と考えられるのでしょうか。			
意　見	教科書の学習内容をしっかりと身に付けているかを問う良い出題だったと考えます。受験生にとっては普段の学習に対する取り組みを問われる出題であった。来年度もこのような出題に期待したい。			

平成23年度　琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	科目	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2	数学Ⅱ	微分と積分	 標準 標準	(ｱ) 問1の解答では、どのような解答が見られたでしょうか。 (ｲ) 積分計算の出来はどうだったでしょうか。 (ｳ) 標準的な問題と考えられますが、完答した受験生はどの程度いたでしょうか。
2 問1 問2 問3	数学B	数列	 易 易 やや難	(ｱ) 問1では$n=1$のときのチェックが必要と考えますが、受験生はできていたでしょうか。なければ減点対象となったでしょうか。 (ｲ) 問3は二項定理を利用する問題として出題したのでしょうか。 (ｳ) 問3は受験生にとって難しく感じる問題だったと考えますが、実際の出来はどうだったでしょうか。
3 問1 問2	数学Ⅰ	整数問題	 やや難 やや難	(ｱ) 受験生にとって、今年度の問題の中で一番難しく見えた問題だったと考えますが、白紙の解答も結構あったのではないでしょうか。 (ｲ) 教科書ではあまり扱われないようなタイプの出題でしたが、どのような意図で出題されたのでしょうか。
4 問1 問2 問3	数学Ⅱ 数学Ⅲ	領域 積分法	 やや易 やや易 標準	(ｱ) 今年度の問題の中では一番易しい問題と考えますが、受験生の出来はどうだったでしょうか。 (ｲ) 問1で領域を図示する場合、境界線を含むかどうかの記述が必要と考えますが、なければ減点対象となったのでしょうか。

全　体	(ｱ) 受験生の出来はどの程度だったでしょうか。満点近い得点をとった受験生もいたのでしょうか。 (ｲ) 教科書にないような出題もありましたが、数理科学科の入試問題とすると妥当な出題と考えられるのでしょうか。 (ｳ) 多く見られた誤答や気になる誤答があればどのような誤答だったのでしょうか。 (ｴ) 受験生の記述力（論理的に解答を記述する力）はどのようなものだったのでしょうか。 (ｵ) 数理科学科の入試問題としては、今年度の難易度で妥当な出題だったとお考えでしょうか。
意　見	全体としては、受験生の力を試すには良い出題であったと考える。 教科書では扱われないような出題も、数理科学科の受験生に対しては、数学を様々な場面で学ぶ姿勢を問う良い出題であったと考える。一方、面積を求める積分の問題が二つ出題されており、出題分野に関してはもう少しバランスの良い出題を期待したい。来年度以降も沖縄県で数学を学ぶ受験生のために良い出題をお願いしたい。 また、昨年度より琉球大学側の解答例が公表されなくなりましたが、出題意図や高校での学習指導を考えると是非とも公表していただきたい。

1 実数 p に対して，行列 A, B, C をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$A_1=A,\ A_{n+1}=A_nB-BA_n+C\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　A_2, A_3 を求めよ。

問2　A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

解答

問1　$A_2=A_1B-BA_1+C=AB-BA+C$

$$=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & p(1+p)\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & p(1+p)\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$A_3=A_2B-BA_2+C$

$$=\begin{pmatrix}0 & p(1+p)\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p(1+p)\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & p(1+p)^2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & p(1+p)\\ 1+p & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & p(1+p+p^2)\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$ 答

問2　$A_n=\begin{pmatrix}0 & \sum_{i=1}^{n} p^i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ …① と推測できる。

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{pmatrix}0 & \sum_{i=1}^{1} p^i\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

であるから，①は成り立つ。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{1}$ 問2の続き)

$$A_{k+1}=A_kB-BA_k+C$$
$$=\begin{pmatrix}0 & \sum_{i=1}^{k}p^i\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sum_{i=1}^{k}p^i\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & p\\ 1+p & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & p\sum_{i=1}^{k}p^i+p\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\to p\sum_{i=1}^{k}p^i+p=p(p+p^2+p^3+\cdots+p^k)+p$$
$$=p+p^2+p^3+\cdots+p^{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}p^i$$
$$=\begin{pmatrix}0 & \sum_{i=1}^{k+1}p^i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であるから，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

(i)，(ii) より，①はすべての自然数 n について成り立つ。 終

2　中心が $(2,\ 0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の球面が yz 平面と交わってできる円を C とする。

次の問いに答えよ。(50点)

問1　C の中心の座標と半径を求めよ。

問2　点Pは C 上を動き，点Qは xy 平面上の直線 $x=y$ 上を動くとする。線分PQの長さの最小値，およびそのときのP, Qの座標を求めよ。

解答

問1　中心 $(2,\ 0,\ 1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の球面の方程式は

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=(2\sqrt{5})^2 \quad \cdots ①$$

であり，球面①が yz 平面と交わってできる円 C の方程式は,

① かつ $x=0$

であるから

$$C:\ x=0,\ y^2+(z-1)^2=4$$

よって，C の中心は $(0,\ 0,\ 1)$，半径は4である。 答

問2　円 C 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$，直線 $x=y,\ z=0$ 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t,\ 0)$ (t は実数)と表すことができて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t,\ t,\ 0)$$

である。

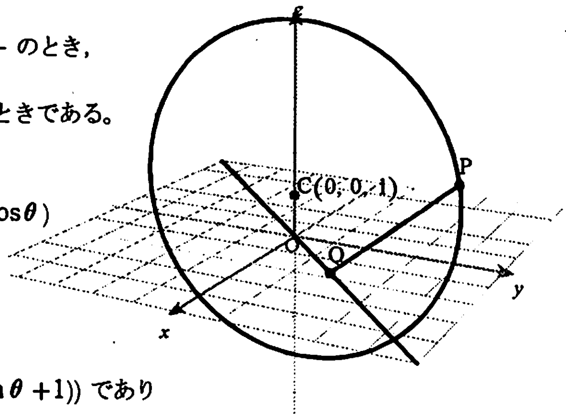
(i) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \neq \vec{0}$ すなわち $t \neq 0$ のとき

線分PQの長さが最小となるのは $\angle\mathrm{OQP}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき,

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ のときである。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ t-4\cos\theta,\ -(4\sin\theta+1))$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t^2+t(t-4\cos\theta)=2t(t-2\cos\theta)$$



であるから

$$2t(t-2\cos\theta)=0$$

$$t=2\cos\theta \quad (\because t \neq 0)$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2\cos\theta,\ -2\cos\theta,\ -(4\sin\theta+1))$ であり

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=(2\cos\theta)^2+(-2\cos\theta)^2+(4\sin\theta+1)^2\\&=8\cos^2\theta+16\sin^2\theta+8\sin\theta+1\\&=8\sin^2\theta+8\sin\theta+9\\&=8\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+7\end{aligned}$$

であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ で最小値7をとる。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 2 問2の続き)

$|\overrightarrow{PQ}| \geqq 0$ であるから，このとき，$|\overrightarrow{PQ}|$ も最小となる。

したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$ は $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\sqrt{7}$ をとる。

(ii) $\overrightarrow{OQ} = \vec{0}$ すなわち $t=0$ のとき

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PO}| = |\overrightarrow{OP}|$$

であり，C(0, 0, 1) とすると

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}|$$

と表されて，$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは，$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CP}$ が反対向きであるとき，

すなわち，P(0, 0, -3) のときである。

したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$ は $\sin\theta = -1$ で最小値3をとる。

(i)，(ii) より，$\sqrt{7} < 3$ であるから，$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは (i) のときである。

また，$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$(\cos\theta,\ t) = \left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\sqrt{3}\right)$ (複号同順) である。

以上より，線分PQの長さの最小値は $\sqrt{7}$ であり，このとき，

P(0, $\pm 2\sqrt{3}$, -1), Q($\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}$, 0) (複号同順) である。 答

別解 (P(0, $4\cos\theta$, $4\sin\theta + 1$), Q(t, t, 0) まで同じ)

$$PQ^2 = t^2 + (t - 4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta + 1)^2$$
$$= 2t^2 - 8t\cos\theta + 8\sin\theta + 17 = 2(t - 2\cos\theta)^2 + 8\sin^2\theta + 8\sin\theta + 9$$
$$= 2(t - 2\cos\theta)^2 + 8\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + 7$$

より，PQ^2 は ($t = 2\cos\theta$ かつ $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$) で最小値7をとる。 (以下略)

3 1から4までの番号を1つずつ書いた4枚のカードがある。この中から1枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の最大公約数を X とする。ただし，n は2以上の自然数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $X=3$ となる確率と $X=4$ となる確率を n を用いて表せ。

問2 $X=2$ となる確率を n を用いて表せ。

問3 X の期待値を n を用いて表せ。

解答

問1 $X=3$ となるのは，n 個の数がすべて3のときであるから，その確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。

$X=4$ となるのは，n 個の数がすべて4のときであるから，その確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。 答

問2 $X=2$ となるのは，n 個の数が2, 4のいずれかであり，すべて4のときを除くから，

その確率は $\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。 答

問3 X のとり得る値は $X=1, 2, 3, 4$ のいずれかであり，これらは互いに排反である。

よって，$X=1$ となる確率は $1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。

したがって，求める期待値は

$$1\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

である。 答

4 次の問いに答えよ。（50点）

問１ 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx$ を求めよ。

問２ m, n が自然数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めよ。

問３ a, b を実数とする。a, b の値を変化させたときの定積分 $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx$ の最小値，およびそのときの a, b の値を求めよ。

解答

参考

関数 $f(x)$ について，

$f(x)$ が奇関数ならば，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

$f(x)$ が偶関数ならば，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

が成り立つ。

問１ $x\sin 2x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx=2\int_{0}^{\pi} x\sin 2x\,dx=2\int_{0}^{\pi} x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_{0}^{\pi}-2\int_{0}^{\pi}-\frac{1}{2}\cos 2x\,dx=-\pi+\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\pi}$$

$$=-\pi \quad \text{答}$$

問２ $\sin mx\,\sin nx$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx=2\int_{0}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx=2\int_{0}^{\pi}-\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}\,dx$$

であり，

$m\neq n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx=\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{0}^{\pi}=0$

$m=n$ のとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx=\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2mx)\,dx=\left[x-\frac{\sin 2mx}{2m}\right]_{0}^{\pi}=\pi$

よって

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n)\end{cases} \quad \text{答}$$

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{4}$ の続き)

問3　$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\sin^2 2x-2ax\sin x+2ab\sin x\sin 2x-2bx\sin 2x)\,dx$$

であり，x^2, $\sin^2 x$, $\sin^2 2x$, $x\sin x$, $\sin x\sin 2x$, $x\sin 2x$ は偶関数であるから

$$I=2\int_0^{\pi}(x^2+a^2\sin^2 x+b^2\sin^2 2x-2ax\sin x+2ab\sin x\sin 2x-2bx\sin 2x)\,dx$$

である。ここで

$$2\int_0^{\pi}x^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^3$$

$$2\int_0^{\pi}a^2\sin^2 x\,dx=a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\sin x\,dx=\pi a^2$$ (∵ 問2で $m=n$ のとき)

$$2\int_0^{\pi}b^2\sin^2 2x\,dx=b^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\,\sin 2x\,dx=\pi b^2$$ (∵ 問2で $m=n$ のとき)

$$2\int_0^{\pi}-2ax\sin x\,dx=-4a\int_0^{\pi}x(-\cos x)'\,dx=-4a\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+4a\int_0^{\pi}-\cos x\,dx$$

$$=-4\pi a-4a\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=-4\pi a$$

$$2\int_0^{\pi}2ab\sin x\sin 2x\,dx=2ab\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx=0$$ (∵ 問2で $m\neq n$ のとき)

$$2\int_0^{\pi}-2bx\sin 2x\,dx=-2b\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 2x\,dx=-2b\cdot(-\pi)=2\pi b$$ (∵ 問1)

であるから

$$I=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi a+2\pi b$$

$$=\pi(a^2-4a)+\pi(b^2+2b)+\frac{2}{3}\pi^3=\pi(a-2)^2+\pi(b+1)^2+\frac{2}{3}\pi^3-5\pi$$

したがって，I は

$a=2$, $b=-1$ で最小値 $\frac{2}{3}\pi^3-5\pi$

をとる。 答

1 次の問いに答えよ。 (50点)

問1 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき，a^2+ab+b^2 と

$\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ の値を求めよ。

問2 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の1つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定数 a, b の値を求めよ。

問3 次の方程式を解け。

$$\log_5(1-4\cdot 5^x)=2x+1$$

解答

問1
$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$
であり，$2<\sqrt{3}+1<3$ より
$$a=2,\ b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$$
であるから
$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)=6$$
$$\frac{1}{a-b-1}-\frac{1}{a+b+1}=\frac{1}{a-(b+1)}-\frac{1}{a+(b+1)}=\frac{2(b+1)}{a^2-(b+1)^2}=2\sqrt{3}$$ 答

問2 実数係数の方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ …① の解の1つが $2+\sqrt{3}i$ であるから，$2-\sqrt{3}i$ も解である。

ここで，$2\pm\sqrt{3}i$ を解にもつ2次方程式の1つは
$$(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$$
$$(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7$$
より
$$x^2-4x+7=0$$
であるから，①の左辺は x^2-4x+7 を因数にもつ。

したがって，最高次の係数に着目して
$$x^3+ax^2+bx-14=(x^2-4x+7)(x-c)\ (a,\ b,\ c \text{は定数}) \cdots ②$$
とかけて，②は x の恒等式である。

②の右辺は
$$x^3-(c+4)x^2+(4c+7)x-7c$$
であるから
$$\begin{cases} a=-(c+4) \\ b=4c+7 \\ -14=-7c \end{cases} \quad \therefore c=2,\ a=-6,\ b=15$$ 答

> **参考**
> 実数係数の方程式の解の1つが $a+bi$ であるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解である。

> **参考**
> 2数 p, q を解にもつ2次方程式の1つは
> $x^2-px+q=0$
> である。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{1}$ の続き)

問3 $\log_5(1-4\cdot5^x)=2x+1$

$\Leftrightarrow 5^{2x+1}=1-4\cdot5^x\ (>0)$

よって

$5\cdot(5^x)^2+4\cdot5^x-1=0$

$(5\cdot5^x-1)(5^x+1)=0$

$5^x>0$ であるから

$5^x=\dfrac{1}{5}=5^{-1}$

$\therefore x=-1$ 答

$\boxed{2}$ 放物線 $y=x^2$ 上の異なる２点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線が点Ｒで交わっている。

次の問いに答えよ。 (50点)

問１　Ｒの座標を求めよ。

問２　$p=-1,\ q=2$ のとき，２本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

問１　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$

$$\therefore\ y=2tx-t^2$$

点P, Qにおける接線を，それぞれ ℓ，m とすると

$$\ell:\ y=2px-p^2$$

$$m:\ y=2qx-q^2$$

であり，ℓ，m の交点Ｒの x 座標は

$$2px-p^2=2qx-q^2$$

より

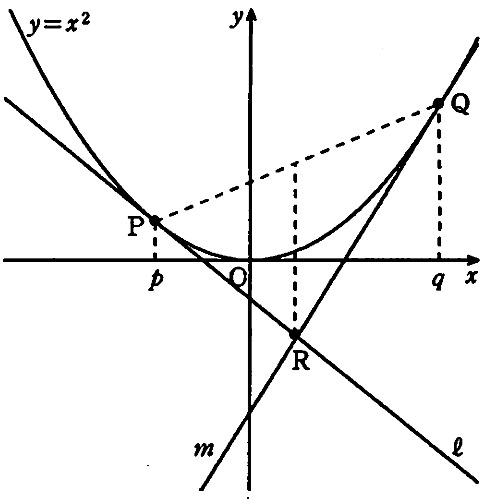
$$2(p-q)x=p^2-q^2$$

$$\therefore\ x=\frac{p+q}{2}\ (\because\ p\neq q)$$

よって，Ｒの y 座標は

$$y=2p\cdot\frac{p+q}{2}-p^2=pq$$

$$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\frac{p+q}{2},\ pq\right)$$ 答



問２　２直線 ℓ，m と放物線で囲まれた図形の面積を S とする。

$p<q$ のとき

$$S=\int_p^{\frac{p+q}{2}}\{x^2-(2px-p^2)\}\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}\{x^2-(2qx-q^2)\}\,dx$$

$$=\int_p^{\frac{p+q}{2}}(x-p)^2\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}(x-q)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_p^{\frac{p+q}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-q)^3\right]_{\frac{p+q}{2}}^{q}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{q-p}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{2}\right)^3=\frac{(q-p)^3}{12}$$

であるから，$p=-1,\ q=2$ とすると

$$S=\frac{3^3}{12}=\frac{9}{4}$$ 答

1 2つの放物線C_1: $y=x^2-(a+1)x+a$, C_2: $y=x^2-(a-1)x-a$ がある。ただし，$-1<a<1$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

問2　C_1 と C_2 および ℓ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

問1　C_1: $y=f(x)$, C_2: $y=g(x)$ とすると

$$f'(x)=2x-(a+1),\ g'(x)=2x-(a-1)$$

より，C_1 上の点$(s,\ f(s))$における C_1 の接線を ℓ_1，C_2 上の点$(t,\ g(t))$における C_2 の接線を ℓ_2 とすると

ℓ_1: $y-f(s)=f'(s)(x-s)$

$$y-\{s^2-(a+1)s+a\}=\{2s-(a+1)\}(x-s)\quad \therefore\ y=\{2s-(a+1)\}x-s^2+a$$

ℓ_2: $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

$$y-\{t^2-(a-1)t-a\}=\{2t-(a-1)\}(x-t)\quad \therefore\ y=\{2t-(a-1)\}x-t^2-a$$

ℓ_1 と ℓ_2 が一致するとき

$$\begin{cases} 2s-(a+1)=2t-(a-1) & \cdots ① \\ -s^2+a=-t^2-a & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$t=s-1\ \cdots ③$$

②に③を代入して

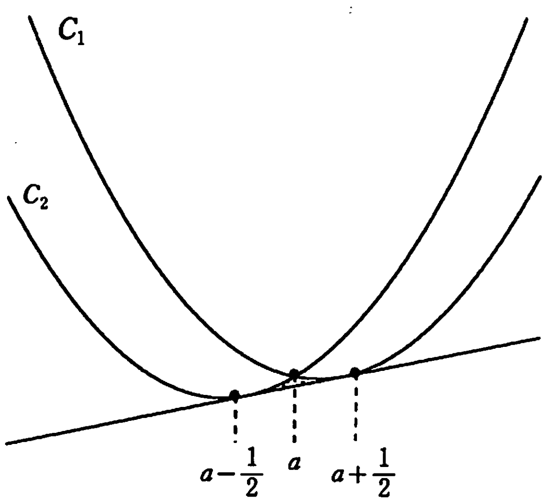
$$-s^2+a=-(s-1)^2-a\quad \therefore\ s=a+\frac{1}{2}$$

③より

$$t=\left(a+\frac{1}{2}\right)-1=a-\frac{1}{2}$$

よって，求める直線 ℓ の方程式は

$$y=ax-a^2-\frac{1}{4}\quad \text{答}$$



→解答は次頁に続く

解答 (前頁 1 の続き)

問2　C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$x^2-(a+1)x+a=x^2-(a-1)x-a$$

より

$$x=a$$

よって，求める面積は

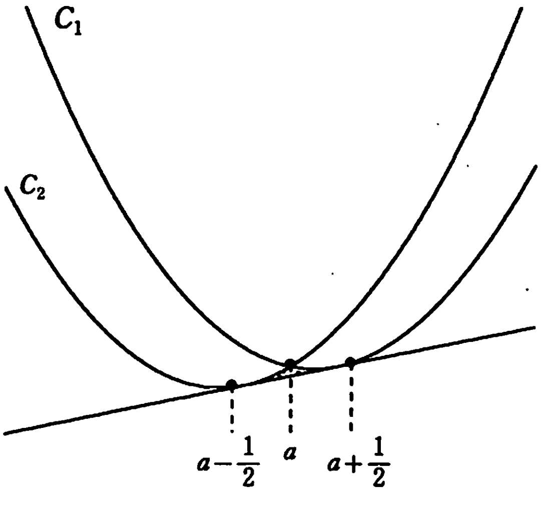
$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a}\left\{x^2-(a-1)x-a-\left(ax-a^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{a}^{a+\frac{1}{2}}\left\{x^2-(a+1)x+a-\left(ax-a^2-\frac{1}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{a-\frac{1}{2}}^{a}\left\{x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2dx+\int_{a}^{a+\frac{1}{2}}\left\{x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left\{x-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^3\right]_{a-\frac{1}{2}}^{a}+\left[\frac{1}{3}\left\{x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}^2\right]_{a}^{a+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{12}$$ 終



2 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは次の条件を満たすとする。

$$S_1=1,\ S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1\ (n=1,2,3,\cdots)$$

次の問いに答えよ。(50点)

問1 数列$\{a_n\}$の満たす漸化式を求めよ。

問2 $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

問3 a_{100}を4で割ったときの余りを求めよ。

解答

問1 $S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1\ \cdots①$

①より

$$S_n-3S_{n-1}=2^n-1\ (n\geqq 2)\ \cdots②$$

①，②より

$$(S_{n+1}-S_n)-3(S_n-S_{n-1})=2^n$$

$$a_{n+1}-3a_n=2^n$$

$$\therefore\ a_{n+1}=3a_n+2^n\ (n\geqq 2)\ \cdots③$$

ここで，$a_1=S_1=1$ であり，①において$n=1$ とすると

$$S_2-3S_1=2^2-1$$

$$(a_1+a_2)-3a_1=3\quad \therefore\ a_2=5$$

③において，$n=1$ とすると，$a_2=3a_1+2^1=5$ となり，③は$n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める$\{a_n\}$の漸化式は

$$a_{n+1}=3a_n+2^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ 答

問2 $a_{n+1}=3a_n+2^n$

より，この両辺を2^{n+1}で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2},\ b_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$$

であり

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

と変形できるから，$\{b_n+1\}$は初項$\dfrac{1}{2}$，公比$\dfrac{3}{2}$の等比数列をなす。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{2}$ 問2の続き)

よって

$$b_n+1=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \quad 答$$

参考 ($\{S_n\}$ の一般項を求めてから, $\{a_n\}$ の一般項を求めることもできます。)

$$S_{n+1}=3S_n+2^{n+1}-1$$

において, $S_{n+1}-f(n+1)=3(S_n-f(n))$ と変形できるとき,

$2^{n+1}-1$ より, $f(n)=A\cdot2^n+B$ (A, B は定数) とすると

$$S_{n+1}-(A\cdot2^{n+1}+B)=3\{S_n-(A\cdot2^n+B)\} \Leftrightarrow S_{n+1}=3S_n-A\cdot2^n-2B$$

よって

$$\begin{cases}2^{n+1}=-A\cdot2^n\\-1=-2B\end{cases} \quad \therefore A=-2,\ B=\frac{1}{2}$$

したがって

$$S_{n+1}-\left(-2\cdot2^{n+1}+\frac{1}{2}\right)=3\left\{S_n-\left(-2\cdot2^n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

と変形できるから

$\left\{S_n-\left(-2^{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right\}$ は初項 $S_1-\left(-2^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$, 公比3の等比数列をなす。

よって

$$S_n-\left(-2^{n+1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}\cdot3^{n-1}=\frac{3^{n+1}}{2} \quad \therefore S_n=\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+1}+\frac{1}{2}$$

さらに, $n\geqq2$ のとき

$$S_{n-1}=\frac{3^n}{2}-2^n+\frac{1}{2}$$

であるから

$$S_n-S_{n-1}=\left(\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3^n}{2}-2^n+\frac{1}{2}\right)$$

$$a_n=3^n-2^n \quad (n\geqq2)$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{2}$ の続き)

問3　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より

$$\frac{a_n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1 \quad \therefore\ a_n=3^n-2^n$$

よって，$a_{100}=3^{100}-2^{100}=3^{100}-4^{50}$ であるから，a_{100} を4で割った余りは，3^{100} を4で割った余りに等しい。

ここで，x を p で割った余りを r とすると（x, p, r は自然数）

$x=pk+r$（k は0以上の整数）

と表されて，自然数 n に対して

$$x^n=(pk+r)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i\cdot(pk)^{n-i}\cdot r^i=p\sum_{i=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_i\cdot p^{n-i-1}\cdot k^{n-i}\cdot r^i+r^n$$

であり，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_i\cdot p^{n-i-1}\cdot k^{n-i}\cdot r^i$ は整数であるから，

x^n を p で割った余りは，r^n を p で割った余りに等しい。

よって，$x=3$, $n=100$, $p=4$ として考えると，

$3^{100}=9^{50}=(4\cdot2+1)^{50}$ を4で割った余りは，$1^{50}=1$ を4で割った余りに等しい。

ゆえに，3^{100} を4で割った余りは1である。

したがって，求める余りは1である。 答

3 次の問いに答えよ。(50点)

問1 50! を素因数分解したとき，累乗 2^a の指数 a を求めよ。

問2 ${}_{100}C_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の指数 b を求めよ。

解答

問1 表のように，

$50!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot49\cdot50$

の右辺の各自然数について，

2で割り切れる回数をその

列の○の個数で表したとき，

表の○の総数が a に等しい。

50!	2	4	6	8	…	16	…	32	…	46	48	50
①	○	○	○	○		○		○		○	○	○
②		○		○		○		○			○	
③				○		○		○			○	
④						○		○			○	
⑤								○				

ここで，①行，②行，…，⑤行における○の個数は，それぞれ1～50までの自然数における，

2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 の倍数の個数に等しい。

よって，

①行の○の個数は，$50\div2^1=25$ より，25個

②行の○の個数は，$50\div2^2=12\cdots2$ より，12個

③行の○の個数は，$50\div2^3=6\cdots2$ より，6個

④行の○の個数は，$50\div2^4=3\cdots2$ より，3個

⑤行の○の個数は，$50\div2^5=1\cdots18$ より，1個

であるから

$a=25+12+6+3+1=47$ 答

問2 求める b の値は ${}_{100}C_{50}$ を3で割り切れる回数である。

ここで

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

であり，$n=100$, $r=50$ とすると

$${}_{100}C_{50}=\frac{100!}{50!\,50!}$$

と表されるから，100!, 50! を3で割り切れる回数を，それぞれ b_1, b_2 とすると，

指数法則により

$$b=b_1-2b_2$$

である。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{2}$ 問2の続き)

問1と同様にして，b_1, b_2 を求めると

$$\begin{cases} 100\div 3^1=33\cdots 1 \\ 100\div 3^2=11\cdots 1 \\ 100\div 3^3=3\cdots 19 \\ 100\div 3^4=1\cdots 19 \end{cases} \text{より，}\ b_1=33+11+3+1=48$$

$$\begin{cases} 50\div 3^1=16\cdots 2 \\ 50\div 3^2=5\cdots 5 \\ 50\div 3^3=1\cdots 23 \end{cases} \text{より，}\ b_2=16+5+1=22$$

したがって

$b=48-2\cdot 22=4$ 答

参考

問1の流れを一般化すると，自然数 N, m に対して，$N!$ を2で割り切れる回数は

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{N}{2^k}\right]\ (2^m\leqq N<2^{m+1})$$

となります。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

さらに，$N!$ を素数 p で割り切れる回数は

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{N}{p^k}\right]\ (p^m\leqq N<p^{m+1})$$

となります。

この表現を用いると本問の解答は以下のようになります。

問1 $2^5<50<2^6$ より，$a=\sum_{k=1}^{5}\left[\frac{50}{2^k}\right]=25+12+6+3+1=47$

問2 $3^4<100<3^5$ より，$b_1=\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{100}{3^k}\right]=33+11+3+1=48$

$3^3<50<3^4$ より，$b_2=\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{50}{3^k}\right]=16+5+1=22$

$\therefore b=b_1-2b_2=4$

4 平面上で，不等式$(x-2)^2 \geqq y^2$の表す領域A，連立不等式$\begin{cases}(x-2)^2 \geqq y^2 \\ y \geqq x^2-2x\end{cases}$の表す領域を$B$とする。

次の問いに答えよ。(50点)

問1 領域Aを図示せよ。

問2 領域Bの面積を求めよ。

問3 領域Bをx軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

問1

$$A: (x-2)^2 \geqq y^2 \iff \{y+(x-2)\}\{y-(x-2)\} \leqq 0$$

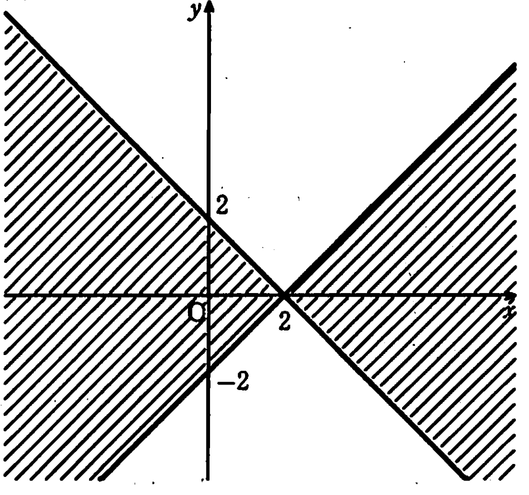
$$\iff \begin{cases} y+(x-2) \geqq 0 \\ y-(x-2) \leqq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y+(x-2) \leqq 0 \\ y-(x-2) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y \geqq -x+2 \\ y \leqq x-2 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y \leqq -x+2 \\ y \geqq x-2 \end{cases}$$

であるから，領域Aは図1の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

図1



問2

$y=x^2-2x$ …①

$y=-x+2$ …②

$y=x-2$ …③

とする。

放物線①と直線②の交点のx座標は

$x^2-2x=-x+2$

より

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1,\ 2$

放物線①と直線③の交点のx座標は

$x^2-2x=x-2$

より

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1,\ 2$

よって，領域Bは図2の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

→解答は次頁に続く

解答 (前頁 $\boxed{4}$ 問2の続き)

よって，求める面積は

$$\int_{-1}^{2}\{-x+2-(x^2-2x)\}\,dx-\int_{1}^{2}\{x-2-(x^2-2x)\}\,dx$$

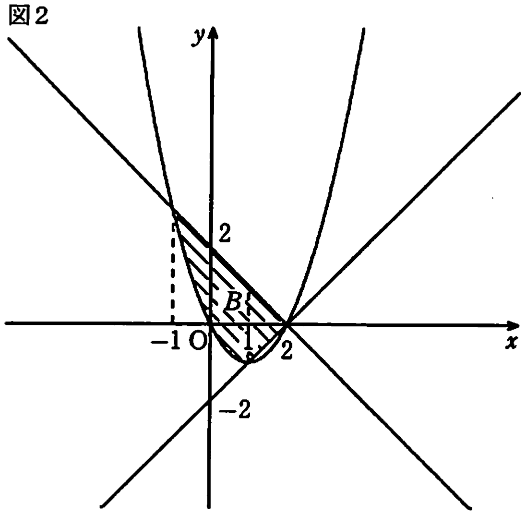
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 3^3-\frac{1}{6}\cdot 1^3$$

$$=\frac{1}{6}(27-1)$$

$$=\frac{13}{3}\quad 答$$

図2



問3 直線①，②は x 軸に関して対称であるから，
領域 B を x 軸の周りに1回転させてできる立体は，
直線 $y=-x+2$ の $-1\leqq x\leqq 2$ の部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体，すなわち底面の半径および高さがともに3である直円錐から，放物線 $y=x^2-2x$ の $-1\leqq x\leqq 0$ の部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体を除いたものである。
よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3-\int_{-1}^{0}\pi y^2\,dx\ \ (y=x^2-2x)$$

$$=9\pi-\pi\int_{-1}^{0}(x^2-2x)^2\,dx=9\pi-\pi\int_{-1}^{0}(x^4-4x^3+4x^2)\,dx$$

$$=9\pi-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=9\pi+\pi\cdot\left(-\frac{1}{5}-1-\frac{4}{3}\right)$$

$$=9\pi-\frac{38}{15}\pi=\frac{97}{15}\pi\quad 答$$