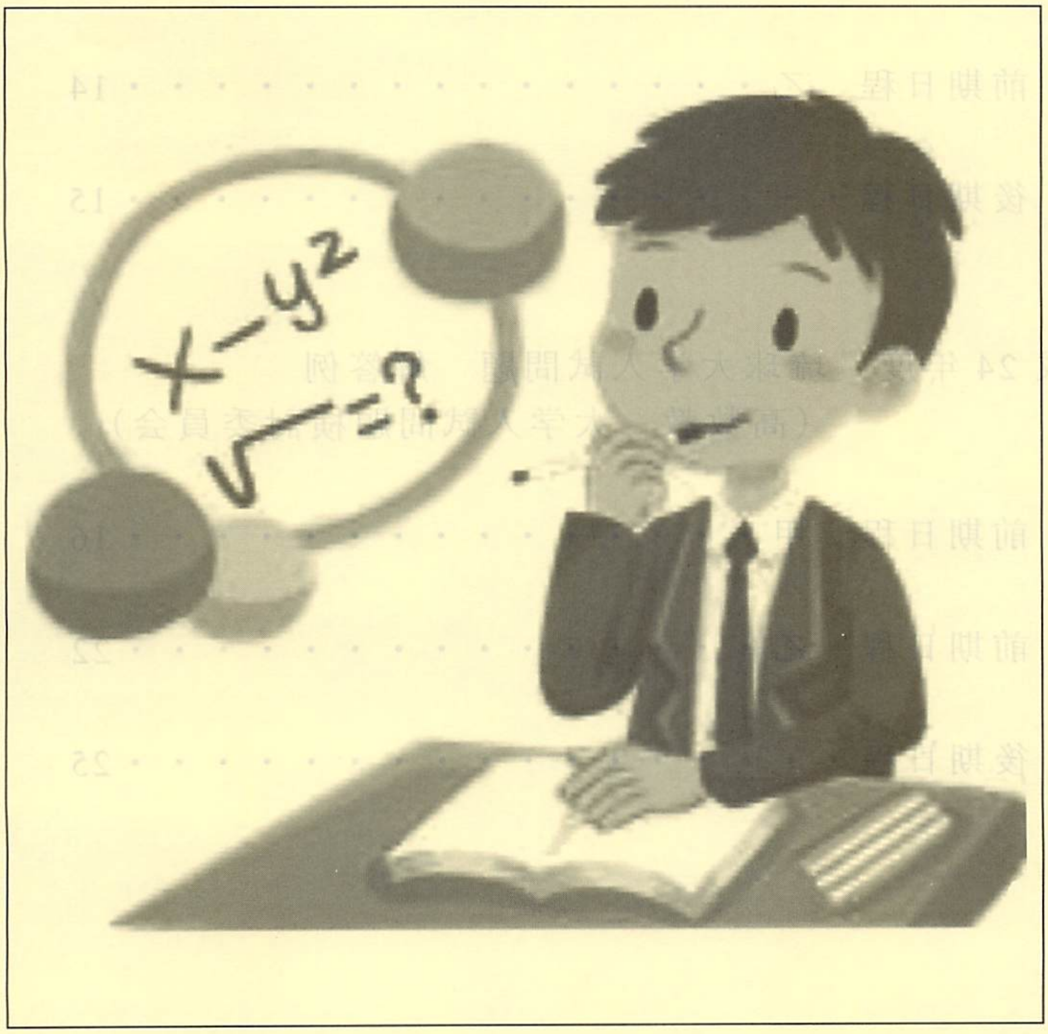
平成24年度
第36回 高校数学教育を考える会
（沖縄県高校数学教育会・琉球大学）



目　次

平成 24 年度　琉球大学入試試験問題についての感想と質問
（高数教　大学入試問題検討委員会）

平成 24 年度　琉球大学入試問題　解答例
（高数教　大学入試問題検討委員会）

平成 24 年度 琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	出題分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数学Ⅲ	微分法	基本	(ｱ)問２で最小値をとときの b の値は答えなくても良いのでしょうか？ (ｲ)基本的な問題ですが、受験生は結構できていたのではないでしょうか？
2 問 1 問 2	数学Ａ 数学Ｂ	確率 数列	標準	(ｱ)問１で１枚ずつカードを引いても同じ確率になりますが、そのような解答の扱いはどうなるのでしょうか？ (ｲ)文字定数がある問題なので、問２の処理がうまくできていない受験生も結構いたのではないでしょうか？
3 問 1 問 2	数学Ｂ 数学Ⅲ	数列 数列の極限	標準	(ｱ)漸化式を解いて一般項を求めている受験生はいたでしょうか？ (ｲ)数学的帰納法はここ数年出題されていますが、意図的に今回も出題したのですか？ (ｳ)印象に残っている誤答例は？ (ｴ) n=1 とする誤答もあったのでは？ (ｵ)どのような基準で採点されているのですか？ (ｶ)問１ができていなくて、問２ができている解答もあったのではないでしょうか？そのような場合、点数の扱いはどうなるのでしょうか？
4 問 1 問 2 問 3	数学Ⅲ	積分方 数列の極限	やや難	(ｱ)今回の問題の中では、一番難しい問題だったと考えますが、どの程度のできだったでしょうか？ (ｲ)医学部医学科のできはどうだったでしょうか？
全体	(ｱ) 昨年度よりも易化したと考えますが、実際の受験生の出来はどうだったでしょうか？特に、論理的な記述はできていたでしょうか？ (ｲ) 最高得点、最低得点、受験生の平均点、合格者の平均点はどの程度だったでしょうか？ (ｳ)医学科あたりでは満点もいたのではないでしょうか？ (ｴ)昨年、この会で話題にあがった工学部のできはどうだったでしょうか？			
意見	教科書の学習内容をきちんと身に付けてきたかを問う良い出題だったと考えます。受験生にとっては、普段の学習に対する姿勢も問われるので今後も、このような出題に期待します。			

平成 24 年度　琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	出題分野	難易度	質　問　事　項
1 問 1 問 2 問 3 問 4	数学Ⅱ 数学 B	数列 ベクトル 対数 積分方	基本	(ｱ)基本的な問題と考えますが、受験生の解答には計算用紙のような解答もあったのではないでしょうか？その際に評価はどうなるでしょうか？
2 問 1 問 2	数学Ⅱ	三角関数 (加法定理) 三時間数の増減	標準	(ｱ) 問 1 はとても重要な問題と考えますが、受検生のできはどうだったでしょうか？ (ｲ) f (x) を一つの文字式で表したときに係数が間違っていて、その後の増減表などの処理ができていたらどのような評価になるのでしょうか？ (ｴ)最大値､最小値をとるときの COS x の値を答えない場合の評価はどうなるのでしょうか？
全　体	(ｱ) 受験生のできはどうだったでしょうか？ひょっとすると、あまり差がつかなかったのではないでしょうか？ (ｲ) 最高得点、最低得点、受験生の平均点、合格者の平均点はどの程度だったでしょうか？ (ｳ) 基礎・基本的学習内容を問う問題だったと考えますが、乙の問題としてはこのような難易度が適当と考えているのでしょうか？。			
意見	加法定理の問題のように教科書の内容をしっかりと身に付けているかを問う良問だったと考えます。ただ、もう少し難易度が高い問題が一問くらはあっても良いと考えます。来年度以降も教科書の内容をしっかりと身に付けた受験生が対応できる出題をお願いします。			

平成 24 年度　琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	出題分野	難易度	質　問　事　項
1 問 1 問 2	数学Ⅲ	微分法と積分法	基本	(ｱ)問 1 で増減や凹凸、変曲点は増減表の中に示されていれば良いのでしょうか？ (ｲ)問 1 でグラフを描くときに、漸近線は示さなくても良いのでしょうか？ (ｳ)数理科学科の受験生にとっては基本的な問題だったと考えますが、できはどうだったでしょうか？
2 問 1 問 2 問 3	数学C	行列	標準	(ｱ) 難易度はそんなに高くないと考えますが、受験生にとっては解きにくい問題だったと考えます。あまり、できていなかったのではないでしょうか？ (ｲ)この問題の出題のねらいは何ですか？
3 問 1 問 2 問 3	数学Ⅲ	微分法と積分法	標準	(ｱ)受験生の力を診る上で 非常に良い問題と考えますが、各小問ごとでできはどうだったでしょうか？ (ｲ)問 3 ではグラフの概形は描かなくても良いのでしょうか？ (ｳ)問 3 はＳを求めるだけでなく、最後にａをＳで表させた意図は何でしょうか？
4 問 1 問 2 問 3	数学B 応用 問題	数列 (整数問題)	発展	(ｱ) 数理科学科の受験生にとっては良い問題と考えますが、完答した受験生はいたでしょうか？ (ｲ)あまり差がつかない問題だったと考えますが、出題の意図は何でしょうか？
全　体	(ｱ) 数理科学科の受験生に対する問題なので全体的に難易度が高いと考えますが、できはどうだったでしょうか？ (イ) 最高得点、最低得点、受験生の平均点、合格者の平均点はどの程度だったでしょうか？ (ｳ)出題分野に偏りがあるようですが、出題分野のバランスは考えないのでしょうか？ (ｳ)今後も大問４のような問題は必要だと考えますか？			
意　見	全体的には妥当な出題と考えます。ただ、大問１と大問３が類似の問題だったので、確率などもっと異なる分野からの出題が会っても良いと考えます。来年度以降も。県内の理系進学希望者の学習意欲につながるような出題を期待しています。			

$\boxed{1}$ 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする。

次の問に答えよ。 (50点)

問1　点 Q の座標を b で表せ。

問2　PQ^2 の最小値を求めよ。

解答

問1　$y=\sqrt{x^2-1}=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ …①

$$y'=\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{y}\quad(y \neq 0)$$

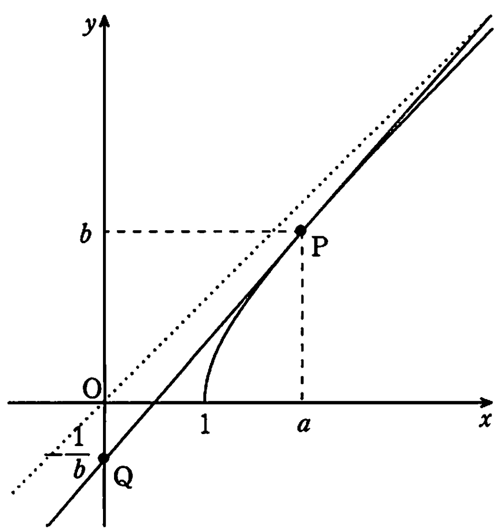
より，曲線①上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における曲線①の接線の方程式は

$$y-b=\frac{a}{b}(x-a)\quad すなわち\quad y=\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}(a^2-b^2)$$

ここで，$b=\sqrt{a^2-1}$ すなわち $a^2-b^2=1$ が成り立つから

$$y=\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\ \cdots ②$$

②において，$x=0$ とすると $y=-\dfrac{1}{b}$ であるから，点 Q の座標は $\underline{\left(0,\ -\dfrac{1}{b}\right)}$ である。 答



問2　$\mathrm{PQ}^2=a^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$

$$=(b^2+1)+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\quad(\because\ a^2-b^2=1)$$

$$=2b^2+\frac{1}{b^2}+3$$

ここで，$b>0$ より，$2b^2>0,\ \dfrac{1}{b^2}>0$ であるから

$$2b^2+\frac{1}{b^2} \geqq 2\sqrt{2b^2\cdot\frac{1}{b^2}}=2\sqrt{2}$$

が成り立つ。ただし，等号成立は $2b^2=\dfrac{1}{b^2}$ のとき，

すなわち，$b^2=\sqrt{2}$ より $b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ のときである。

したがって，$\mathrm{PQ}^2 \geqq 2\sqrt{2}+3$ であるから，

PQ^2 は，$b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ のとき，最小値 $2\sqrt{2}+3$ をとる。 答

2 Nを2以上の自然数とする。1からNまでの番号を1つずつ書いたN枚のカードから2枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号をXとし，小さい番号をYとする。次の問に答えよ。(50点)

問1 iを1以上N以下の自然数とするとき，$X=i$ となる確率p_iおよび$Y=i$ となる確率q_iを求めよ。

問2 Xの期待値E_1およびYの期待値E_2を求めよ。

解答

問1 この試行におけるすべての場合の数は${}_N\mathrm{C}_2$通りであり，これらは同様に確からしい。

このうち，$X=i$ である場合は

$(X,\ Y)=(i,\ i-1),\ (i,\ i-2),\ (i,\ i-3),\ \cdots,\ (i,\ 1)$ の$(i-1)$通り（ただし，$i\geqq 2$）

であるから，この確率p_iは

$$p_i=\frac{i-1}{{}_N\mathrm{C}_2}=\frac{2(i-1)}{N(N-1)}\ (i\geqq 2)\ \cdots ①$$

ここで，$p_1=0$ であるから，①は $i=1$ のときも成り立つ。

また，$Y=i$ である場合は

$(X,\ Y)=(i+1,\ i),\ (i+2,\ i),\ (i+3,\ i),\ \cdots,\ (N,\ i)$ の$(N-i)$通り（ただし，$i\leqq N-1$）

であるから，この確率q_iは

$$q_i=\frac{N-i}{{}_N\mathrm{C}_2}=\frac{2(N-i)}{N(N-1)}\ (i\leqq N-1)\ \cdots ②$$

ここで，$q_N=0$ であるから，②は $i=N$ のときも成り立つ。

したがって，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ のとき

$$p_i=\frac{2(i-1)}{N(N-1)},\quad q_i=\frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$ 答

別解

iが大きい番号となるのは，1枚ずつ2回取り出す試行を考えると，

はじめに，iのカードを1枚とりだし，次に，$1\sim(i-1)$のカードから1枚を取り出す場合と，

その逆の取り出し方の場合があるから

$$p_i=\frac{1}{N}\cdot\frac{i-1}{N-1}\times 2=\frac{2(i-1)}{N(N-1)}$$ これは $i=1$ のときも成り立つ。

同様に考えて

$$q_i=\frac{1}{N}\cdot\frac{N-i}{N-1}\times 2=\frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$ これは $i=N$ のときも成り立つ。

問2

$$E_1=\sum_{i=1}^{N}i\cdot P_i=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i^2-i)=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\left\{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)-\frac{1}{2}N(N+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(N+1)$$

$$E_2=\sum_{i=1}^{N}i\cdot q_i=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(-i^2+Ni)=\frac{2}{N(N-1)}\cdot\left\{-\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+N\cdot\frac{1}{2}N(N+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(N+1)$$ 答

3 数列$\{c_n\}$を次のように定義する。

$$c_1=1,\ c_{n+1}=1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\left(c_n+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問に答えよ。(50点)

問1 $n\geqq 2$ のとき，$a_n=1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^n}$ とする。このとき，

$c_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

問2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ。

解答

問1 $$c_{n+1}=1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\left(a_n+\frac{1}{4^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}c_n+a_{n+1}\ \cdots①$$

$$c_n=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}\ \cdots②$$

とする。

(i) $n=2$ のとき，(②の右辺) $=\dfrac{1}{3}+a_2$ であり，①より，$c_2=\dfrac{1}{3}c_1+a_2=\dfrac{1}{3}+a_2$ $(\because c_1=1)$

であるから，②は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき，②が成り立つと仮定すると，$c_k=\dfrac{1}{3^{k-1}}+\displaystyle\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i}{3^{k-i}}$ であり

$$\begin{aligned}c_{k+1}&=\frac{1}{3}c_k+a_{k+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{k-1}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i}{3^{k-i}}\right)+a_{k+1}\\&=\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{3^{k-2}}+\frac{a_3}{3^{k-3}}+\cdots+\frac{a_k}{3^0}\right)+a_{k+1}\\&=\frac{1}{3^k}+\left(\frac{a_2}{3^{k-1}}+\frac{a_3}{3^{k-2}}+\cdots+\frac{a_k}{3^1}+\frac{a_{k+1}}{3^0}\right)=\frac{1}{3^k}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{a_i}{3^{(k+1)-i}}\end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも②は成り立つ。

(i),(ii)より，②は，2以上のすべての自然数nについて成り立つ。 終

別解

$a_n=1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^n}$ より，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^{n+1}}$ であるから，$c_{n+1}=a_{n+1}+\dfrac{1}{3}c_n$

よって

$$3^{n+1}c_{n+1}=3^{n+1}a_{n+1}+3^nc_n\qquad \therefore 3^{i+1}c_{i+1}-3^ic_i=3^{i+1}a_{i+1}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots(ア)$$

(ア)において，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n-1$ $(n\geqq 2)$ として辺々加えると

$$3^nc_n-3^1c_1=\sum_{i=1}^{n-1}3^{i+1}a_{i+1}\ \text{よって}\ 3^nc_n=3+\sum_{i=2}^{n}3^ia_i\qquad \therefore c_n=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}\ (n\geqq 2)$$

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問2 $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}=\frac{1}{3^n}\sum_{i=2}^{n}3^i a_i$

であり，ここで，$3^i a_i=3^i\left(1+\dfrac{1}{2^i}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^i}\right)=3^i+\left(\dfrac{3}{2}\right)^i+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^i$ であるから

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}=\frac{1}{3^n}\sum_{i=2}^{n}\left\{3^i+\left(\frac{3}{2}\right)^i+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^i\right\}=\frac{1}{3^n}\left[\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}+1\right]$$

$$=\frac{1}{3^n}\left[\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{4}}\right]$$

$$=\frac{1}{3^n}\left[\frac{9}{2}(3^{n-1}-1)+\frac{9}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}+\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}\right]$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}\right)=\frac{3}{2}$$ 圏

4 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，次の問に答えよ。 (50点)

問1 I_1 および I_n+I_{n+2} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

問2 不等式 $I_n\geqq I_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

問3 $\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ。

解答

問1
$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}\,d\theta=\Big[-\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\log\sqrt{2}$$

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot\tan^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot(\tan\theta)'\,d\theta-I_n$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n \qquad \therefore\ I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots ①$$ 答

問2 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$0\leqq\tan\theta\leqq1$ であるから，$0\leqq\tan^n\theta\leqq1$ であり，$0\leqq\tan^{n+1}\theta\leqq\tan^n\theta$

したがって

$$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta\,d\theta\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta \qquad \therefore\ 0\leqq I_{n+1}\leqq I_n$$

すなわち，$I_n\geqq I_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $\cdots$ ② が成り立つ。 終

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問3 ②より，$I_{n+2} \leqq I_n$ $(n \geqq 1)$ であり，このことと①より

$$\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + I_n \leqq I_n + I_n = 2I_n \quad \therefore \frac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \ (n \geqq 1) \ \cdots ③$$

同様にして，$n \geqq 3$ のとき，$I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$，$I_n \leqq I_{n-2}$ であるから

$$2I_n \leqq \frac{1}{n-1} \quad \therefore I_n \leqq \frac{1}{2(n-1)} \ (n \geqq 3) \ \cdots ④$$

③，④より

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \frac{1}{2(n-1)} \ (n \geqq 3)$$

よって

$$\frac{n}{2(n+1)} \leqq nI_n \leqq \frac{n}{2(n-1)} \ (n \geqq 3)$$

であり，ここで，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$ であるから

$$\lim_{n \to \infty} nI_n = \frac{1}{2}$$ 答

1 次の問に答えよ。 (50点)

問1 次の数列の一般項を求めよ。

$$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ 41,\ \cdots$$

問2 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{a}-3\vec{b}|$ を求めよ。

問3 次の数を小さい順に並べよ。

$$\log_3 5,\ \frac{1}{2}+\log_9 8,\ \log_9 26$$

問4 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^3 |x^2-x-2|\,dx$$

解答

問1 与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1, & & 5, & & 11, & & 19, & & 29, & & 41, \cdots \\ & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & \end{array}$$

$\{b_n\}$ は，初項4，公差2の等差数列であるから

$$b_n=4+2(n-1)=2(n+1)$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)=1+2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)\right\}=n^2+n-1 \quad \cdots ①$$

であり，①の右辺において，$n=1$ とすると $n^2+n-1=1=a_1$ であるから，

①は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は n^2+n-1 である。 答

問2 $|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

ここで，$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3$ であるから

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=3^2-6\cdot 3+9\cdot 2^2=27$$

$|\vec{a}-3\vec{b}| \geqq 0$ であるから，$|\vec{a}-3\vec{b}|=3\sqrt{3}$ 答

問3 $\log_3 5=\dfrac{\log_9 5}{\log_9 3}=2\log_9 5=\log_9 25$

$$\frac{1}{2}+\log_9 8=\log_9 9^{\frac{1}{2}}+\log_9 8=\log_9 3+\log_9 8=\log_9 24$$

であり，$24<25<26$ より

$\log_9 24<\log_9 25<\log_9 26$ すなわち $\dfrac{1}{2}+\log_9 8<\log_3 5<\log_9 26$ 答

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問4　$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ より

$x^2-x-2\geqq 0$ すなわち $x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき，$|x^2-x-2|=x^2-x-2$

$x^2-x-2\leqq 0$ すなわち $-1\leqq x\leqq 2$ のとき，$|x^2-x-2|=-(x^2-x-2)$

であるから，$I=\int_0^3|x^2-x-2|\,dx$ とすると

$$I=\int_0^3|x^2-x-2|\,dx=\int_0^2-(x^2-x-2)\,dx+\int_2^3(x^2-x-2)\,dx$$

ここで，$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$ とすると

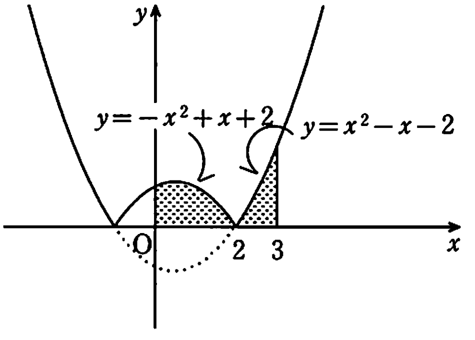
$$I=\Big[-F(x)\Big]_0^2+\Big[F(x)\Big]_2^3=-F(2)+F(0)+F(3)-F(2)=F(0)-2F(2)+F(3)$$

であり

$$F(0)=0,\ F(2)=\frac{8}{3}-2-4=-\frac{10}{3},\ F(3)=9-\frac{9}{2}-6=-\frac{3}{2}$$

であるから

$$I=-2\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)-\frac{3}{2}=\frac{31}{6}$$ 答



2 次の問に答えよ。(50点)

問1 加法定理を用いて，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を $\cos x$ で表せ。

問2 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x$ の最大値および最小値を求めよ。

解答

問1

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$$

よって

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$\therefore\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ 答

問2

$$f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x$$

$$= (4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) - 2\cos x = 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 5\cos x - 1$$

ここで，$\cos x = t$ とおくと，$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ すなわち $-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$y = f(x)$ とすると

$$y = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1$$

$$y' = 12t^2 + 4t - 5 = (2t-1)(6t+5)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{121}{54}$	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	0

$$\left(\begin{aligned} &t=-1 \text{ のとき } y = -4+2+5-1 = 2 \\ &t=-\frac{5}{6} \text{ のとき } y = -\frac{125}{54} + \frac{25}{18} + \frac{25}{6} - 1 = \left(-2-\frac{17}{54}\right) + \left(1+\frac{7}{18}\right) + \left(4+\frac{1}{6}\right) - 1 \\ &\qquad = 2 + \frac{-17+21+9}{54} = 2 + \frac{13}{54} = \frac{121}{54} \\ &t=\frac{1}{2} \text{ のとき } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 1 = -\frac{5}{2} \\ &t=1 \text{ のとき } y = 4+2-5-1 = 0 \end{aligned}\right)$$

増減表より，y は

$t = -\frac{5}{6}$ のとき最大値 $\frac{121}{54}$，$t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{2}$ をとる。

$t = \frac{1}{2}$ のとき，$\cos x = \frac{1}{2}$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ より $x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

したがって，$f(x)$ は

$\cos x = -\frac{5}{6}$ のとき最大値 $\frac{121}{54}$，$x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{5}{2}$ をとる。 答

1 次の問に答えよ。(50点)

問1 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の増減，凹凸および変曲点を調べてグラフをかけ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は用いてよい。

問2 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ と直線 $x=e^2$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

問1 $y=\dfrac{\log x}{x}$ …①

$$y'=\frac{(\log x)'\cdot x-\log x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$y''=\frac{(1-\log x)'\cdot x^2-(1-\log x)\cdot(x^2)'}{x^4}=\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x-2(1-\log x)}{x^3}=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

よって，$y'=0$ とすると，$\log x=1$ より $x=e$

$y''=0$ とすると，$\log x=\dfrac{3}{2}$ より $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

x	0	…	e	…	$e\sqrt{e}$	…
y'	×	＋	0	－	－	－
y''	×	－	－	－	0	＋
y	×	↗	極大	↘	(変曲点)	↘

$x=e$ のとき $y=\dfrac{1}{e}$

$x=e^{\frac{3}{2}}$ のとき $y=\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}=\dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$

増減表より，y は

$0<x\leqq e$ において単調に増加して，

$e\leqq x$ において単調に減少する。

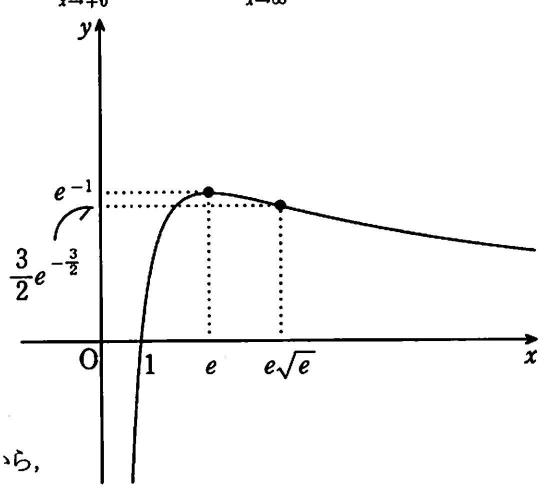
また，曲線①は

$0<x\leqq e\sqrt{e}$ において上に凸であり，

$e\sqrt{e}\leqq x$ において下に凸である。

曲線①は，図の実線部分であり，

変曲点は $\left(e\sqrt{e},\ \dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)$ である。 答



問2 $1\leqq x$ において $y\geqq 0$ であり，$1<e^2$ であるから，

求める面積は

$$\int_1^{e^2}\frac{\log x}{x}\,dx=\int_1^{e^2}\log x\cdot(\log x)'\,dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e^2}=2$$ 答

2 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\varDelta(A)=ad-bc$ とおく。次の問に答えよ。 (50点)

問1 2次の正方行列 A が逆行列 A^{-1} をもつとき, $\varDelta(A^{-1})=\dfrac{1}{\varDelta(A)}$ となることを示せ。

問2 2次の正方行列 A が逆行列 A^{-1} をもち, A および A^{-1} の成分がすべて整数であるとき, $\varDelta(A)$ のとりうる値を求めよ。

問3 2次の正方行列 A が逆行列 A^{-1} をもち, A および A^{-1} の成分がすべて0以上の整数であるとき, A を求めよ。

解答

問1 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもつ $\Leftrightarrow$ $\varDelta(A)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $ad-bc\neq 0$ …①

①のとき, $A^{-1}=\dfrac{1}{\varDelta(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であるから

$$\varDelta(A^{-1})=\frac{d}{\varDelta(A)}\cdot\frac{a}{\varDelta(A)}-\left\{\frac{-b}{\varDelta(A)}\right\}\cdot\left\{\frac{-c}{\varDelta(A)}\right\}=\frac{ad-bc}{\{\varDelta(A)\}^2}=\frac{\varDelta(A)}{\{\varDelta(A)\}^2}=\frac{1}{\varDelta(A)}$$

$\therefore\ \varDelta(A^{-1})=\dfrac{1}{\varDelta(A)}$ 圏

問2 A が逆行列をもつとき, 問1より, $\varDelta(A)\cdot\varDelta(A^{-1})=1$ が成り立ち,
A および A^{-1} の成分がすべて整数であるとき, $\varDelta(A)$, $\varDelta(A^{-1})$ はともに整数である。
したがって, $\varDelta(A)=\pm 1$ である。 圏

問3 ①かつ, A および A^{-1} の成分がすべて0以上の整数である …② とき,
問2より, $\varDelta(A)=\pm 1$ すなわち, $ad-bc=\pm 1$ である。

$ad-bc=1$ のとき, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり, ②より

$\begin{cases} b\geqq 0 \\ c\geqq 0 \end{cases}$ かつ $\begin{cases} -b\geqq 0 \\ -c\geqq 0 \end{cases}$ $\therefore\ b=c=0$

よって, $ad=1$ であり, ②より, $a=d=1$

同様にして, $ad-bc=-1$ のとき, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ より, $a=d=0$

よって, $bc=1$ であり, ②より, $b=c=1$

以上より, 求める A は

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 圏

3 次の問に答えよ。(50点)

問1 関数 $y=x\sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x>1)$ を微分せよ。

問2 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>1)$ をとる。このとき，$f(x)=\dfrac{b}{a}x-\sqrt{x^2-1}$ は $1\leqq x\leqq a$ において $f(x)\geqq 0$ となることを示せ。

問3 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>1)$ をとる。原点Oと点Pを結ぶ線分OPと x 軸および曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，a を S で表せ。

解答

問1 $y=x\sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x>1)$

より

$$y'=(x)'\cdot\sqrt{x^2-1}+x\cdot\left\{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}'-\frac{\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}'}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-1}+x\cdot\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)'-\frac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2-1)'}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{x^2-1}$$ 答

問2 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ …① 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ であるから，$b=\sqrt{a^2-1}$ …②

$f(x)=\dfrac{b}{a}x-\sqrt{x^2-1}$ より

$$f'(x)=\frac{b}{a}-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{b\sqrt{x^2-1}-ax}{a\sqrt{x^2-1}}=\frac{b^2(x^2-1)-a^2x^2}{a\sqrt{x^2-1}(b\sqrt{x^2-1}+ax)}$$

$$=\frac{(b^2-a^2)x^2-b^2}{a\sqrt{x^2-1}(b\sqrt{x^2-1}+ax)}$$

ここで，②より，$b^2-a^2=-1$ であるから

$$f'(x)=\frac{-(x^2+b^2)}{a\sqrt{x^2-1}(b\sqrt{x^2-1}+ax)}$$

であり，$a>1,\ b>0$ より $f'(x)<0$ である。

よって，$f(x)$ は単調に減少して，かつ，$f(a)=b-\sqrt{a^2-1}=0$ ($\because$ ②) であるから，

$1\leqq x\leqq a$ において $f(x)\geqq 0$ である。 答

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問2

別解

$y=\sqrt{x^2-1}$ において，$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$y''=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}<0$$

よって，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ は上に凸である。…(A)

また，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{a^2-1})$ におけるこの曲線の接線を ℓ とすると，

ℓ の傾きは $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ であり，$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ と $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ の大小について

$a>1$ より，$a>\sqrt{a^2-1}$ であるから $\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}<1<\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$

すなわち，接線 ℓ の傾きは，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ の傾きより小さい。…(B)

(A),(B) より，

$1\leqq x\leqq a$ において，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ は，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ より上側にあるから，

$1\leqq x\leqq a$ において，$\dfrac{b}{a}x\geqq\sqrt{x^2-1}$ すなわち $f(x)\geqq0$ が成り立つ。

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問3　$1 \leqq x \leqq a$ において，$f(x) \geqq 0$ すなわち $\dfrac{b}{a}x \geqq \sqrt{x^2-1}$ であるから，

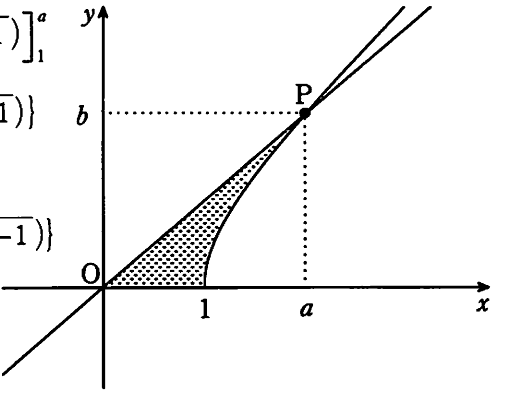
直線OP: $y=\dfrac{b}{a}x$ は曲線①より上側にある。

よって

$$S=\frac{1}{2}ab-\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1}-\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx \quad (\because ②)$$

と表されて，問1より

$$\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{x^2-1}-\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big]_1^a$$
$$=\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2-1}-\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\right\}$$



であるから

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1}-\frac{1}{2}\left\{a\sqrt{a^2-1}-\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$$

したがって

$$a+\sqrt{a^2-1}=e^{2S} \quad \cdots ③$$

であり

$$\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}=e^{2S} \text{ すなわち } a-\sqrt{a^2-1}=e^{-2S} \quad \cdots ④$$

であるから，③，④より

$$a=\frac{e^{2S}+e^{-2S}}{2}$$ 終

4 $a_n=(\sqrt{2}+1)^n$, $b_n=(\sqrt{2}-1)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，次の問に答えよ。 (50点)

問1 a_n を整数 p_n と整数 q_n を用いて $a_n=p_n+q_n\sqrt{2}$ と表したとき， $p_n{}^2-2q_n{}^2=(-1)^n$ が成立することを示せ。

問2 b_n を p_n と q_n を用いて表せ。

問3 実数 a に対して，$[a]$ を a を超えない最大の整数とする。例えば，$[2]=2$, $[3.9]=3$ である。n が奇数なら $[a_n]$ は偶数， n が偶数なら $[a_n]$ は奇数となることを示せ。

解答

問1 任意の自然数 n について，整数 p_n, q_n を用いて

$$(\sqrt{2}+1)^n=p_n+q_n\sqrt{2}\quad\cdots①$$

と表すとき

$$p_n{}^2-2q_n{}^2=(-1)^n\quad\cdots②$$

が成り立つことを示す。

(i) $n=1$ のとき，①より， $p_1+q_1\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$ であり，p_1, q_1 は整数であるから $p_1=q_1=1$

このとき， $p_1{}^2-2q_1{}^2=-1=(-1)^1$ であるから，②は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，②が成り立つと仮定すると

$$p_k{}^2-2q_k{}^2=(-1)^k\quad\cdots③$$

であり，①より

$$p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^{k+1}=(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}+1)^k$$
$$=(\sqrt{2}+1)(p_k+q_k\sqrt{2})=(p_k+2q_k)+(p_k+q_k)\sqrt{2}$$

ここで， p_n, q_n は整数であるから

$$\begin{cases} p_{k+1}=p_k+2q_k \\ q_{k+1}=p_k+q_k \end{cases}$$

よって

$$p_{k+1}{}^2-2q_{k+1}{}^2=(p_k+2q_k)^2-2(p_k+q_k)^2=-(p_k{}^2-2q_k{}^2)=(-1)^{k+1}\quad(\because③)$$

であるから， $n=k+1$ のときも②は成り立つ。

(i),(ii)より，②は任意の自然数 n について成り立つ。 終

問2 $a_n=(\sqrt{2}+1)^n$, $b_n=(\sqrt{2}-1)^n$ より， $a_nb_n=(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n=\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^n=1$

よって，問1より

$$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{p_n+q_n\sqrt{2}}=\frac{p_n+q_n\sqrt{2}}{p_n{}^2-2q_n{}^2}=\frac{p_n+q_n\sqrt{2}}{(-1)^n}$$

$\therefore b_n=(-1)^n(p^n+q_n\sqrt{2})$ (ただし，整数 p_n, q_n は $p_n{}^2-2q_n{}^2=(-1)^n$ を満たす) 終

→解答は次頁に続く

解答→前頁からの続き

問3 $0<\sqrt{2}-1<1$ より，$0<(\sqrt{2}-1)^n<1$ であるから $0<b_n<1$ …④

問2より，$b_n=(-1)^n(p_n-q_n\sqrt{2})$ において

(i) n が奇数のとき，$b_n=-(p_n-q_n\sqrt{2})$

$a_n=p_n+q_n\sqrt{2}$ であるから

$a_n-b_n=2p_n \quad \therefore a_n=2p_n+b_n$

ここで，④より，$2p_n<2p_n+b_n<2p_n+1$ すなわち $2p_n<a_n<2p_n+1$ であり，

p_n は整数であるから

$[a_n]=2p_n$ したがって，$[a_n]$ は偶数である。

(ii) n が偶数のとき，$b_n=p_n-q_n\sqrt{2}$

$a_n=p_n+q_n\sqrt{2}$ であるから

$a_n+b_n=2p_n \quad \therefore a_n=2p_n-b_n$

ここで，④より，$2p_n-1<2p_n-b_n<2p_n$ すなわち $2p_n-1<a_n<2p_n$ であり，

p_n は整数であるから

$[a_n]=2p_n-1$ したがって，$[a_n]$ は奇数である。

以上より，題意は示された。 終