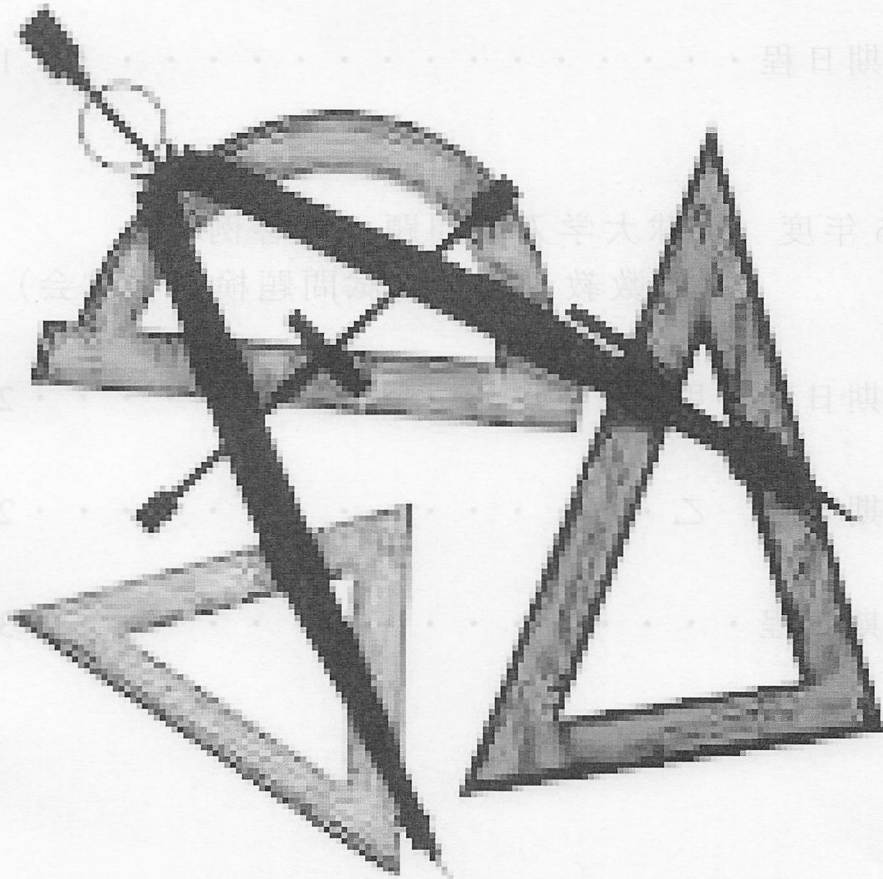


目 次

平成26年度 第38回高校数学教育を考える会 (沖縄県高校数学教育会・琉球大学)

平成 26 年 6 月 25 日 (水)



目 次

平成 26 年度 琉球大学入試試験問題についての感想と質問
(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 17

前期日程 乙 18

後期日程 19

平成 26 年度 琉球大学入試問題 解答例
(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 20

前期日程 乙 29

後期日程 32

2014 大学入試問題研究委員会

平成 26 年度 琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数学Ⅲ 数学 A	積分法	易 易	(1)で三角形の成立条件より x の取りうる値の範囲を示す必要はありますか。また、その場合示した生徒とそうでない受験生では得点に差はありますか。 (2)で求めた x の値が三角形の成立条件の x の取りうる値の範囲にあるかの確認をした受験生とそうでない受験生では差はありますか。
2 問 1 問 2 問 3	数学 C		易 標準 標準	問 1 はハミルトン・ケーリーをすぐ使って解いていいか？ 問 2 の途中 $(py+qx)A=(px-qy+1)E$ 計算で の後 いきなり $\begin{cases} py+qx=0 \\ px-qy+1=0 \end{cases}$ とした受験生に対して得点差は ありましたか。
3 問 1 問 2 問 3 問 4 問 5	数学Ⅲ		易 易 標準 標準 標準	 問 3 で上に凸よりの記述のありなしで得点差はありましたか もしくは図よりでもよいか？ 問 4 ができなくて問 5 が正解の場合得点はありますか。
4 問 1 問 2 問 3	数学 A		易 標準 標準	 問 3 は左辺と右辺の差をとっての証明だけでよいか n に関する帰納法での証明が必要であるのか。
前期・甲 全 体		・ 全体的な受験生の出来はどうでしたか？ ・ 満点はいましたか？いたならどの程度いましたか？ ・ 問題の中で誘導もされており、受験生にとって解きやすかったと思います。 ・ 今年度の問題はとても良問で受験生が勉強してきた力を発揮しやすい問題構成でした。		

平成 26 年度 琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1	数学 C	行列	標準	問 1 のできはどうでしたか？
問 2	数学Ⅲ	極限	標準	問 2 で対角化を使って解答した生徒はどのくらいいましたか？ 問 2 で問 1 の誘導を使わないで解いた生徒はいましたか？
2 問 1	数学Ⅲ	定積分	易	
問 2			やや難	問 2 の出来はどうでしたか？
問 3			やや難	問 3 を面積を使って解いた場合でも大丈夫ですか？ 問 2、問 3 について計算で解いた受験生と面積を利用して解いた受験生の割合はどれくらいですか？
3 問 1	数学Ⅱ		標準	問 1 ではどういう解き方の生徒が多かったですか？ 3 倍角の公式を使って解いた受験生もいましたか？
問 2			標準	問 2 はどういう解き方をした受験生が多かったですか？ また、接線の式の設定で条件のありなしで得点差はありますか？
4 問 1	数学 B		やや難	問 1 どれくらいの生徒が解けていましたか？
問 2			標準	問 2 は答だけでも正解ですか？ 問 2 で 2 進数を使って解いた生徒はいましたか？
後 期 全 体	・ 4 問ともとても良問でした。 ・ 今後も今回のような良問の出題をお願いします。			

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx$ を求めよ。

問2 $AB=AC=1$ である二等辺三角形 ABC において、 $BC=2x$ 、内接円の半径を r とおく。

(1) r を x を用いて表せ。

(2) r が最大となる x の値を求めよ(最大値そのものは求める必要はない)。

解答

$$\begin{aligned} \text{問1} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' dx = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad \text{終} \end{aligned}$$

問2 (1) 頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を M 、 $\triangle ABC$ の内心 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とすると、 M, H は $\triangle ABC$ とその内接円の接点であり、 $\triangle ABM \sim \triangle AOH$ である。

よって、 $AM:BM=AH:OH$ が成り立ち、

$$AH=AB-BH=AB-BM=1-x \quad \text{および}$$

$$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{1-x^2} \quad \text{より}$$

$$\sqrt{1-x^2}:x=(1-x):r$$

$$\therefore r = \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

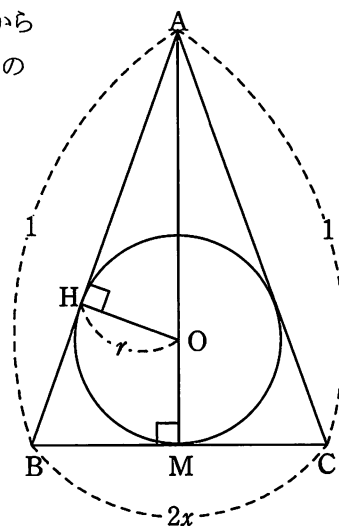
ただし、 $\triangle ABC$ の成立条件から $0 < 2x < 2$

すなわち $0 < x < 1$ である。終

別解 (三角形の面積と内接円の半径の関係式を利用)

($\triangle ABC$ の面積) $= \frac{1}{2} r (AB+BC+CA)$ が成り立つから

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} r (2+2x) \quad \therefore r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x} \quad \text{終}$$



→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

$$\begin{aligned} \text{問2 (2)} \quad \frac{dr}{dx} &= \frac{(1-2x) \cdot \sqrt{1-x^2} - x(1-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x^3-2x+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(x^2+x-1)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

より, $\frac{dr}{dx}=0$ とすると, $0 < x < 1$ であるから $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって, r の増減は表のようになり,

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となる。 終

x	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	1
$\frac{dr}{dx}$		+	0	-	
r		↗	極大	↘	

2 a, b, c, d は $a+d=0, ad-bc=1$ をみたす実数とし, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

次の問いに答えよ。(50点)

問1 $A^2=-E$ を示せ。

問2 p, q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする。実数 x, y に対して $(pA+qE)(xA+yE)=E$ が成り立つとき, x, y を p, q で表せ。

問3 θ を実数とする。すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^n = (\cos n\theta)E + (\sin n\theta)A$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。ここで, $(\sin \theta)A$ は行列 A の $\sin \theta$ 倍を表す。

解答

問1 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ (O は零行列) が成り立ち,

条件より, $a+d=0, ad-bc=1$ であるから

$$A^2+E=O$$

したがって, $A^2=-E$ である。 **終**

別解 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ であり, ここで, $a+d=0, ad-bc=1$ より

$$a^2+bc=bc+d^2=-1, b(a+d)=c(a+d)=0 \text{ であるから, } A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E \text{ である。}$$

問2 $(pA+qE)(xA+yE)=E$

$$\Leftrightarrow pxA^2+(qx+py)A+(qy-1)E=O$$

$$\Leftrightarrow (qx+py)A=(px-qy+1)E \quad (\because A^2=-E)$$

より, (i) $qx+py=0$ のとき, $px-qy+1=0$

$$\text{よって } \begin{cases} qx+py=0 \\ px-qy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q & p \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ であり,}$$

$$\begin{pmatrix} q & p \\ p & -q \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-(p^2+q^2)} \begin{pmatrix} -q & -p \\ -p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} q & p \\ p & -q \end{pmatrix} \quad (p^2+q^2 \neq 0) \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} q & p \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+q^2} \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$$

(ii) $qx+py \neq 0$ のとき, $A=kE$ $\left(k=\frac{px-qy+1}{qx+py}\right)$ と表されて,

$A^2=k^2E$ であるが, $A^2=-E$ より $k^2=-1$ となり, これを満たす実数 k は存在しない。

したがって, $x=-\frac{p}{p^2+q^2}, y=\frac{q}{p^2+q^2}$ である。 **終**

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問3 n は正の整数とする。

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^n = (\cos n\theta)E + (\sin n\theta)A \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{について}$$

(i) $n=1$ のとき, ①は明らかになり立つ。(ii) $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^k = (\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A$$

よって

$$\begin{aligned} \{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^{k+1} &= \{(\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A\} \cdot \{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\} \\ &= (\cos k\theta \cdot \cos \theta - \sin k\theta \cdot \sin \theta)E + (\sin k\theta \cdot \cos \theta + \cos k\theta \cdot \sin \theta)A \quad (\because A^2 = -E) \\ &= \{\cos(k\theta + \theta)\}E + \{\sin(k\theta + \theta)\}A \\ &= \{\cos(k+1)\theta\}E + \{\sin(k+1)\theta\}A \end{aligned}$$

であるから, $n=k+1$ のときも①は成り立つ。(i), (ii) より, ①はすべての正の整数 n に対して成り立つ。 終

別解

問2 $(pA + qE)(xA + yE) = E \quad \dots \textcircled{1}$ において, $pA + qE = \begin{pmatrix} ap + q & bp \\ cp & dp + q \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} \det(pA + qE) &= (ap + q)(dp + q) - bc p^2 = (ad - bc)p^2 + (a + d)pq + q^2 \\ &= p^2 + q^2 \quad (\because a + d = 0, ad - bc = 1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であるから, $(pA + qE)^{-1}$ が存在して, ①の両辺に左から $(pA + qE)^{-1}$ を掛けると

$$xA + yE = (pA + qE)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} dp + q & -bp \\ -cp & ap + q \end{pmatrix}$$

ここで, $xA + yE = \begin{pmatrix} ax + y & bx \\ cx & dx + y \end{pmatrix}$ であるから, $k = \frac{1}{p^2 + q^2}$ とおくと

$$\begin{cases} ax + y = k(dp + q) & \dots \textcircled{2} \\ bx = k \cdot (-bp) & \dots \textcircled{3} \\ cx = k \cdot (-cp) & \dots \textcircled{4} \\ dx + y = k(ap + q) & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

②-⑤より, $(a-d)x = -(a-d)kp \quad \therefore a=d$ または $x = -kp$ ③-④より, $(b-c)x = -(b-c)kp \quad \therefore b=c$ または $x = -kp$ $a=d$ のとき, $a=d=0$ ($\because a+d=0$) となり, よって $bc = -1$ ($\because ad - bc = 1$) である。このとき, $b=c$ ならば $b^2 = -1$ となり, これを満たす実数 b は存在しない。したがって, $x = -kp$ であり, $y = kq$ ($\because$ ②, ⑤) である。

$$\text{以上より, } x = -\frac{p}{p^2 + q^2}, y = \frac{q}{p^2 + q^2} \quad \text{終}$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

参考 本問の背景を考えてみた。

問2の結果より

$$(qE + pA)\left(\frac{q}{p^2 + q^2}E - \frac{p}{p^2 + q^2}A\right) = E$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}E + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}A\right)\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}E - \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}A\right) = E$$

であるから, $\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \cos \theta$, $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \sin \theta$ となる θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) がとれて,

$M_\theta = (\cos \theta)E + (\sin \theta)A$ とすると $M_\theta M_{-\theta} = E$ となる。(どうみても回転と関係がありそう)

また

$$M_\alpha M_\beta = \{(\cos \alpha)E + (\sin \alpha)A\}\{(\cos \beta)E + (\sin \beta)A\}$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)E + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)A \quad (\because A^2 = -E)$$

$$= \{\cos(\alpha + \beta)\}E + \{\sin(\alpha + \beta)\}A$$

すなわち $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha + \beta}$ が成り立つ。

よって, $(M_\theta)^2 = M_{2\theta}$, $(M_\theta)^3 = M_{3\theta}$, $\dots$, $(M_\theta)^n = M_{n\theta}$ を得る。

これが問3の結果であり, 重要な定理の1つである

「ド・モアブルの定理: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (i は虚数単位)」

を連想させるものである。この定理で「 $1 \rightarrow E$, $i \rightarrow A$ 」とすればよい。

そのためには, 問1の結果「 $A^2 = -E$ 」が必要であり, 当然ながら「 $i^2 = -1$ 」とつながっていることは瞬時に推測できる。

大変興味深いものである。

- 3
- 整数 m, n は $m \geq 1, n \geq 2$ をみたすとする。次の問いに答えよ。(50点)
- 問 1 $x > 0$ のとき、 $y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ。答を記すのみでよい。
- 問 2 座標平面上の 3 点 $A(m, \log m), B(m+1, \log m), C(m+1, \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする。 S_m を m を用いて表せ。答を記すのみでよい。
- 問 3 $f(m) = \log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x \, dx$ とおく。 $f(m) < 0$ が成り立つことを、 $y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ。
- 問 4 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて、不等式
$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$
を証明せよ。
- 問 5 不等式 $n! < e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ。ただし、 e は自然対数の底である。

解答

- 問 1 $y = \log x$ において、 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$ 終
- 問 2 $\triangle ABC$ は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形であるから
$$S_m = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \{\log(m+1) - \log m\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\log(m+1) - \log m\}$$

$$= \frac{1}{2} \{\log(m+1) - \log m\}$$
 終
- 問 3 $A'(m, 0), B'(m+1, 0) (m \geq 1)$ とする。
 $\log m = 1 \cdot \log m = A'B' \cdot AA'$ であるから、長方形 $AA'B'B$ の面積を T_m とすると、
 $T_m = \log m$ である。
 $1 \leq x$ のとき、 $\log x \geq 0$ であるから、 $\int_m^{m+1} \log x \, dx (m \geq 1)$ は、
曲線 $y = \log x$ と 2 直線 $x = m, x = m+1$ および x 軸で囲まれる図形の面積を表す。
この面積を U_m とすると、 $U_m = \int_m^{m+1} \log x \, dx$ である。
曲線 $y = \log x$ は上に凸であるから、弧 AC は線分 AC より上側にあつて、
 $U_m > (\text{台形 } AA'B'C) = S_m + T_m$ すなわち $T_m + S_m - U_m < 0$ が成り立つ。
ここで、 $f(m) = T_m + S_m - U_m$ であるから、 $f(m) < 0$ が成り立つ。 終

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問4 ($f(m) < 0$ より, $m=1, 2, \dots, n-1$ として辺々加えることにより, $\sum_{m=1}^{n-1} f(m) < 0$ を得る.)

$$\sum_{m=1}^{n-1} f(m) < 0 \quad \text{および} \quad \sum_{m=1}^{n-1} f(m) = \sum_{m=1}^{n-1} T_m + \sum_{m=1}^{n-1} S_m - \sum_{m=1}^{n-1} U_m \quad \text{より}$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} T_m < \sum_{m=1}^{n-1} U_m - \sum_{m=1}^{n-1} S_m$$

であり

$$\sum_{m=1}^{n-1} T_m = \log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} U_m &= \int_1^2 \log x \, dx + \int_2^3 \log x \, dx + \dots + \int_{n-1}^n \log x \, dx \\ &= \int_1^n \log x \, dx = \int_1^n (x)' \cdot \log x \, dx = \left[x \log x \right]_1^n - \int_1^n dx \\ &= n \log n - (n-1) = n \log n - n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} S_m &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2} \{ \log(m+1) - \log m \} \\ &= \frac{1}{2} (\log 2 - \log 1) + \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2) + \dots + \frac{1}{2} (\log n - \log(n-1)) \\ &= \frac{1}{2} \log n \end{aligned}$$

であるから

$$\log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

が成り立つ。 終

問5 問4の結果より, $\log n! = \{\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log(n-1)\} + \log n$

$$\begin{aligned} &< \left(n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n \right) + \log n \\ &= n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n = n(\log n - \log e) + \log e + \log \sqrt{n} \\ &= \log \left(\frac{n}{e} \right)^n + \log e + \log \sqrt{n} = \log \left\{ e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

したがって, $n! < e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ が成り立つ。 終

- 4 1個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う。景品はAとBの2種類あり、次の規則にしたがって景品をもらえるとする。

- ・出た目の数が6のときは、景品Aをもらえる。
- ・出た目の数が4, 5のときは、景品Bをもらえる。
- ・出た目の数が1, 2, 3のときは、景品はもらえない。
- ・景品Aと景品Bの2種類とももらうことができたならゲームは終了する。

ちょうど n 回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(50点)

問1 p_2 の値を求めよ。

問2 n を2以上の整数とする。 p_n を n を用いて表せ。

問3 n を2以上の整数とする。不等式

$$p_{n+1} - p_n < \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$$

を示せ。ただし、 $p_1 = 0$ とする。

解答

問1 さいころを1回投げて、景品A、景品Bをもらえる事象を、それぞれ A 、 B とし、景品をもらえない事象を C とする。さいころを n 回投げてゲームが終了する事象を X_n とすると、

X_2 は、 A 、 B が1回ずつ起こるから

$$p_2 = {}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \quad \text{終}$$

問2 X_n は、(i) $(n-1)$ 回目まで A または C が起こり(ただし、 A は少なくとも1回起こる)、 n 回目に B が起こるとき

(ii) $(n-1)$ 回目まで B または C が起こり(ただし、 B は少なくとも1回起こる)、 n 回目に A が起こるとき

のいずれかであり、これらは互いに排反である。

(i)の $(n-1)$ 回目までにおいて、 A または C が起こる確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}$ であり、このうち、 A が少な

くとも1回起こる確率は、すべて C が起こる確率を除いた $\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$ となる。

(ii)の $(n-1)$ 回目までにおいても、同様にして $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}$ となる。

よって

$$\begin{aligned} p_n &= \left[\left(\frac{4}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6} \right)^{n-1} \right] \cdot \frac{2}{6} + \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6} \right)^{n-1} \right] \cdot \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 4^{n-1} - 3^n + 5^{n-1}}{6^n} \\ &= \frac{2^{2n-1} - 3^n + 5^{n-1}}{6^n} \quad (n \geq 2) \quad \text{終} \end{aligned}$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

【解答】

問3 $p_1=0$ とすると、問2の結果は1以上の整数 n に対して成り立つ。

$$p_{n+1}-p_n < \frac{2}{3}(p_n-p_{n-1}) \Leftrightarrow 3p_{n+1}-5p_n+2p_{n-1} < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから、①を示す。

 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} & 3p_{n+1}-5p_n+2p_{n-1} \\ &= 3 \cdot \frac{2^{2n+1}-3^{n+1}+5^n}{6^{n+1}} - 5 \cdot \frac{2^{2n-1}-3^n+5^{n-1}}{6^n} + 2 \cdot \frac{2^{2n-3}-3^{n-1}+5^{n-2}}{6^{n-1}} \\ &= \frac{2^{2n+1}-3^{n+1}+5^n}{2 \cdot 6^n} - 10 \cdot \frac{2^{2n-1}-3^n+5^{n-1}}{2 \cdot 6^n} + 24 \cdot \frac{2^{2n-3}-3^{n-1}+5^{n-2}}{2 \cdot 6^n} \end{aligned}$$

であり、よって

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 6^n(3p_{n+1}-5p_n+2p_{n-1}) \\ &= (2^{2n+1}-3^{n+1}+5^n) - 10(2^{2n-1}-3^n+5^{n-1}) + 24(2^{2n-3}-3^{n-1}+5^{n-2}) \\ &= -(3^n+5^{n-2}) < 0 \end{aligned}$$

 $2 \cdot 6^n > 0$ であるから、 $3p_{n+1}-5p_n+2p_{n-1} < 0$ すなわち、2以上の整数 n に対して①が成り立ち、したがって、与えられた不等式は成り立つ。 【終】

$$\begin{aligned} \text{【別解】 } p_{n+1}-p_n &= \frac{2^{2n+1}-3^{n+1}+5^n}{6^{n+1}} - \frac{2^{2n-1}-3^n+5^{n-1}}{6^n} = \frac{-2^{2n}+3^{n+1}-5^{n-1}}{6^{n+1}} \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{-2^{2(n-1)} + \frac{3}{4} \cdot 3^n - \frac{5}{4} \cdot 5^{n-2}}{6^n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{-2^{2(n-1)} + 1 \cdot 3^n - 1 \cdot 5^{n-2}}{6^n} \end{aligned}$$

であり、ここで、①から $p_n-p_{n-1} = \frac{-2^{2(n-1)}+3^n-5^{n-2}}{6^n}$ であるから、

$$p_{n+1}-p_n < \frac{2}{3}(p_n-p_{n-1}) \quad (n \geq 2) \text{ が得られる。 【終】}$$

1 $\triangle ABC$ において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を D 、辺 AC を $3:1$ に内分する点を E とし、

線分 CD , BE の交点を P とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\overrightarrow{AP}$ を、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

問2 $AB=3$, $AC=4$, $AP=\sqrt{7}$ のとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

解答

問1 $BP:PE=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}s\overrightarrow{AC} \dots ①$$

$CP:PD=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC} \dots ②$$

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ であるから、①, ②より

$$\begin{cases} 1-s=\frac{2}{3}t \\ \frac{3}{4}s=1-t \end{cases} \therefore s=\frac{2}{3}, t=\frac{1}{2}$$

よって

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{終}$$

別解 〈同一直線上にあるための条件を利用する〉 (①まで同じとする)

$$① \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}(1-s)\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}s\overrightarrow{AC}$$

ここで、3点 D , P , C は同一直線上にあるから

$$\frac{3}{2}(1-s)+\frac{3}{4}s=1 \quad \therefore s=\frac{2}{3}$$

よって

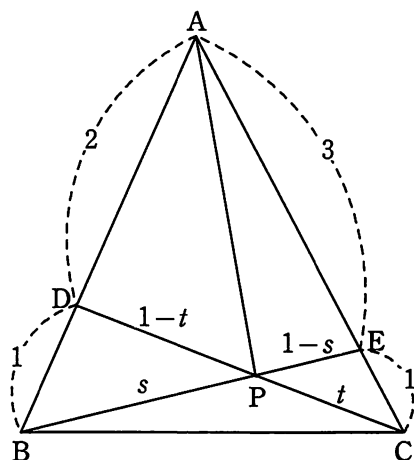
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{終}$$

別解 〈メネラウスの定理による〉

$$\frac{AB}{BD} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA}=1 \text{ が成り立つから, } \frac{3}{1} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{1}{3}=1 \quad \therefore \frac{DP}{PC}=1$$

すなわち、点 P は線分 DC の中点であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{終}$$



→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

$$\text{問2} \quad |\overrightarrow{AP}|^2 = \left| \frac{1}{6}(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) \right|^2 = \frac{1}{36}(4|\overrightarrow{AB}|^2 + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 9|\overrightarrow{AC}|^2)$$

ここで, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=4$, $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{7}$ であるから

$$7 = \frac{1}{36}(4 \cdot 3^2 + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 9 \cdot 4^2)$$

$$= \frac{1}{12}(12 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 48)$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$$

よって

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$0 < \angle BAC < \pi \text{ であるから } \angle BAC = \frac{\pi}{3} \quad \text{終}$$

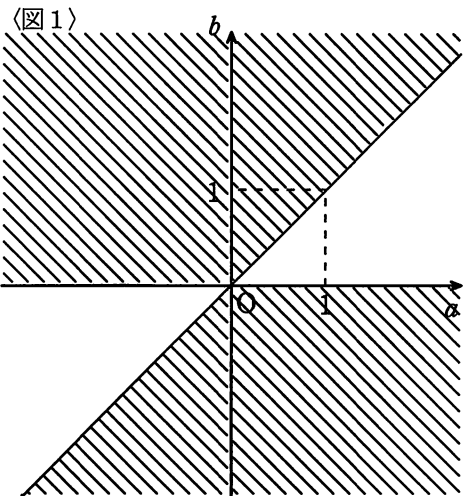
2 a, b を実数とし、放物線 $y = x(x - a)$ を C とする。次の問いに答えよ。(50点)

- 問1 C 上の点 $(t, t(t - a))$ における C の接線の方程式を求めよ。
- 問2 点 $(b, 0)$ から C に、相異なる2本の接線が引けるとする。このとき a, b がみたす不等式を求め、その不等式が表す領域を、解答欄の ab 平面に図示せよ。
- 問3 C と x 軸が囲む部分の面積を $S(a)$ とする。関数 $y = S(a)$ ($-2 \leq a \leq 2$) のグラフをかけ。

解答

問1 $C: y = x(x - a)$ において、 $y' = 2x - a$
よって、 C 上の点 $(t, t(t - a))$ における C の接線の方程式は
 $y - t(t - a) = (2t - a)(x - t)$
すなわち $y = (2t - a)x - t^2 \dots \textcircled{1}$ 終

問2 直線 $\textcircled{1}$ が点 $(b, 0)$ を通るとき
 $0 = (2t - a)b - t^2$
すなわち $t^2 - 2bt + ab = 0 \dots \textcircled{2}$
点 $(b, 0)$ から C に2本の接線が引れるとき
 t の方程式 $\textcircled{2}$ が異なる2つの実数解をもつ
よって、求める条件は
 $b^2 - ab > 0 \Leftrightarrow b(b - a) > 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b > a \end{cases}$ または $\begin{cases} b < 0 \\ b < a \end{cases}$



であり、これらが表す領域は〈図1〉の斜線部分(境界線を含まない)である。 終

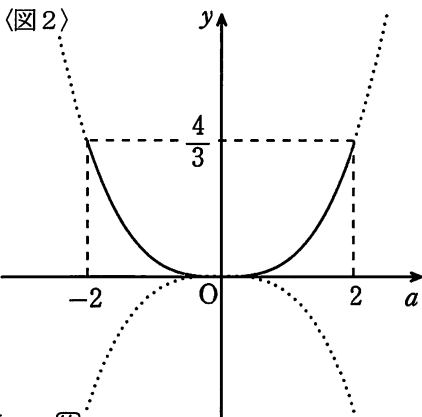
問3 下に凸な放物線 C と x 軸の交点の x 座標は $x = 0, a$ であるから

(i) $-2 \leq a \leq 0$ のとき

$$S(a) = \int_a^0 -x(x - a) dx = -\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (0 - a)^3$$
$$= -\frac{1}{6} a^3$$

(ii) $0 \leq a \leq 2$ のとき

$$S(a) = \int_0^a -x(x - a) dx = -\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (a - 0)^3$$
$$= \frac{1}{6} a^3$$



よって、曲線 $y = S(a)$ ($-2 \leq a \leq 2$) は〈図2〉のようになる。 終

参考

(i), (ii) の定積分の計算において、 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ を利用した。

1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の n 乗を $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする。また、 $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$ として、

$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $AM = MB$ かつ $xw - yz \neq 0$ をみたす行列 $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を1つ求めよ。

問2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n}$ の値を求めよ。

解答

問1 $AM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+w \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix}$

$MB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y \\ \alpha z & \beta w \end{pmatrix}$

より、 $AM = MB$ のとき

$$\begin{cases} 3x+z=\alpha x \\ 3y+w=\beta y \\ 2x+z=\alpha z \\ 2y+w=\beta w \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (\alpha-3)x=z & \cdots \text{①} \\ (\beta-3)y=w & \cdots \text{②} \\ (\alpha-1)z=2x & \cdots \text{③} \\ (\beta-1)w=2y & \cdots \text{④} \end{cases}$$

①, ③より、 $(\alpha-1)(\alpha-3)x=2x$ すなわち $(\alpha^2-4\alpha+1)x=0$

ここで、 $\alpha=2+\sqrt{3}$ は $\alpha^2-4\alpha+1=0$ の解であるから、 x は任意

②, ④より、 $(\beta-1)(\beta-3)y=2y$ すなわち $(\beta^2-4\beta+1)y=0$

ここで、 $\beta=2-\sqrt{3}$ は $\beta^2-4\beta+1=0$ の解であるから、 y は任意

よって、 $x=y=1$ とすると、①より、 $z=\alpha-3=\sqrt{3}-1$

②より、 $w=\beta-3=-\sqrt{3}-1$

このとき、 $xw-yz=1 \cdot (-\sqrt{3}-1) - 1 \cdot (\sqrt{3}-1) = -2\sqrt{3} \neq 0$ である。

したがって、 $AM = MB$ かつ $xw - yz \neq 0$ を満たす M の1つは $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$ (終)

別解 〈行列の対角化による〉

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (k は実数, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) とすると、 $(A - kE) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (E は単位行列) $\cdots (*)$ であり、

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より、 $A - kE$ の逆行列は存在しない。よって、 $\det(A - kE) = 0$ であるから、

$A - kE = \begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}$ より、

$(3-k)(1-k)-2=0$ すなわち $k^2-4k+1=0$ $\therefore k=2+\sqrt{3}(=\alpha), 2-\sqrt{3}(=\beta)$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

$$(*) \text{より, } k=\alpha \text{ のとき, } \begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 \\ 2 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (3-\alpha)x+y=0$$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha-3 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$k=\beta \text{ のとき, 同様にして } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta-3 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

$$\text{ここで, } P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \text{ とすると, } \det P = x_1 y_2 - x_2 y_1 = (\beta-3) - (\alpha-3) = \beta - \alpha \neq 0 \text{ } (\because \alpha \neq \beta)$$

$$\text{より, } P^{-1} \text{ が存在して, } P^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \beta-3 & -1 \\ -\alpha+3 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \beta-3 & -1 \\ -\alpha+3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-3 & \beta-3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \alpha\beta-4\alpha+1 & \beta^2-4\beta+1 \\ -(\alpha^2-4\alpha+1) & -\alpha\beta+4\beta-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, $\alpha^2-4\alpha+1=\beta^2-4\beta+1=0$, $\alpha\beta=1$, $\beta-\alpha=-2\sqrt{3}$ であるから

$$P^{-1}AP = \frac{1}{-2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2(1-2\alpha) & 0 \\ 0 & 2(-1+2\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = B$$

$$\text{この両辺に左から } P \text{ を掛けると } AP = PB \text{ であるから, } M = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \quad \text{終}$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問2 問1より, M^{-1} が存在して, $AM=MB$ の両辺に左から M^{-1} を掛けると

$$M^{-1}AM=B$$

よって, $(M^{-1}AM)^n=B^n$ であり

$$(M^{-1}AM)^n=(M^{-1}AM)(M^{-1}AM)\cdots(M^{-1}AM)=M^{-1}A^nM$$

$$B^n=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

であるから, $M^{-1}A^nM=B^n$ を得る. この両辺に左から M , 右から M^{-1} を掛けると

$$\begin{aligned} A^n &= MB^nM^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha-3 & \beta-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta-3 & -1 \\ -\alpha+3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \alpha^n(\beta-3)-\beta^n(\alpha-3) & -(\alpha^n-\beta^n) \\ (\alpha-3)(\beta-3)(\alpha^n-\beta^n) & -\alpha^n(\alpha-3)+\beta^n(\beta-3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} \cdot \frac{\alpha^n(\beta-3)-\beta^n(\alpha-3)}{\alpha^n-\beta^n}$$

であり, $0<\beta<\alpha$ より $0<\frac{\beta}{\alpha}<1$ であるから

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} \cdot \frac{(\beta-3)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n(\alpha-3)}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\alpha-3} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{終}$$

2 次の問いに答えよ。(50点)

問1 定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ を求めよ。

問2 定積分 $\int_{\cos \frac{5\pi}{12}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\cos \frac{\pi}{12}} \sqrt{1-x^2} dx$ を求めよ。

問3 次の定積分 A, B について、 A は B より大きいのか、小さいのか、等しいのか、理由を付けて答えよ。

$$A = \int_0^{\cos \frac{2\pi}{5}} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{\cos \frac{\pi}{10}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$B = \int_{\cos \frac{2\pi}{5}}^{\cos \frac{3\pi}{10}} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{\cos \frac{\pi}{5}}^{\cos \frac{\pi}{10}} \sqrt{1-x^2} dx$$

解答

問1 $x = \cos \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$ であり、

x と θ の対応は〈表1〉のようになる。

よって

〈表1〉

x	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\cos^2 \theta} \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\because \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ で } \sin \theta > 0 \right) \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2}{3}\pi - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{12} \quad \text{終} \end{aligned}$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問2 $I_{\alpha, \beta} = \int_{\cos \frac{\alpha\pi}{12}}^{\cos \frac{\beta\pi}{12}} \sqrt{1-x^2} dx$ ($0 \leq \alpha \leq 6, 0 \leq \beta \leq 6$) とする。

$x = \cos \theta$ とおくと, $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$ であり,

x と θ の対応は〈表2〉のようになる。

よって

x	$\cos \frac{\alpha\pi}{12}$	$\rightarrow$	$\cos \frac{\beta\pi}{12}$
θ	$\frac{\alpha\pi}{12}$	$\rightarrow$	$\frac{\beta\pi}{12}$

$$I_{\alpha, \beta} = \int_{\frac{\alpha\pi}{12}}^{\frac{\beta\pi}{12}} \sqrt{1-\cos^2 \theta} \cdot (-\sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\alpha\pi}{12}}^{\frac{\beta\pi}{12}} \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\because \frac{\beta\pi}{12} \text{ と } \frac{\alpha\pi}{12} \text{ の間で } \sin \theta \geq 0 \right)$$

$$= \int_{\frac{\alpha\pi}{12}}^{\frac{\beta\pi}{12}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\alpha\pi}{12}}^{\frac{\beta\pi}{12}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha\pi}{12} - \frac{\beta\pi}{12} \right) - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{6} - \sin \frac{\beta\pi}{6} \right) = \frac{(\alpha-\beta)\pi}{24} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{6} - \sin \frac{\beta\pi}{6} \right)$$

$\frac{1}{2} = \cos \frac{4\pi}{12}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{12}$ であり, 求める定積分は, $I_{5,4} + I_{2,1}$ であるから

$$\begin{aligned} I_{5,4} + I_{2,1} &= \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} \quad \left(\because \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6}, \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{終} \end{aligned}$$

問3 $J_{\alpha, \beta} = \int_{\cos \frac{\alpha\pi}{10}}^{\cos \frac{\beta\pi}{10}} \sqrt{1-x^2} dx$ ($0 \leq \alpha \leq 5, 0 \leq \beta \leq 5$) とする。

問2と同様にして, $J_{\alpha, \beta} = \int_{\frac{\alpha\pi}{10}}^{\frac{\beta\pi}{10}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{(\alpha-\beta)\pi}{20} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{5} - \sin \frac{\beta\pi}{5} \right)$

であり, $A = J_{5,4} + J_{1,0} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{4} \left(\sin \pi - \sin \frac{4\pi}{5} \right) + \frac{\pi}{20} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\pi}{5} - \sin 0 \right)$

$$= \frac{\pi}{10} \quad \left(\because \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5} \right)$$

$$B = J_{4,3} + J_{2,1} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} \right) + \frac{\pi}{20} - \frac{1}{4} \left(\sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right)$$

$$= \frac{\pi}{10} \quad \left(\because \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}, \sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

したがって, $A = B$ である。終

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

〔別解〕(定積分の表す図形的意味を考える)

問1 この定積分は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分と x 軸、および2直線 $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ によって

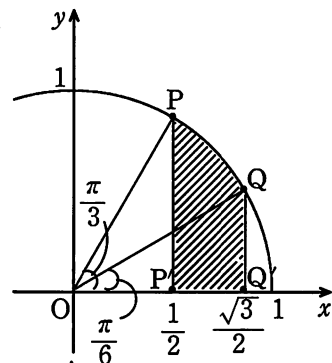
囲まれる〈図1〉の斜線部分の面積を表すから、

〈図1〉

(扇形OPQの面積) + ($\triangle OQQ'$ の面積) - ($\triangle OPP'$ の面積)

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$



問2 求める定積分を I とし、 $\theta = \frac{\pi}{12}$, $x_a = \cos a\theta$ とすると、

〈図2〉

$$I = \int_{x_5}^{x_4} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1-x^2} dx$$

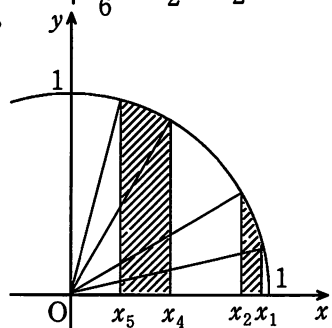
と表されて、問1と同様にして、(〈図2〉の斜線部分の面積)

$$I = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (5\theta - 4\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_4 \cdot \sin 4\theta - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_5 \cdot \sin 5\theta \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (2\theta - \theta) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_1 \cdot \sin \theta - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x_2 \cdot \sin 2\theta \right\}$$

$$= \theta + \frac{1}{2} (\sin 4\theta \cos 4\theta - \sin 5\theta \cos 5\theta + \sin \theta \cos \theta - \sin 2\theta \cos 2\theta)$$

$$= \theta + \frac{1}{4} (\sin 8\theta - \sin 10\theta + \sin 2\theta - \sin 4\theta) \left(\because \sin a\theta \cos a\theta = \frac{1}{2} \sin(2a\theta) \right)$$



ここで、 $8\theta + 4\theta = 12\theta = \pi$ より $\sin 8\theta = \sin(\pi - 4\theta) = \sin 4\theta$,

同様にして、 $\sin 10\theta = \sin 2\theta$ であるから、

$$I = \theta = \frac{\pi}{12}$$

問3 $\theta = \frac{\pi}{10}$, $x_a = \cos a\theta$ として、問2と同様にすると、

$$A = \int_{x_5}^{x_4} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{1-x^2} dx = \theta + \frac{1}{2} (\sin 8\theta - \sin 10\theta + \sin 0 - \sin 2\theta)$$

ここで、 $8\theta + 2\theta = 10\theta = \pi$ より $\sin 8\theta = \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$, $\sin 10\theta = \sin 0 = 0$ であるから、

</

3 次の問いに答えよ。(50点)

問1 正三角形ABCの辺BCの3等分点を、Bに近い方から順にD、Eとする。 $\angle DAE$ は 20° より大きいか、小さいか、等しいか、理由を付けて答えよ。

問2 xy 平面上に2つの円 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, $C_2: x^2 + (y-4)^2 = 1$ がある。 C_1 と C_2 の共通接線のうち、 C_1 と第1象限で接し、 C_2 と第2象限で接するような接線の方程式を求めよ。

解答

問1 $\angle DAE = \alpha$ とする。また、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ より、 $\angle BAD = \angle CAE = \beta$ とする。

$$\angle CAB = \frac{\pi}{3} \text{ より、 } \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{3} \cdots \textcircled{1}$$

正三角形ABCであるから、 $AB = 3a$ とすると、 $BD = DE = a$ と表される。

$\triangle ABD$ において、 $AD^2 = (3a)^2 + a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \cos \frac{\pi}{3}$ が成り立つから、

$$AD^2 = 7a^2 \quad \therefore AD = \sqrt{7}a \quad (\because AD > 0)$$

よって、 $\cos \beta = \frac{(\sqrt{7}a)^2 + (3a)^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{7}a \cdot 3a}$ が成り立つから、

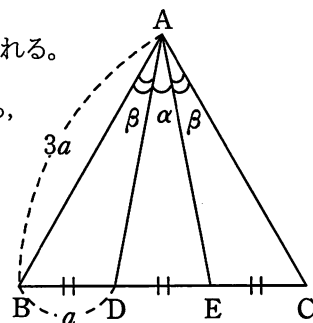
$$\cos \beta = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

また、二等辺三角形ADEにおいて、 $\cos \alpha = \frac{(\sqrt{7}a)^2 + (\sqrt{7}a)^2 - a^2}{2 \cdot \sqrt{7}a \cdot \sqrt{7}a}$ が成り立つから、

$$\cos \alpha = \frac{13}{14}$$

よって、 $\cos \alpha < \cos \beta$ が成り立ち、 α, β は鋭角であるから $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である。

①より、 $\frac{\pi}{3} = \alpha + 2\beta < \alpha + 2\alpha = 3\alpha \quad \therefore \frac{\pi}{9} < \alpha$ すなわち、 $\angle DAE$ は 20° より大きい。 (終)



別解 ($\cos \alpha$ の値から α を直接評価することもできる。 $\cos \alpha$ の求め方は本解に同じ)

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \end{aligned}$$

であるから、 $\cos \alpha = \frac{13}{14}$ より、

$$\cos 3\alpha = 4 \cdot \left(\frac{13}{14}\right)^3 - 3 \cdot \frac{13}{14} = \frac{143}{343} < \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{すなわち、} \cos 3\alpha < \cos \frac{\pi}{3}$$

であり、 α, β は鋭角であるから、 $\frac{\pi}{3} < 3\alpha \quad \therefore \frac{\pi}{9} < \alpha$ (以下略)

→前頁からの続き

問1

別解 (三角形の面積を利用して評価する)

$\triangle ABD$, $\triangle ADE$ の面積は等しく, それぞれ $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB \cdot \sin \beta$, $\frac{1}{2} \cdot AD^2 \cdot \sin \alpha$ と表されるから,

$$\frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} AD^2 \cdot \sin \alpha \quad \therefore \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AD}{AB}$$

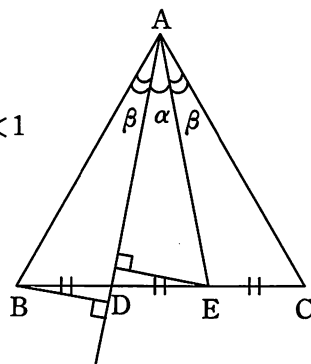
ここで, 明らかに $AD < AB$ すなわち $\frac{AD}{AB} < 1$ であるから, $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} < 1$

$\therefore \sin \beta < \sin \alpha$ ($\because \alpha$ は鋭角であるから $\sin \alpha > 0$)

α, β は鋭角であるから, $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (以下, 本解と同じ)

※ほぼ同じであるが, 図のように2点 B, E から直線 AD に引いた垂線の長さが等しいことから, $AB \cdot \sin \beta = AE \cdot \sin \alpha$

すなわち $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AB}$ がわかる。

**別解** (正弦定理を利用する)

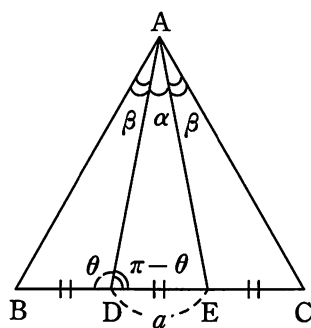
$BD = DE = a$, $\angle BDA = \theta$ とする。

$\triangle ABD$ において, $\frac{a}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \theta}$ が成り立つ。

$\triangle ADE$ において, $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AE}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{AD}{\sin \theta}$ が成り立つ。

ここで, 明らかに $AD < AB$ であるから, $\frac{a}{\sin \alpha} < \frac{a}{\sin \beta}$

$\therefore \sin \beta < \sin \alpha$ ($\because \sin \alpha > 0, \sin \beta > 0$) (以下, 本解と同じ)



問2 円 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 上の点 (a, b) (ただし, $a > 0, b > 0$) における C_1 の接線の方程式は

$$ax + by = 4 \quad \text{すなわち} \quad ax + by - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $a^2 + b^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$ である。

直線①が円 C_2 と接するとき, C_2 の中心 $(0, 4)$ と直線①の距離が1であるから

$$\frac{|4b - 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

であり, ②より

→前頁からの続き

解答

問2 よって, ②および $a > 0$ より, $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

であり, C_1 と C_2 の共通接線のうち, C_1 との接点が第1象限であるものは

$$\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{3}{2}y - 4 = 0, \quad \frac{\sqrt{15}}{2}x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$$

すなわち $\sqrt{7}x + 3y - 8 = 0, \sqrt{15}x + y - 8 = 0$ である。

このうち, C_2 と第2象限で接するものは, その y 切片が2より大きく, 3より小さいから,

求める共通接線の方程式は

$$\sqrt{7}x + 3y - 8 = 0 \quad \text{終}$$

参考 (領域を利用して b の値を吟味する。前頁 $|b-1| = \frac{1}{2}$ まで同じ)

ここで, ①の左辺を $f(x, y)$ とすると, C_1, C_2 の中心である2点 $(0, 0), (0, 4)$ が共通接線に関して反対側にあることから, $f(0, 0) \cdot f(0, 4) < 0$ が成り立つ。

$$f(0, 0) = -4, f(0, 4) = 4(b-1) \text{ より, } -16(b-1) < 0 \quad \therefore b > 1$$

よって, $b = \frac{3}{2}$ である。

別解 円 C_2 の中心を P とする。

求める共通接線を ℓ とし, ℓ の C_1 との接点を A , C_2 との接点を B , y 軸との交点を C とする。

$OA \perp \ell, PB \perp \ell$ であるから, $OA \parallel PB$ である。

よって, $\triangle OAC \sim \triangle PBC$ より,

$$OC:PC = OA:PB = 2:1$$

$$\therefore OC = \frac{2}{3}OP = \frac{8}{3} \quad \text{すなわち} \quad C\left(0, \frac{8}{3}\right)$$

また, ℓ と x 軸の交点を D とすると, $\triangle COD \sim \triangle CBP$ より,

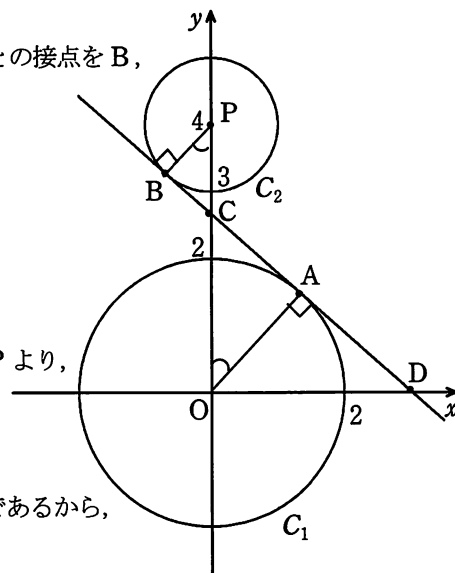
$$OD:BP = OC:BC \quad \therefore OD = \frac{BP \cdot OC}{BC}$$

ここで, $BC = \sqrt{PC^2 - BP^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ であるから,

$$OD = 1 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

したがって, $OD = \frac{8}{\sqrt{7}}, OC = \frac{8}{3}$ より, 求める共通接線 ℓ の方程式は

$$\frac{\sqrt{7}}{8}x + \frac{3}{8}y = 1 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{7}x + 3y = 8 \quad \text{終}$$



- 4 数列 $\{a_n\}$ は、相異なる3の累乗 3^d (指数 d は0または正の整数) の和で表される整数を、小さい順に並べて定められている。つまり、

$$a_1=1, a_2=3, a_3=1+3=4, a_4=3^2=9, a_5=1+3^2=10, a_6=3+3^2=12, \dots$$

である。次の問いに答えよ。(50点)

問1 a_n を相異なる3の累乗の和で表す表し方は、ただ1通りであることを証明せよ。

問2 第50項 a_{50} を求めよ。

解答

問1 a_n を表す3の累乗 3^d のうち、指数 d の最大値を M ($M \geq 0$) とする。

a_n が2通りに表されるとすると

$$\begin{aligned} a_n &= k_0 \cdot 3^0 + k_1 \cdot 3^1 + k_2 \cdot 3^2 + \dots + k_{M-1} \cdot 3^{M-1} + k_M \cdot 3^M \quad \dots (7) \\ &= h_0 \cdot 3^0 + h_1 \cdot 3^1 + h_2 \cdot 3^2 + \dots + h_{M-1} \cdot 3^{M-1} + h_M \cdot 3^M \end{aligned}$$

ただし、 k_i, h_j ($0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq M$) は、0または1であり、すべてが0のときを除く。

よって

$$(k_0 - h_0) \cdot 3^0 + (k_1 - h_1) \cdot 3^1 + \dots + (k_{M-1} - h_{M-1}) \cdot 3^{M-1} + (k_M - h_M) \cdot 3^M = 0 \quad \dots (1)$$

となる。

①において、 $k_0 \neq h_0$ とすると、 $k_0 - h_0 = \pm 1$ であり

$$(k_1 - h_1) \cdot 3^1 + \dots + (k_{M-1} - h_{M-1}) \cdot 3^{M-1} + (k_M - h_M) \cdot 3^M = \pm 1 \quad \dots (A)$$

となる。この左辺は3の倍数であるから矛盾する。 $\therefore k_0 = h_0$

よって、① $\Leftrightarrow (k_1 - h_1) \cdot 3^0 + (k_2 - h_2) \cdot 3^1 + \dots + (k_M - h_M) \cdot 3^{M-1} = 0$ ($M \geq 1$) $\dots (2)$

②において、(A)と同様にすると、 $k_1 = h_1$ を得る。

したがって、①に対して、(A)を高々 $(M+1)$ 回繰り返すことによって $k_i = h_i$ ($0 \leq i \leq M$) を得る

ことから、 a_n を相異なる3の累乗の和で表す方法はただ1通りである。 **終**

別解 (整数における商と余りの一意性)

相異なる3の累乗 3^d の和で表される a_n について、 a_n は整数であり、整数を整数で割った商と余りは一意的に定まることから、 a_n を3で順次割っていくときの余りを並べた数列の表し方はただ1通りである。すなわち、 a_n の表し方はただ1通りである。 **終**

※例えば、本解の(7)において、 a_n を3で割った余りは k_0 であり、このときの商を3で割った余りは k_1 である。このようにして3で順次割ったときの余りを並べたもの $k_0 k_1 k_2 \dots k_M$ は一意的である。

→前頁からの続き

解答

問2 a_n を表す3の累乗 3^d において、指数 d の最大値を M として

$$a_n = k_M \cdot 3^M + k_{M-1} \cdot 3^{M-1} + \cdots + k_1 \cdot 3^1 + k_0 \cdot 3^0$$

ただし、 k_i ($0 \leq i \leq M$) は、0または1であり、すべてが0のときを除く

とすると、このような a_n の表し方は、 $(M+1)$ 個の0または1の重複順列の総数(ただし、すべてが0のときを除く)に等しく、全部で $2^{M+1}-1$ (個)である。

$$M=4 \text{ のとき, } 2^{M+1}-1=31$$

$$M=5 \text{ のとき, } 2^{M+1}-1=63$$

であるから、 $a_{32}=3^5=243$ 、 $a_{64}=3^6=729$ であり、 a_{32} から a_{63} のうちで、

3^5 と 3^3 , 3^2 , 3^1 , 3^0 を用いて(すなわち、 $k_5=1$ かつ k_i ($0 \leq i \leq 4$) は0または1) 表されるものは、
上と同様に考えて $2^4-1=15$ 個であるから、 $a_{32+15}=a_{47}=3^5+3^3+3^2+3^1+3^0=283$ である。

よって、 $a_{48}=3^5+3^4=324$ 、 $a_{49}=3^5+3^4+3^0=325$ 、 $a_{50}=3^5+3^4+3^1=327$ 終

別解 (n 進法の利用) a_n を表す3の累乗 3^d において、指数 d の最大値を M として

$$a_n = k_M \cdot 3^M + k_{M-1} \cdot 3^{M-1} + \cdots + k_1 \cdot 3^1 + k_0 \cdot 3^0$$

ただし、 k_i ($0 \leq i \leq M$) は、0または1であり、すべてが0のときを除く

とすると、 k_i を $i=M, M-1, M-2, \dots, 2, 1, 0$ として順に連ねたものを b_M 、すなわち

$b_M = k_M k_{M-1} \cdots k_1 k_0$ として、 b_M の値を2進数として定めると、 $b_l < b_m$ となる自然数 l, m に

ついて、 $l < m$ が成り立ち ($\because$ 任意の自然数 N に対して、 $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^N < 2^{N+1}$)、

このとき、 b_l, b_m に対応する a_n を、それぞれ a_l, a_m とすると $a_l < a_m$ が成り立つ。

($\because$ 任意の自然数 N に対して、 $3^0+3^1+3^2+\cdots+3^N < 3^{N+1}$)

したがって、 $50 = 110010_{(2)}$ より、

$$a_{50} = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 327 \quad \text{終}$$

参考