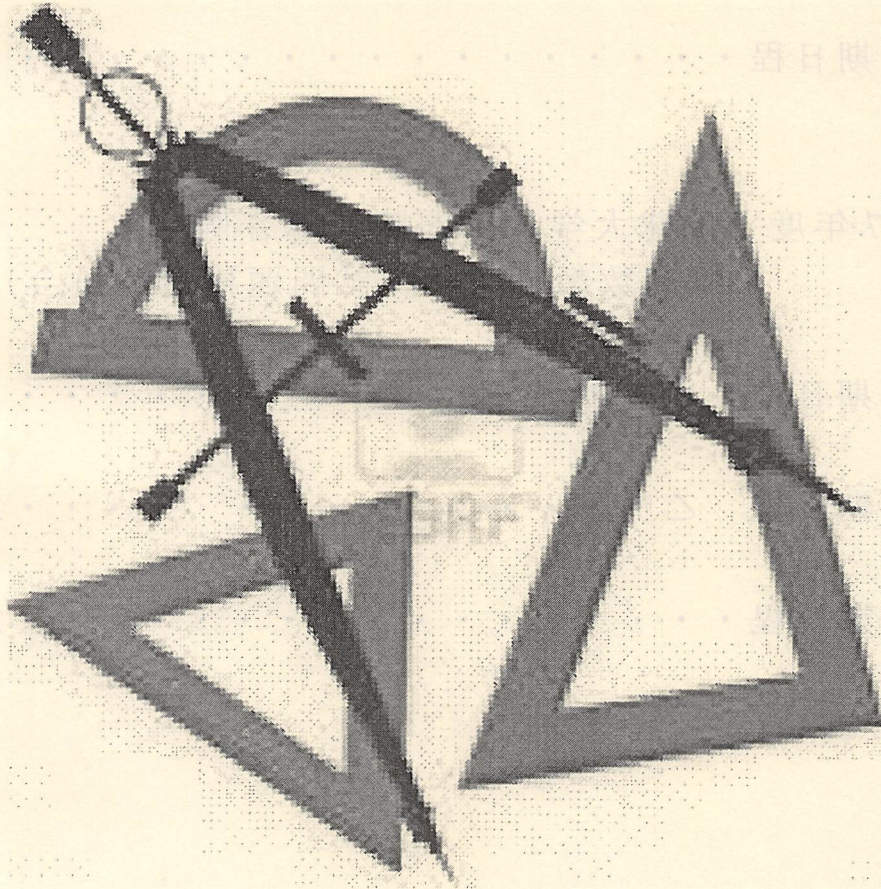


目 次

平成 2 7 年度 第 39 回高校数学教育を考える会 (沖縄県高校数学教育会・琉球大学)

平成 27 年 5 月 22 日(金)



目 次

平成 27 年度 琉球大学入試試験問題についての感想と質問
(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 13

前期日程 乙 14

後期日程 15

平成 27 年度 琉球大学入試問題 解答例
(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 16

前期日程 乙 22

後期日程 25

2015 大学入試問題研究委員会

平成 27 年度 琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項（注：易、標準、難は教科書レベルにおいて）

番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数学Ⅲ	微分法 積分法	易 標準	・ 問 1 の解答は答だけでも正解ですか。 ・ 問 2 では第 1 式の両辺を x で微分するという作業ができてない生徒はいましたか？ ・ 問 2 の解答の途中で「C は積分定数」という文言が無い場合減点されますか
2 問 1 問 2	数学Ⅲ	微分法 積分法	易 標準	・ 増減を調べよは、解答用紙に増減表がかけていたら正解ですか。 ・ y 軸に関する対称性（偶関数より）を利用して、$(0 \leq x \leq 1)$ の区間だけ増減を調べた場合 $(-1 \leq x \leq 0)$ の増減をかいてなくて最大値、最小値を求めても正解となりますか？ ・ 問 2 で、積分区間を $-1 \leq x \leq 1$ としたのは関数が y 軸対称であることを分っているかをみるためですか？ ・ 問 2 で定積分の計算を偶関数の性質を使って積分した生徒はどれぐらいの割合いましたか？
3 問 1 問 2 問 3	数学 A 数学 B	確率 数列	易 易 標準	・ 問 1，問 2 は答だけでも正解ですか？（何らかの説明が必要でしたか） ・ 問 3 の中での部分点はありましたか？（立式はできていて途中での計算ミスに対しての部分点） ・ 問 1 ～問 3 まで丁寧な誘導がなされていて受験生にとって解きやすい（考えやすい）問題であったと思います。
4 問 1 問 2	数学Ⅲ (数学 I)	2 次曲線 (2 次方程式)	標準 やや難	・ 問 2 の正解はグラフ（双曲線）をかいての解答した生徒と方程式（2 次方程式）で解答した生徒どちらが多かったですか？

前期・甲 全 体	・ 全体的な [1] ～[4] 大問で小問ごとの出来具合はどうでしたか？ ・ 高校側への要望（指導してほしい、または、受験生が弱い部分） ・ 間違いの中で、記憶に残った奇抜な解答がありましたら教えて下さい。 ・ 学部別の出来具合はどうでしたか？（特に医学部医学科）
-----------------	---

平成 27 年 球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2 問 3	数Ⅱ 数Ⅲ	高次方程式 対数 三角関数 ベクトル	易 易 標準	
2 問 1 問 2 問 3	数Ⅰ 数Ⅱ 数Ⅱ	微分法 積分法	易 標準 標準	・問 2 でいきなり答だけを出した生徒（裏ワザ？）は減点しましたか？ ・計算過程を書かずに（受験テクニック・裏ワザ？を使って）解答した解答は減点ありますか？
前期・乙 全 体 ・全体的な受験生の出来はどうでしたか？				

平成 27 年度 琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2 問 3	数学Ⅱ	微分法	易 標準 易	・ 問 1 で判別式で等号ありは 0 点ですか？ ・ 問 1 ができない生徒はいましたか？ ・ 問 2 で解答途中での計算ミスに関して、部分点を与えましたか。 ・ 問 3 の解答で問 1 a の値の範囲を吟味してない生徒はいましたか？
2 問 1 問 2	数学Ⅱ	三角関数 高次方程式	標準 やや難	・ 問 1 の部分点の与え方はどうなっていますか？ ・ 問 2 で解の吟味の出来具合はどうでしたか？
3 問 1 問 2	数学Ⅲ	微分法 積分法	標準 やや難	- 問 1 は完答だけ正解かそれとも部分点もありますか？ - 問 2 で場合分けはできていましたか？ - 問 2 で $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ の場合を考えてない受験生は多かったですか？ - 問 2 でグラフをかかずに解いた場合、減点されますか？
4 問 1 問 2 問 3	数学Ⅲ	微分法 積分法	標準 やや難 やや難	・ 問 3 だけ解答した生徒もいましたか？ ・ 小問間ごとのつながりはありますか？ ・ 大問 4 の小問ごとの配点はどんな割合ですか？ ・ 問 2 で $\log t$ と t の大小関係を示さずに用いても大丈夫でしょうか？
後 期 全 体				・ 全体的な受験生の出来具合はどうでしたか？ ・ 大問は良問であるが、もう少し出題分野のバランスがあればよかった。

1. 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $F(x) = \int_x^{2x} e^t dt$ とするとき, $F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ。

問2 関数 $f(x)$, $g(x)$ が,

$$\begin{cases} f(x) + \int_0^x g(t) dt = 2\sin x - 3 \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき, $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

解答

問1 $F(x) = \int_x^{2x} e^t dt = [e^t]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$
 よって, $F(1) = e^2 - e$, $F'(x) = 2e^{2x} - e^x$ 図

問2 $f(x) + \int_0^x g(t) dt = 2\sin x - 3$
 より, この両辺を x について微分すると, $f'(x) + g(x) = 2\cos x \cdots \textcircled{1}$
 $x=0$ とすると, $f(0) = -3 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ より $g(x) = 2\cos x - f'(x)$, および $f'(x)g(x) = \cos^2 x$ より
 $f'(x) \cdot \{2\cos x - f'(x)\} = \cos^2 x$
 $\{f'(x)\}^2 - 2\cos x \cdot f'(x) + \cos^2 x = 0$
 $\{f'(x) - \cos x\}^2 = 0$
 $\therefore f'(x) = \cos x$
 よって, $f(x) = \sin x + C$ (C は積分定数) であり, $\textcircled{2}$ より $C = -3$
 $\therefore f(x) = \sin x - 3$
 $f'(x)g(x) = \cos^2 x$ より
 $\cos x \cdot g(x) = \cos^2 x$
 $\cos x$ は恒等的に 0 ではないから, $g(x) = \cos x$ 図

別解 ($g(x)$ の求め方)

$\textcircled{1}$ より $f'(x) = 2\cos x - g(x)$, および $f'(x)g(x) = \cos^2 x$ より
 $\{2\cos x - g(x)\} \cdot g(x) = \cos^2 x$
 $\{g(x)\}^2 - 2\cos x \cdot g(x) + \cos^2 x = 0$
 $\{g(x) - \cos x\}^2 = 0$
 $\therefore g(x) = \cos x$

2 関数 $f(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) について、次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f(x)$ の増減を調べ、最大値、最小値を求めよ。

問2 定積分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ を求めよ。

【解答】

問1 $f(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$)

$$f(-x)=|-x|\sqrt{1-(-x)^2}=|x|\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

すなわち、常に $f(x)=f(-x)$ が成り立つから、

$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。… (A)

よって、 $0 \leq x \leq 1$ で考えると、 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ であり

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x(\sqrt{1-x^2})' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

ここで、 $f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

よって、(A)により、 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減は表のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	×	+	0	-	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	極大	↘	$f(0)$	↗	極大	↘	

また、 $f(0)=f(-1)=f(1)=0$ 、 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$

したがって、 $-1 \leq x \leq 1$ において、 $f(x)$ は

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ 、 $x=0$ 、 ± 1 のとき最小値 0

をとる。 図

【参考】 ($f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、以下のように求めてよいだろう)

$$y=f(x)=x\sqrt{1-x^2} \text{ とすると、 } y^2=x^2(1-x^2)$$

この両辺を x で微分すると、 $2yy'=2x(1-x^2)+x^2 \cdot (-2x)=2x(1-2x^2)$

$$\text{よって、} f'(x)=y'=\frac{x(1-2x^2)}{y}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

【解答】

問2 $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ とすると, (A) により,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^1 -\frac{1}{2} \cdot (-x^2)' \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \quad \text{図} \end{aligned}$$

【参考】(定積分 I の求め方)

$I = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$ において,

$x = \cos t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ であり, x と t の対応は表のようになる。

よって

$$I = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t \cdot |\sin t| \cdot (-\sin t) dt$$

x	0	→	1
t	$\frac{\pi}{2}$	→	0

であり, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin t \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)' \cdot \sin^2 t dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3 確率 p ($0 < p < 1$) で「当たり」が出るくじを繰り返して引く。2回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える。

$n \geq 2$ として、 n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 p_2, p_3, p_4 を求めよ。

問2 p_n を求めよ。

問3 $N \geq 2$ として、 $\sum_{k=2}^N p_k$ を求めよ。

解答

問1 2回目でこの試行を終えるのは、2回連続して当たりくじを引いたときであるから

$$p_2 = p^2$$

3回目でこの試行を終えるのは、2回目までに当たりくじを1回だけ引いて、

3回目に当たりくじを引いたときであるから

$$p_3 = {}_2C_1 p \cdot (1-p) \times p = 2p^2(1-p)$$

4回目でこの試行を終えるのは、3回目までに当たりくじを1回だけ引いて、

4回目に当たりくじを引いたときであるから

$$p_4 = {}_3C_1 p \cdot (1-p)^2 \times p = 3p^2(1-p)^2 \quad \text{図}$$

問2 n 回目でこの試行を終えるのは、 $(n-1)$ 回目までに当たりくじを1回だけ引いて、

n 回目に当たりくじを引いたときであるから

$$p_n = {}_{n-1}C_1 p \cdot (1-p)^{n-2} \times p = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \quad \text{図}$$

問3 $S(N) = \sum_{k=2}^N p_k$ ($N \geq 2$) とすると

$$S(N) = p^2[1 + 2 \cdot (1-p) + 3 \cdot (1-p)^2 + \cdots + (N-1) \cdot (1-p)^{N-2}] \quad \text{①}$$

であり

$$(1-p) \cdot S(N) = p^2[1 \cdot (1-p) + 2 \cdot (1-p)^2 + \cdots + (N-1) \cdot (1-p)^{N-1}] \quad \text{②}$$

①-②より

$$p \cdot S(N) = p^2[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{N-2} - (N-1) \cdot (1-p)^{N-1}]$$

ここで、 $0 < p < 1$ より、 $1-p \neq 1$ であるから

$$1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^{N-2} = \frac{1 - (1-p)^{N-1}}{1 - (1-p)} = \frac{1 - (1-p)^{N-1}}{p}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(N) &= p \left\{ \frac{1 - (1-p)^{N-1}}{p} - (N-1) \cdot (1-p)^{N-1} \right\} = 1 - (1-p)^{N-1} - p(N-1) \cdot (1-p)^{N-1} \\ &= 1 - [1 + p(N-1)] \cdot (1-p)^{N-1} \quad \text{図} \end{aligned}$$

4 t を媒介変数として, $x=t+\frac{1}{t}+\frac{5}{2}$, $y=2t-\frac{2}{t}$ で表される曲線を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問1 t を消去して, x と y の関係式を求めよ。

問2 a を定数とすると, 直線 $y=ax+5$ とこの曲線との共有点の個数を調べよ。

解答

問1 $x=t+\frac{1}{t}+\frac{5}{2} \dots \textcircled{1}$ より, $t+\frac{1}{t}=x-\frac{5}{2} \dots \textcircled{1}'$

$y=2t-\frac{2}{t}=2\left(t-\frac{1}{t}\right) \dots \textcircled{2}$ より, $t-\frac{1}{t}=\frac{y}{2} \dots \textcircled{2}'$

ここで, $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=4$ より, $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=4 \therefore \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \dots \textcircled{3}$ 図

よって, 条件を満たす点 (x, y) は曲線③上にある。

逆に, 方程式③を満たす任意の (x, y) は, 与えられた条件を満たす。

また, ①' より,

$t>0$ のとき, $x-\frac{5}{2}=t+\frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}=2$ すなわち $x \geq \frac{9}{2}$ であり,

$t \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ である。

$t<0$ のとき, $-t>0$ であるから, 同様にして $-(x-\frac{5}{2}) \geq 2$ すなわち $x \leq \frac{1}{2}$ であり,

$t \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow -\infty$ である。

②' より $t^2-\frac{y}{2}t-1=0$ であり, この t の方程式の判別式について $\frac{y^2}{4}+1>0$ が成り立つから,

任意の実数 y に対して実数 t が存在する ($t \neq 0$)。すなわち, y は任意の実数を取り得る。

したがって, 点 (x, y) の表す曲線は双曲線③である。

問2 双曲線③は図の実線であり,

漸近線は直線 $y=\pm 2\left(x-\frac{5}{2}\right)$ である。

また, 直線 $y=ax+5$ は定点 $(0, 5)$ を通る。

直線 $y=ax+5$ が双曲線③に接するとき,

③に $y=ax+5$ を代入して

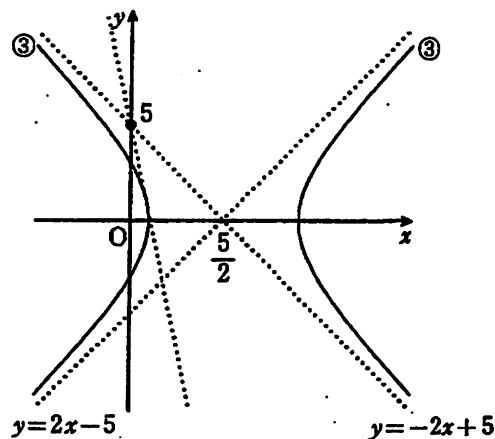
$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{4}-\frac{(ax+5)^2}{16}=1$$

$$4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-(ax+5)^2=16$$

$$(a^2-4)x^2+10(a+2)x+16=0 \dots \textcircled{4}$$

この方程式④が重解をもつことから, 方程式④は2次方程式すなわち $a \neq \pm 2$ であり,

判別式を D とすると, $D=0$ となる。



→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

【解答】

問2 $\frac{D}{4} = \{5(a+2)\}^2 - 16(a^2 - 4) = 9a^2 + 100a + 164 = (9a + 82)(a + 2)$

より, $(9a + 82)(a + 2) = 0 \quad \therefore a = -\frac{82}{9} \quad (\because a \neq \pm 2)$

したがって, 図より, 直線 $y = ax + 5$ と双曲線①の共有点の個数は

$a < -\frac{82}{9}$ のとき 2 個, $a = -\frac{82}{9}$ のとき 1 個, $-\frac{82}{9} < a \leq -2$ のとき 0 個,

$-2 < a < 2$ のとき 2 個, $a = 2$ のとき 1 個, $2 < a$ のとき 2 個

すなわち

$a < -\frac{82}{9}$, $-2 < a < 2$, $2 < a$ のとき 2 個

$a = -\frac{82}{9}$, 2 のとき 1 個

$-\frac{82}{9} < a \leq -2$ のとき 0 個 図

【別解】 $y = ax + 5$ を③に代入して

$(a^2 - 4)x^2 + 10(a + 2)x + 16 = 0 \dots ④$

直線 $y = ax + 5$ と双曲線①の共有点の個数は, 方程式②の異なる実数解の個数と一致する。

(i) $a \neq \pm 2$ のとき, 2次方程式②の判別式を D とすると

$\frac{D}{4} = (9a + 82)(a + 2)$

異なる2つの実数解をもつのは, $D > 0$ のときであり,

$(9a + 82)(a + 2) > 0$ より, $a < -\frac{82}{9}$, $-2 < a$ ($a \neq 2$) のとき

重解をもつのは, $D = 0$ のときであり,

$(9a + 82)(a + 2) = 0$ より, $a = -\frac{82}{9}$, -2 のとき

実数解をもたないのは, $D < 0$ のときであり,

$(9a + 82)(a + 2) < 0$ より, $-\frac{82}{9} < a < -2$ のとき

(ii) $a = -2$ のとき, 方程式②は $16 = 0$ となり, 不合理

(iii) $a = 2$ のとき, 方程式②は $14x + 16 = 0$ となり, ただ1つの実数解をもつ

以上より, 求める個数は

$a < -\frac{82}{9}$, $-2 < a < 2$, $2 < a$ のとき 2 個

$a = -\frac{82}{9}$, 2 のとき 1 個

$-\frac{82}{9} < a \leq -2$ のとき 0 個 図

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 3次方程式 $x^3 - ax - 6 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき、定数 a の値と他の解を求めよ。

問2 $\log_2 \frac{1}{6} + \log_2 \frac{3}{4}$ の値を求めよ。

問3 平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の最大値と、そのときの θ の値を求めよ。

【解答】

問1 $P(x) = x^3 - ax - 6$ とすると、3次方程式 $P(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもつことから

$$P(-1) = 0 \quad \text{よって} \quad -1 + a - 6 = 0 \quad \therefore a = 7$$

$$\text{このとき、} P(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x+2)(x-3)$$

したがって、 $a = 7$ 、他の解は $x = -2, 3$ 図

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & \downarrow & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\text{問2} \quad (\text{与式}) = \log_2 \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \quad \text{図}$$

問3 点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) は、原点を中心とする半径1の円上にある。

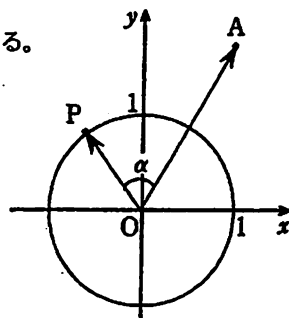
$\angle AOP = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) とすると、 $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OP}| = 1$ より

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

であり、 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ であるから、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ は

$\cos \alpha = 1$ すなわち $\alpha = 0$ のとき、最大値2をとる。

このとき、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ は同じ向きであるから、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。 図



$$\text{【別解】} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = t \text{ とおくと、} 0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$$

よって、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 2 \sin t$ ($\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$) であるから、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ は

$t = \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値2をとる。

このとき、 $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。 図

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

【解答】

問3

【別解】 点 $P(x, y)$ とすると, $0 \leq \theta < 2\pi$ より, 点 P は円 $x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$ 上にあって,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = x + \sqrt{3}y$$

よって, $x + \sqrt{3}y = k$ とおくと, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{k}{\sqrt{3}} \dots \textcircled{2}$ であり,

円 $\textcircled{1}$ と直線 $\textcircled{2}$ が共有点をもつような k の値の最大値を求める。

図より, 直線 $\textcircled{2}$ の y 切片 $\frac{k}{\sqrt{3}}$ が最大となるのは,

円 $\textcircled{1}$ と直線 $\textcircled{2}$ が第1象限で接するときであり,

円 $\textcircled{1}$ の中心 O と直線 $\textcircled{2}$: $x + \sqrt{3}y - k = 0$ の距離が,

円 $\textcircled{1}$ の半径1に等しいから

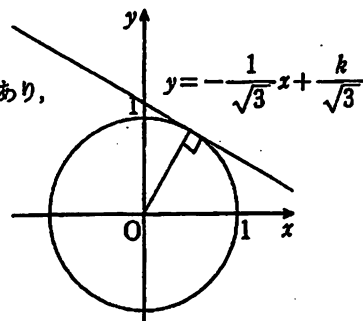
$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1 \quad \therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

このとき, 接点は, 2直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$ の交点であるから

$$\sqrt{3}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \text{ より } x = \frac{1}{2} \quad \therefore (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

すなわち, $(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり, $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。

以上より, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ は, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値2をとる。 図



【別解】 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ とすると, $0 \leq \theta < 2\pi$ より $x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$ を満たし,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = x + \sqrt{3}y = k \dots \textcircled{2}$ において, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から x を消去すると

$$(-\sqrt{3}y + k)^2 + y^2 = 1$$

$$4y^2 - 2\sqrt{3}ky + k^2 - 1 = 0 \dots \textcircled{3}$$

点 $P(x, y)$ が存在するための条件は, y の方程式 $\textcircled{3}$ が実数解をもつことであるから, 判別式 D について $D \geq 0$ が成り立つ。

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{3}k)^2 - 4(k^2 - 1) = -k^2 + 4 \text{ より } -k^2 + 4 \geq 0 \quad \therefore -2 \leq k \leq 2$$

よって, k の最大値は2であり, このとき, 方程式 $\textcircled{3}$ の重解は $y = \frac{\sqrt{3}k}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x + \sqrt{3}y = 2$ より $x = \frac{1}{2}$ すなわち, $(\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) であるから $\theta = \frac{\pi}{3}$ 図

2 頂点が点 $A(0, 4)$ で、点 $B(2, 0)$ を通る放物線を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問1 この放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

問2 この放物線上にあり、 x 座標が $2a$ ($a > 0$) である点を C とする。この放物線と x 軸との交点で、点 B と異なる点を D とする。点 C における放物線の接線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 との交点 E の座標を、 a を使って表せ。

問3 この放物線と直線 l_2 、および点 E を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

問1 この放物線の方程式は、頂点が点 $A(0, 4)$ であることから、 $y = ax^2 + 4$ (a は定数) とかけて、さらに、点 $B(2, 0)$ を通ることから、 $0 = 4a + 4 \quad \therefore a = -1$
よって、求める放物線の方程式は $y = -x^2 + 4$ … ① 図

問2 ①において、 $y' = -2x$ であるから、

放物線①上の点 $C(2a, -4a^2 + 4)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y - (-4a^2 + 4) = -2 \cdot 2a(x - 2a) \quad \text{すなわち} \quad y = -4ax + 4a^2 + 4$$

放物線①上の点 $D(-2, 0)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y = -2 \cdot (-2)(x + 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 4x + 8$$

したがって、2直線 l_1, l_2 の交点 E の座標は、 $\begin{cases} y = -4ax + 4a^2 + 4 \\ y = 4x + 8 \end{cases}$ より

$$-4ax + 4a^2 + 4 = 4x + 8$$

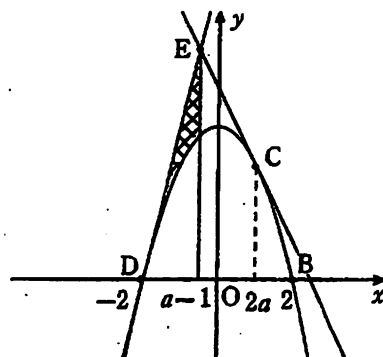
$$4(a+1)x = 4(a^2 - 1)$$

$a > 0$ より $a+1 \neq 0$ であるから、 $x = a-1$ であり、 $y = 4(a-1) + 8 = 4a + 4$

$$\therefore E(a-1, 4a+4) \quad \text{図}$$

問3 $-2 \leq x \leq a-1$ において、 $-x^2 + 4 \leq 4x + 8$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{a-1} \{4x + 8 - (-x^2 + 4)\} dx &= \int_{-2}^{a-1} (x+2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+2)^3 \right]_{-2}^{a-1} \\ &= \frac{1}{3}(a+1)^3 \quad \text{図} \end{aligned}$$



1 関数 $f(x)=x^3+3ax^2+15x$ について、次の問いに答えよ。(50点)

- 問1 $f(x)$ が極大値、極小値をとともにもつように、 a の値の範囲を求めよ。
 問2 問1の a の値の範囲において、 $f(x)$ の極大値と極小値の和を a を用いて表せ。
 問3 $f(x)$ の極大値と極小値の和が -18 のとき、 a の値を求めよ。

【解答】

問1 $f(x)=x^3+3ax^2+15x$

$$f'(x)=3x^2+6ax+15=3(x^2+2ax+5)$$

3次関数 $f(x)$ が極大値、極小値をとともにもつのは、2次方程式 $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつときであるから、2次方程式 $x^2+2ax+5=0$ の判別式を D とすると、 $D>0$ のときである。

$$\frac{D}{4}=a^2-5 \text{ より } a^2-5>0 \quad \therefore a<-\sqrt{5}, \sqrt{5}<a \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{図}$$

問2 ①のとき、2次方程式 $f'(x)=0$ の2つの解を α, β ($\alpha<\beta$) とすると

$$\alpha+\beta=-2a, \alpha\beta=5$$

であり、また、 $f(x)$ の増減は表のようになる。

よって、 $f(x)$ の極大値と極小値の和は

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+3a\alpha^2+15\alpha)+(\beta^3+3a\beta^2+15\beta)$$

$$=(\alpha^3+\beta^3)+3a(\alpha^2+\beta^2)+15(\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3a[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+15(\alpha+\beta)$$

$$=(-2a)^3-3\cdot 5\cdot (-2a)+3a[(-2a)^2-2\cdot 5]+15\cdot (-2a)$$

$$=-8a^3+30a+3a(4a^2-10)-30a$$

$$=4a^3-30a \quad \text{図}$$

問3 $f(x)$ の極大値と極小値の和が -18 のとき、 $f(\alpha)+f(\beta)=-18$ より

$$4a^3-30a=-18$$

$$2a^3-15a+9=0$$

$$(a+3)(2a^2-6a+3)=0$$

①より、 $a=-3, \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 図

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 0 & -15 & 9 \\ & \downarrow & -6 & 18 & -9 \\ \hline & 2 & -6 & 3 & 0 \end{array}$$

2 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\cos 3x, \cos 4x, \cos 5x$ を $\cos x$ の式で表せ。

問2 $\cos \frac{\pi}{10}$ の値を求めよ。

【解答】

問1 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \sin 2x = 2\sin x \cos x$

であるから

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$$

$$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = -4\sin^3 x + 3\sin x$$

さらに

$$\cos 4x = \cos 2 \cdot 2x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\sin 4x = \sin 2 \cdot 2x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x(2\cos^2 x - 1)$$

よって

$$\cos 5x = \cos(4x + x) = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$

$$= (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)\cos x - 4\sin^2 x \cos x(2\cos^2 x - 1)$$

$$= (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)\cos x - 4\cos x(1 - \cos^2 x)(2\cos^2 x - 1)$$

$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \quad \dots \textcircled{1}$$

以上より, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \quad \textcircled{2}$$

【別解】ド・モアブルの定理により,

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n \quad (n \text{ は自然数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

①の右辺を展開したときの実部が $\cos nx$ であるから,

(以下, ①の右辺の展開式における係数はパスカルの三角形から)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$n=3$ とすると, ①の右辺 $= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2 \cdot i\sin x + 3\cos x \cdot (i\sin x)^2 + (i\sin x)^3$ であり,

この実部は $\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ である。

$$\therefore \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$n=4$ とすると, ①の右辺 $= (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3 \cdot i\sin x + 6(\cos x)^2 \cdot (i\sin x)^2$

$$+ 4\cos x \cdot (i\sin x)^3 + (i\sin x)^4$$

この実部は $\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$ である。

$$\therefore \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

【解答】

【別解】 $n=5$ とすると, (①の右辺) $= (\cos x)^5 + 5(\cos x)^4 \cdot i \sin x + 10(\cos x)^3 \cdot (i \sin x)^2$
 $+ 10(\cos x)^2 \cdot (i \sin x)^3 + 5\cos x \cdot (i \sin x)^4 + (i \sin x)^5$

この実部は $\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$ である。

$$\therefore \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5\cos x(1 - \cos^2 x)^2$$

$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

問2 ①において, $x = \frac{\pi}{10}$ とすると

$$\cos \frac{\pi}{2} = 16\cos^5 \frac{\pi}{10} - 20\cos^3 \frac{\pi}{10} + 5\cos \frac{\pi}{10}$$

であり, $\cos \frac{\pi}{10} = \alpha$ とすると

$$0 = 16\alpha^5 - 20\alpha^3 + 5\alpha$$

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{10} \neq 0 \text{ であるから}$$

$$16\alpha^4 - 20\alpha^2 + 5 = 0 \quad \therefore \alpha^2 = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{16} \text{ (これらは } \alpha^2 > 0 \text{ を満たす)}$$

$$\text{ここで, } 0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} \text{ より } \cos \frac{\pi}{6} < \cos \frac{\pi}{10} < \cos 0$$

$$\text{すなわち, } \frac{\sqrt{3}}{2} < \alpha < 1 \text{ よって } \frac{3}{4} = \frac{9}{16} < \alpha^2 < 1 \text{ であるから } \alpha^2 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\text{したがって, } \alpha > 0 \text{ より } \alpha = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{すなわち } \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{【終】}$$

【別解】 $x = \frac{\pi}{10}$ とすると, $3x + 2x = 5x = \frac{\pi}{2}$ よって $3x = \frac{\pi}{2} - 2x$ であるから

$$\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \sin 2x$$

$$\text{問1より, } 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos x \cdot (4\cos^2 x - 2\sin x - 3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \cos x \cdot (4\sin^2 x + 2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos x \neq 0 \text{ であるから, } 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x > 0 \text{ であるから, } \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{さらに, } 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2\sin x + 3}{4} \text{ より}$$

$$\cos^2 x = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 3}{4} = \frac{2(5 + \sqrt{5})}{16} \quad \therefore \cos x = \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4} \quad (\because \cos x > 0)$$

→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問2

別解 図のように、1辺の長さが1の正五角形 ABCDE において、

 $\triangle ACD \sim \triangle CFD$ であることから

$$AD:CD=CD:FD \quad \text{すなわち} \quad (1+a):1=1:a$$

が成り立つから

$$(1+a)a=1$$

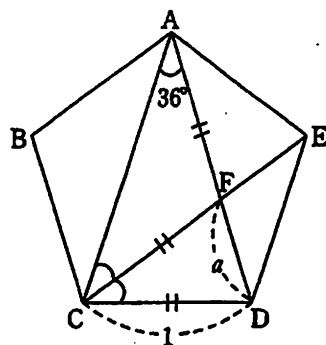
$$a^2 + a - 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because a > 0)$$

よって, $AD=1+a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2}CD}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 18^\circ > 0 \text{ であるから, } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

すなわち, $\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$



3 次の問いに答えよ。(50点)

問1 x に関する方程式 $a\sin 2x = \sin x$ が $0 < x < \pi$ の範囲で解をもつように、 a の値の範囲を求めよ。問2 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で、2つの曲線 $y = a\sin 2x$ と $y = \sin x$ で囲まれた部分の面積を a で表せ。

解答

問1 $a\sin 2x = \sin x \cdots \textcircled{1}$ より、 $2a\sin x \cos x = \sin x$ よって $\sin x(2a\cos x - 1) = 0$ $0 < x < \pi$ において、 $\sin x \neq 0$ であるから、方程式 $\textcircled{1}$ が $0 < x < \pi$ において解をもつための条件は、 $2a\cos x - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$ が $0 < x < \pi$ において解をもつことである。 $\textcircled{2}$ において、 $a=0$ のとき $-1=0$ となり不合理よって、 $a \neq 0$ であり、このとき $\cos x = \frac{1}{2a}$ であるから、 $0 < x < \pi$ のとき $-1 < \cos x < 1$ により、 $-1 < \frac{1}{2a} < 1$ したがって、求める条件は $a < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < a \cdots \textcircled{2}$ 図問2 問1により、曲線 $y = a\sin 2x$, $y = \sin x$ の $0 \leq x \leq \pi$ における交点の x 座標は、 $\textcircled{2}$ の範囲に対して、 $x=0, \pi$ および $\cos t = \frac{1}{2a}$ ($0 < t < \pi$) を満たす t の3つである。また、 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき、2曲線は $0 < x < \pi$ において交わることはなく、 $0 \leq x \leq \pi$ において、常に $a\sin 2x \leq \sin x$ が成り立つ。よって、求める面積を $S(a)$ とすると

$$S(a) = \int_0^t |a\sin 2x - \sin x| dx + \int_t^\pi |\sin x - a\sin 2x| dx$$

と表される。

(i) $a < -\frac{1}{2}$ のとき、(図1)より

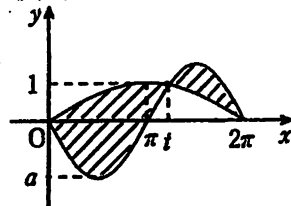
$$S(a) = \int_0^t (\sin x - a\sin 2x) dx + \int_t^\pi (a\sin 2x - \sin x) dx$$

ここで、 $\int (\sin x - a\sin 2x) dx = -\cos x + \frac{1}{2}a\cos 2x + C$ (C は積分定数)より、 $F(x) = -\cos x + \frac{a}{2}\cos 2x$ とすると

$$S(a) = F(t) - F(0) - \{F(\pi) - F(t)\} = 2F(t) - F(0) - F(\pi)$$

$$= 2\left(-\cos t + \frac{a}{2}\cos 2t\right) - \left(-1 + \frac{a}{2}\right) - \left(1 + \frac{a}{2}\right) = -2\cos t + a\cos 2t - a$$

(図1)



→解答は次頁に続く

→前頁からの続き

解答

問2 (i)の続きから

$$\cos t = \frac{1}{2a} \text{ より, } \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = \frac{1}{2a^2} - 1 \text{ であるから}$$

$$S(a) = -\frac{1}{a} + a\left(\frac{1}{2a^2} - 1\right) - a = -\frac{1}{2a} - 2a$$

(ii) $\frac{1}{2} < a$ のとき, (図2) より

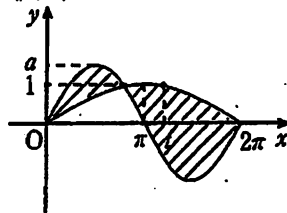
$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^t (a \sin 2x - \sin x) dx + \int_t^\pi (\sin x - a \sin 2x) dx \\ &= -[2F(t) - F(0) - F(\pi)] = \frac{1}{2a} + 2a \end{aligned}$$

(iii) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき, (図3) より

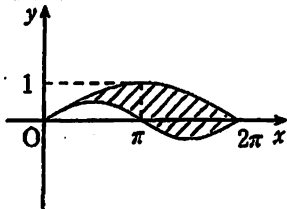
$$S(a) = \int_0^\pi (\sin x - a \sin 2x) dx = F(\pi) - F(0) = 2$$

以上より, $|a| \leq \frac{1}{2}$ のとき $S(a) = 2$, $|a| > \frac{1}{2}$ のとき $S(a) = \left| 2a + \frac{1}{2a} \right|$ 

(図2)



(図3)



4 $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$ ($x > 1$) とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f'(x)$ を求めよ。

問2 不等式 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} < f(x)$ を証明し、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ を示せ。

問3 $x > 1$ のとき、 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \log t}$ を求めよ。

解答

問1 $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$ ($x > 1$)

不定積分 $\int \frac{dt}{\log t}$ の1つを $F(t)$ とすると、 $F'(t) = \frac{1}{\log t}$ であり

$$f(x) = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x)$$

よって、 $f'(x) = F'(x^2) \cdot (x^2)' - F'(x) = \frac{2x}{\log x^2} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}$ 図

問2 $t > 1$ のとき、 $0 < \log t < t$ より $0 < \frac{1}{t} < \frac{1}{\log t}$

よって、 $x > 1$ のとき、 $x < x^2$ であり

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} < \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t} \quad \text{すなわち} \quad \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} < f(x)$$

が成り立つ。

ここで、 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = [\log t]_x^{x^2} = \log x^2 - \log x = \log x$

であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ である。 図

→(参考) $t > 1$ のとき、 $\log t < t$ であること

(証明) $g(t) = t - \log t$ とすると、

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \text{ より、}$$

$g(t)$ の増減は表のようになる。

t	0	...	1	...
$g'(t)$	×	-	0	+
$g(t)$	×	↘	1	↗

したがって、 $g(t)$ は $t=1$ で最小値1をとるから、

$t > 1$ のとき、 $g(t) > 0$

すなわち、 $\log t < t$ が成り立つ。

問3 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \log t} = [\log(\log t)]_x^{x^2} = \log(\log x^2) - \log(\log x)$
 $= \log\left(\frac{2 \log x}{\log x}\right) = \log 2$ 図