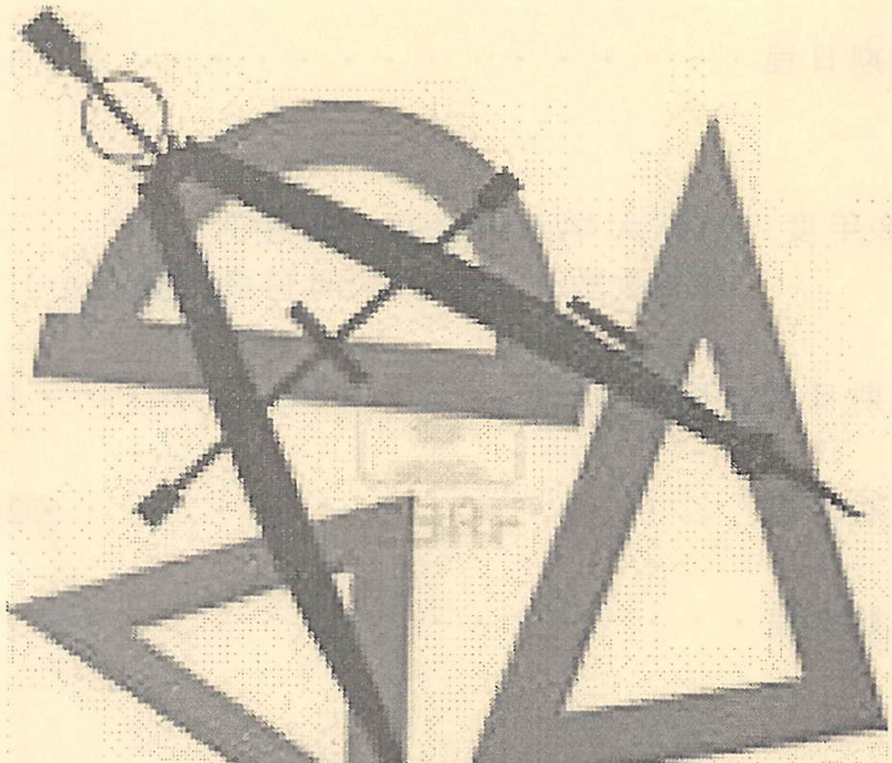
平成２８年度
第 40 回高校数学教育を考える会

(沖縄県高校数学教育会・琉球大学)

平成 28 年 5月 19 日(木)



目　次

平成 28 年度　琉球大学入試試験問題についての感想と質問
（高数教　大学入試問題検討委員会）

平成 28 年度　琉球大学入試問題　解答例
（高数教　大学入試問題検討委員会）

平成 28 年度（2016）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2 問 3 問 4	数Ⅲ	複素数平面	易 標準 標準 易	・$z^4+z^3+z^2+z+1$は，直接 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を代入して求めた受検生もいたか。 ・５倍角を使って解いた受検生もいたか ・受検生はどの問でつまずいていたか。
2 問 1 問 2	数Ⅲ	積分法	易 標準	・採点は場合分けごとに点を与えているのか。 ・問 1 の場合のみ解いていた受検生はその部分の得点と考えていいか。 ・配点を知りたい。 ・増減表をしっかり書いて、極大極小について説明できていたか。 ・$\frac{2}{1+e}$ や $\log\frac{e}{1+e}$ の範囲をしっかり評価できていたか。減点もあったか。
3 問 1 問 2 問 3	数Ⅲ	積分法	易 標準 標準	・問２から逆数をとるときに正であることや，$0<x<4$ などの記述・説明は採点基準になったか。完璧にできている受検生はいたか。 ・医学科はこの問題で合否が分かれたか。
4 問 1 問 2	数 B	確率	易 標準	・しっかり記述ができていたかどうか。 ・記述が足りないもの，答えだけのものはどう得点を与えたか。説明の方法について、採点基準が細かく分かれているのか。 ・「$n\geqq3$ のとき」や「これは$n=1,2$ のときも成り立つ」などの記述ができていたか。できていない場合は減点か。

全体
・各大問の小問ごとの配点を知りたい
・数Ⅲの微積を中心として，基本がしっかりできている受検生が得点できる問題になっていて良かった。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

平成28年度（2016）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1				
問1	数Ⅱ		易	・記述はしっかりできていたか。
問2	数B		易	・証明を出題したのは良かった。
問3	数Ⅰ		易	
2				
問1	数Ⅰ	積分法	易	・図より$y=ax^2$とした受検生はいたか。減点等はあったか。
問2	数Ⅱ		易	
問3	数Ⅱ		標準	
全体 ・難化した印象があるがどうでしょうか。 ・答えがあっているが減点したのはどんなものがあったか。 ・表現で減点することは乙ではあるか。				

平成28年度（2016）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1				
問1	数Ⅱ	図形と方程式	易	・線形計画法で解いている受検生が多かったか。
問2			易	・u と v の範囲について書いた生徒には何かあったか。
問3			標準	
2				
問1	数Ⅲ	積分法	易	・アポロニウスの円の知識があり，図形の考察のみで答えが出ているものはどう採点したか。
問2			標準	
3				
問1	数Ⅲ	積分法	標準	・グラフの様子を書いた場合，極限の様子などは採点基準として求めたか。
問2			標準	
4				
問1	数A	確率	易	・問２と問３で正答率が変わったか。
問2			易	・元という表現に問題はなかったか。
問3			易	
全体 ・易しくなった印象がある。 ・得点率や得点の分布は期待した通りだったか。				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1　i を虚数単位とし，$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とおく。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　z^5 および $z^4+z^3+z^2+z+1$ の値を求めよ。

問2　$t=z+\frac{1}{z}$ とおく。t^2+t の値を求めよ。

問3　$\cos\frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

問4　半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ。

解答　問1　ド・モアブルの定理より，

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$$
$$=\cos\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos2\pi+i\sin2\pi$$
$$=1$$

$z^5-1=0$ より，$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

ここで，$z\neq1$ であるから，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$　答

問2　
$$t^2+t=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$=z^2+z+2+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$$
$$=\frac{1}{z^2}(z^4+z^3+2z^2+z+1)$$
$$=\frac{1}{z^2}(z^4+z^3+z^2+z+1+z^2)$$
$$=\frac{1}{z^2}\cdot z^2$$
$$=1$$　答

問3　$\cos\frac{2\pi}{5}$ は z の実部なので，$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$

$|z|=1$ であるから，$z\overline{z}=1$ より $\overline{z}=\frac{1}{z}$ なので $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

ここで，$t=z+\frac{1}{z}$ とおくと，$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{t}{2}$ であるが，問2より $t^2+t-1=0$ が成り立つ。

$0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\frac{2\pi}{5}$ と t は正であるから，$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

したがって，$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{t}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$　答

別解　$\theta=\frac{\pi}{5}$ とすると，$\sin3\theta=\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}=\sin2\theta$ であり，

$$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta\cdot\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$
$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

より,

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

ここで, $\sin\theta \neq 0$ であるから, 両辺を $\sin\theta$ で割って,

$$3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$$

ゆえに　$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$

整理して　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\cos\dfrac{\pi}{5}<1$ であるから　$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=2\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{8}-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ 答

問4　複素平面上で原点, 1, z を頂点とする三角形を考えると,
余弦定理より, 求める正五角形の 1 辺の長さの 2 乗は,

$1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\dfrac{2\pi}{5}=2-2\cos\dfrac{2\pi}{5}=2-2\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ 答

2 定積分 $\int_a^{a+1}|e^x-1|dx$ の値を $I(a)$ とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　$-1\leqq a\leqq 0$ のとき，$I(a)$ を a で表せ。

問2　a が実数全体を動くとき，$I(a)$ を最小にするような a の値を求めよ。

解答　問1　$e^x-1=0$ のとき，$x=0$ より

$|e^x-1|=\begin{cases}1-e^x & (x\leqq 0)\\ e^x-1 & (x\geqq 0)\end{cases}$ であり，

$-1\leqq a\leqq 0$ のとき，$0\leqq a+1\leqq 1$ であるから，

$$I(a)=\int_a^0(1-e^x)dx+\int_0^{a+1}(e^x-1)dx$$
$$=\Big[x-e^x\Big]_a^0+\Big[e^x-x\Big]_0^{a+1}$$
$$=(0-1)-(a-e^a)+(e^{a+1}-a-1)-(1-0)$$
$$=(e+1)e^a-2a-3$$ 答

問2　(i)　$a\leqq -1$ のとき

$I(a)=\int_a^{a+1}(1-e^x)dx=\Big[x-e^x\Big]_a^{a+1}=(a+1-e^{a+1})-(a-e^a)=1-(e-1)e^a$ である。

$I'(a)=-(e-1)e^a$ より，$a\leqq -1$ のとき $I(a)$ は単調減少なので

$I(a)$ を最小にするような a の値は $a=-1$ であり，

$I(-1)=1-(e-1)e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

(ii)　$-1<a<0$のとき

問1より $I(a)=(e+1)e^a-2a-3$ であるから，$I'(a)=(e+1)e^a-2$ である。

よって，$I'(a)=0$ となるのは $a=\log\dfrac{2}{e+1}$ のときであるが，

$1-\dfrac{2}{e+1}=\dfrac{e-1}{e+1}>0$ かつ $\dfrac{2}{e+1}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{2e-(e+1)}{e(e+1)}=\dfrac{e-1}{e(e+1)}>0$

から $\dfrac{1}{e}<\dfrac{2}{e+1}<1$ より，$-1<\log\dfrac{2}{e+1}<0$ がわかる。

したがって，この区間での $I(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	-1	$\cdots$	$\log\dfrac{2}{e+1}$	$\cdots$	0
$I'(a)$		$-$	0	$+$	
$I(a)$	$\dfrac{1}{e}$	↘	極小	↗	$e-2$

よって $-1<a<0$ のとき，$I(a)$ を最小にするような a の値は $a=\log\dfrac{2}{e+1}$ である。

(iii)　$a\geqq 0$ のとき，

$I(a)=\int_a^{a+1}(e^x-1)dx=\Big[e^x-1\Big]_a^{a+1}=(e^{a+1}-a-1)-(e^a-a)=(e-1)e^a-1$

$I'(a)=(e-1)e^a$ より，$a\geqq 0$ のとき $I(a)$ は単調増加なので，

$I(a)$ を最小にするような a の値は $a=0$ であり，

$I(0)=(e-1)e^0-1=e-2$

(i)～(iii) より，$I(a)$ を最小にするような a の値は $a=\log\dfrac{2}{e+1}$ である。 答

3 次の問いに答えよ。 (50点)

問1　自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx$ を求めよ。

問2　$x>0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ が成り立つことを示せ。

問3　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx$ を求めよ。

解答　問1　$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx=\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}=\log\frac{2}{n}-\log\frac{1}{n}=(\log 2-\log n)-(\log 1-\log n)=\log 2$ 答

問2　$f(x)=x-\log(1+x)$ とすると，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$g(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ とすると，$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}$

$x>0$のとき　$f'(x)>0$，$g'(x)>0$であることと　$f(0)=0$，$g(0)=0$より，

$x>0$のとき　$f(x)=x-\log(1+x)>0$　かつ　$g(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$

よって，$x>0$のとき　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$　は成り立つ。 答

問3　問2から，$x>0$ のとき　$2x-\dfrac{x^2}{2}<x+\log(1+x)<2x$

$0<x<4$ のとき，

$2x-\dfrac{x^2}{2}=2x\left(1-\dfrac{x}{4}\right)>0$ より，$\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{x+\log(1+x)}<\dfrac{1}{2x-\dfrac{x^2}{2}}$　が成り立つ。

n を十分大きい値であるとすると，$0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<4$ であり，

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

ここで，$\dfrac{1}{2x-\dfrac{x^2}{2}}=\dfrac{2}{4x-x^2}=\dfrac{2}{x(4-x)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4-x}\right)$　より

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\left(\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}-\Big[\log|4-x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\log 2-\log\left|4-\frac{2}{n}\right|+\log\left|4-\frac{1}{n}\right|\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{2}(\log 2-\log 4+\log 4)=\frac{1}{2}\log 2$

一方，問1から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{2x}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$

ゆえに，はさみうちの原理から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$ 答

4　Nを3以上の自然数とする。

1からNまでの数字が1つずつ書かれたN枚のカードを袋に入れ,「無作為に1枚カードを取り出し,そのカードを袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作業を3枚のカードを取り出すまで繰り返す。取り出された3枚のカードに書かれた数の最大値をXとする。

また,1からNまでの数字が1つずつ書かれたN枚のカードを袋に入れ,「無作為に1枚カードを取り出してはそれに書かれた数を記録し,袋に戻す」という作業を3回行い,記録された数の最大値をYとする。

nをN以下の自然数とする。$X=n$となる確率をp_nとし,$Y=n$となる確率をq_nとする。

次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_3,q_1,q_2,q_3を求めよ。

問2　p_nとq_nを求めよ。

解答　問1　p_3を求める。

$X=3$となるのは,取り出された3枚のカードの数字が1,2,3のときで,その取り出し方は全部で6通りある。

一方,3枚のカードを順に取り出す方法は全部で${}_NP_3=N(N-1)(N-2)$通りある。

よって,$p_3=\dfrac{6}{N(N-1)(N-2)}$

q_1,q_2,q_3を求める。

「無作為に1枚カードを取り出してはそれに書かれた数を記録し,袋に戻す」とき,

カードを取り出す方法は全部でN^3通りある。

$Y=1$となるのは,取り出されたカードの数字が3回とも1のときなので,$q_1=\dfrac{1}{N^3}$

$Y=2$となるのは,取り出されたカードの数字が3回とも「1または2」のときで,

そのうち3回とも1である場合は除かれるから$2^3-1=7$通りある。

よって,$q_2=\dfrac{7}{N^3}$

$Y=3$となるのは,取り出したカードの数字が3回とも「1または2または3」のときで,

そのうち3回とも「1または2」である場合は除かれるから$3^3-2^3=27-8=19$通りある。

よって,$q_3=\dfrac{19}{N^3}$　答

問2　$n\geqq 3$のとき$X=n$となるのは,取り出した3枚のうち1枚がnで残りの2枚はn未満のときであるから,${}_3C_1\times(n-1)\times(n-2)=3(n-1)(n-2)$通りある。

したがって,$p_n=\dfrac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$

$p_1=p_2=0$なので,これは,$n=1,2$のときも成り立つ。

よって,$p_n=\dfrac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$

$n\geqq 2$のとき$Y=n$となるのは,取り出したカードの数字が3回とも1からnのいずれかで,

そのうち3回とも1から$n-1$のいずれかである場合は除かれるから,

$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$通りある。

したがって,$q_n=\dfrac{3n^2-3n+1}{N^3}$

問1から$q_1=1$なので,これは$n=1$のときも成り立つ。

よって,$q_n=\dfrac{3n^2-3n+1}{N^3}$　答

1 次の問いに答えよ。 (50点)

問1　整数 $P(x)$ は, $P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ を満たす。$P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割った余りを求めよ。

問2　座標空間内の 3 点 A $(3,0,0)$, B $(0,3,0)$, C $(1,s,t)$ を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする。OG⊥AG, OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ。

問3　変量 x の値が x_1, x_2, x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする。分散 s^2 を $\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}$ で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示せ。ただし，$\overline{x^2}$ は $x_1{}^2$, $x_2{}^2$, $x_3{}^2$ の平均値を表す。

解答　問1　$P(x)$ を $6x^2+11x-35=(3x-5)(2x+7)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると,

$P(x)=(3x-5)(2x+7)Q(x)+ax+b$ である。

$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ から, $\frac{5}{3}a+b=\frac{8}{3}$, $-\frac{7}{2}a+b=-\frac{5}{2}$ であり,

これを解くと, $a=b=1$ である。

よって余りは $x+1$ である。答

問2　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\left(\frac{4}{3},1+\frac{s}{3},\frac{t}{3}\right)$, $\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{5}{3},1+\frac{s}{3},\frac{t}{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$

である。

OG⊥AG, OG⊥AB より,

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=-\frac{20}{9}+\left(1+\frac{s}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0$$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=-1+s=0$$

となり，これを解くと $s=1$, $t=\pm2$ である。答

問3　定義にしたがって計算すると

$$\begin{aligned}
s^2&=\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}\\
&=\frac{1}{3}\{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)-2(x_1+x_2+x_3)\overline{x}+3(\overline{x})^2\}\\
&=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}{3}-2\overline{x}\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+(\overline{x})^2\\
&=\overline{x^2}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+(\overline{x})^2\\
&=\overline{x^2}-(\overline{x})^2
\end{aligned}$$

となり, $s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ が示された。答

$\boxed{2}$ 座標平面上の原点 O，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問 1　a，b，c の値を求めよ。

問 2　放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ。

問 3　放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の上側の部分の面積を求めよ。

解答

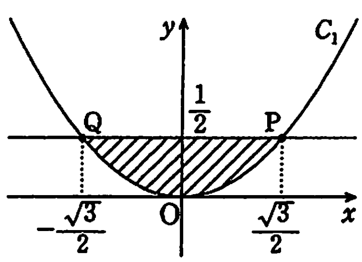
問 1　C_1 は原点を通り，P，Q は y 軸に関して対称であるから，$b=c=0$ である。

P を通ることから，$\dfrac{1}{2}=a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ を解いて $a=\dfrac{2}{3}$ である。答

問 2　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の範囲で，放物線 C_1 は線分 PQ の下側にあるから，

求める面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x^2\right) dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x^2\right) dx$$



$$= 2\left[\frac{x}{2}-\frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 答$$

※ $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x^2\right) dx$

$= \dfrac{1}{6}\cdot\left|-\dfrac{2}{3}\right|\cdot\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$

$= \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

でも計算できる。

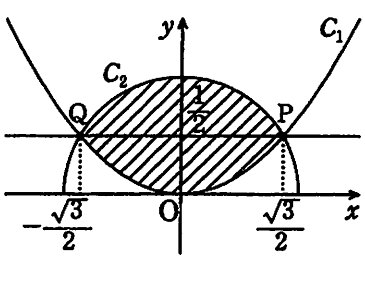
問 3　円 C_2 の $y \geqq \dfrac{1}{2}$ の部分と線分 PQ で囲まれた図形の面積は，

$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$，$\mathrm{PQ}=\sqrt{3}$ より，$\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるから，

(扇形OPQ)$-$($\triangle$OPQの面積)$=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

問 2 で求めた面積との和を考えると，求める面積は

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{12}+\dfrac{\pi}{3}$　答



1 次の問いに答えよ。(50点)

問1　条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで，$u=x+y$ の値の範囲を求めよ。

問2　$u=x+y$，$v=xy$ とする。条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，u と v の満たす関係式を求めよ。

問3　条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで，$z=x+y+2xy$ の値の範囲を求めよ。

解答　問1　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ が表す曲線を C，直線 $y=-x+u$ を l とする。

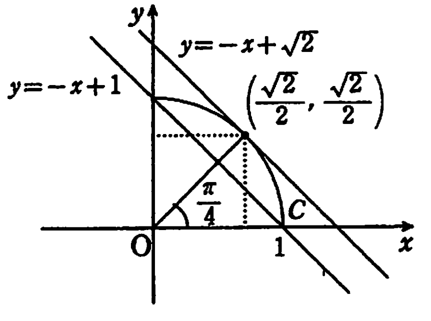
直線 l と曲線 C が共有点をもつような u の値の最大値と最小値を求める。

図より，直線 l と曲線 C が点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で接するとき，u の値は最大となり，

直線 l が曲線 C 上の点 $(1,0)$ または点 $(0,1)$ を通るとき u の値は最小となる。

したがって，u の最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$u$ の最小値は $1+0=1$ であり，

求める u の値の範囲は，$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$　答



問2　$x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy$ より，

$x^2+y^2=1$ のとき，$u^2-2v=1$　答

問3　$u=x+y$，$v=xy$ とすると，$z=x+y+2xy=u+2v$ である。

ここで，問2より $u^2-2v=1$ であるから，$2v=u^2-1$ より，

$z=u^2+u-1$ である。

$z=\left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ と，問1の $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ から，

z は，$u=1$ のとき最小値 $1^2+1-1=1$ をとり，

$u=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}^2+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}+1$ をとる。

したがって，$1 \leqq z \leqq \sqrt{2}+1$　答

2 i を虚数単位とする。複素数 z が等式 $|z-i|=|2z+i|$ を満たすとき，次の問いに答えよ。 (50点)

問 1　複素数平面上で，この等式を満たす点 z 全体の表す図形を求めよ。

問 2　$iz-2+i$ の偏角 θ の範囲を求めよ。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

解答 問 1　与えられた等式を 2 乗すると，　$|z-i|^2=|2z+i|^2$

よって，　$(z-i)\overline{(z-i)}=(2z+i)\overline{(2z+i)}$

ゆえに，　$(z-i)(\overline{z}+i)=(2z+i)(2\overline{z}-i)$

展開して整理すると，　$z\overline{z}-iz+i\overline{z}=0$

式を変形すると，　$(z+i)(\overline{z}-i)=1$

ゆえに，　$(z+i)\overline{(z+i)}=1$

したがって，　$|z+i|^2=1$

よって，等式 $|z-i|=|2z+i|$ を満たす点 z 全体の表す図形は，点 $-i$ を中心とする半径 1 の円である。 **答**

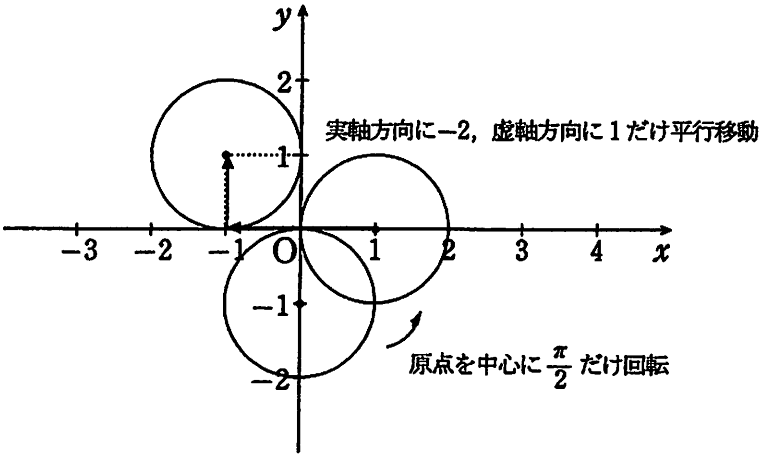
問 2　問 1 より，点 z 全体の表す図形は，点 $-i$ を中心とする半径 1 の円であるので，

点 $iz-2+i$ 全体の表す図形は，点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，

さらに，実軸方向に -2，虚軸方向に 1 だけ平行移動した円である。

したがって，点 $iz-2+i$ 全体の表す図形は，点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円であり，

図より，偏角 θ の範囲は $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ である。 **答**



3 次の問いに答えよ。（50点）

問１　原点 $(0, 0)$ を通り，曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ に接する直線の方程式を求めよ。

問２　曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ と問１で求めた直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　問１　$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ より，

接点 $\left(t, \dfrac{\log t}{t^2}\right)$ とおくと，この点における接線の方程式は，

$y-\dfrac{\log t}{t^2}=\dfrac{1-2\log t}{t^3}(x-t)$ …① である。

これが，原点を通るので，$-\dfrac{\log t}{t^2}=\dfrac{2\log t-1}{t^2}$ より，

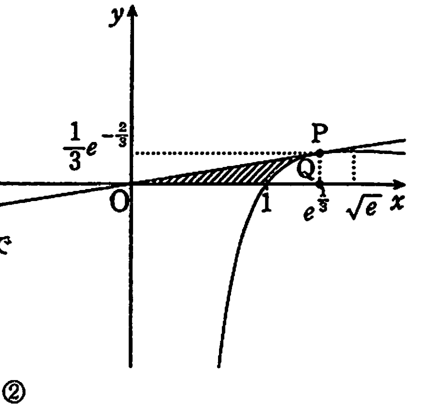
$\log t=\dfrac{1}{3}$ すなわち $t=e^{\frac{1}{3}}$ である。

①に代入すると，求める接線の方程式は，

$y-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3e}\left(x-e^{\frac{1}{3}}\right)$　すなわち，$y=\dfrac{1}{3e}x$ 答

問２　$y'=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ より，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗	極大	↘



$y=\dfrac{\log x}{x^2}$ は x 軸と点 $(1, 0)$ で交わり，求める面積は，

図の △OPQ から，曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ と直線 PQ および x 軸で

囲まれた部分の面積をひいたものであるから，

$\dfrac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}}-\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\log x}{x^2}dx=\dfrac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}}-\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\log x}{x^2}dx$ …②

ここで，$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\dfrac{\log x}{x^2}dx=\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}(\log x)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)'dx$

$$=\left[(\log x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}(\log x)'\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}+\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}-e^{-\frac{1}{3}}+1$$

$$=-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}}+1$$

よって，②より求める面積は，$\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}}+1\right)=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}-1$ 答

4 10 進法表記で 1 から 2016 までの自然数の集合を M とする。次の問いに答えよ。（50点）

問1　2進法で表しても，3進法で表しても，5進法で表しても1の位が0となる M の元の個数はいくつか。

問2　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち2つは1の位が0で，他の1つは1の位が0でないような M の元の個数はいくつか。

問3　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち1つのみ1の位が0で，他の2つは1の位が0でないような M の元の個数はいくつか。

解答　問1　2進法で表しても，3進法で表しても，5進法で表しても1の位が0となるということは，
2の倍数かつ3の倍数かつ5の倍数であることである。
2と3と5の最小公倍数は30であるから，M の要素のうち30の倍数である要素の個数を求めると，
$2016=30\cdot67+6$ より，2進法で表しても，3進法で表しても，5進法で表しても1の位が0となる
M の要素の個数は，$30\cdot1$，$30\cdot2$，…，$30\cdot67$ の 67 個　答

問2　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち2つは1の位が0で，他の2つは1の位が0でない
ということは，2,3,5のうちいずれか2つで割り切れ，他の1つで割り切れないということである。
1から2016までの自然数の中で2の倍数の集合を A，3の倍数の集合を B，5の倍数の集合を C と
おくと，求める個数は $n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\times3$ である。
$2016=6\cdot336$ より，集合 $A\cap B$ の要素の個数は，$6\cdot1$，$6\cdot2$，…，$6\cdot336$ の 336 個。
$2016=10\cdot201+6$ より，集合 $A\cap C$ の要素の個数は，$10\cdot1$，$10\cdot2$，…，$10\cdot201$ の 201 個。
$2016=15\cdot134+6$ より，集合 $B\cap C$ の要素の個数は，$15\cdot1$，$15\cdot2$，…，$15\cdot134$ の 134 個。
また，問1より $n(A\cap B\cap C)=67$ であるから，求める個数は $336+201+134-67\cdot3=470$ より，
470 個　答

問3　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち1つのみ1の位が0で，他の2つは1の位が0でない
ということは，2,3,5のうちいずれか1つで割り切れ，他の2つで割り切れないということである。
問2と同様に集合 A，B，C を考えると，
M の要素の中で2で割り切れ，3と5で割り切れない要素の個数は，
$n(A)-\{n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}=1008-(336+201-67)=538$　…①
M の要素の中で3で割り切れ，2と5で割り切れない要素の個数は，
$n(B)-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}=672-(336+134-67)=269$　…②
M の要素の中で5で割り切れ，2と3で割り切れない要素の個数は，
$n(C)-\{n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\}=403-(201+134-67)=135$　…③
①～③より，求める個数は $538+269+135=942$ より，942 個　答