平成 29 年度

第41回高校数学教育を考える会

（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

日時　：　平成29年　5月17日（水）

場　所：　県立那覇工業高等学校　視聴覚教室

目次

平成 29 年度（2017）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数Ⅲ	積分法	易 標準	・点と直線の距離の公式に代入後に，絶対値を外す際の説明をしっかりできていたか？ ・$\frac{e}{2} > 1$を用いても問題無かったか？問 1 を利用できた解答は少なかったのでは無いか？ ・接線の方程式を利用して解いていた受検生はいたか？
2 問 1 問 2	数Ⅲ	積分法	標準 標準	・3 倍角の公式は説明なく使っても良いとしたのか？（出題者側としては，3 倍角の説明まで期待したか） ・絶対値を外す際の説明をしっかりできていたか？（説明なしで式変形のみで絶対値を外していった場合，どのように採点しているか？）
3	数Ⅲ	複素数平面	難	・解答率や，受検生の出来はどうだったか？ ・医学科の正答率はどれくらいだったか？ ・ z をそのまま扱っていくか，極形式か$z = x + yi$かなど，解き方はどのような割合だったか？
4 問 1 問 2 問 3	数 A	確率	易 易 易	・説明がどれくらいできていたか？説明が足りないものや，式だけのものなどはどのように採点をしたか？ ・結果として，点数に差がついたか？ ・出題のねらいとしては，記述力を見たかったのか？
全体	・出来はどうだったか？得点の差はうまくつきましたか？ ・受験生にとっては，解きやすい問題が多かったと思うが，意識して問題作成を行ったのか？ ・数Ⅲを中心としたバランスの良い出題で，指導する側としてありがたかったです。 ・昨年・今年と複素数平面の出題が続きましたが，何か大学側からの意図はありますか？また，複素数平面の問題を採点しての感想があればお願いします。			

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

平成 29 年度（2017）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数Ⅱ	積分法	易 標準	・$\frac{1}{6}$の公式を使った解答は問題無かったか？ ・教育学部・小学校教育コースの受検生はできていたか？

問3			標準	・絶対値を外す際の説明をしっかりできていたか？ （説明なしで式変形のみで絶対値を外していった場合，どのように採点しているか？）
$\boxed{2}$ 問1 問2 問3 問4	数B	空間ベクトル	易 易 易 標準	・50点のうちの配点はどうなっているのか？ ・乙の受検生で，相加・相乗平均を正しく使える受検生はどれくらいいたか？（等号成立も含めて） ・差はうまくついたか？
全体	・昨年度は$\boxed{1}$は小問集合であったが，昨年度の反省や変えた理由があるのか？ ・出題範囲が数Ⅱ・数Bと，バランスの良い出題でよかった。			

平成29年度（2017）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問1 問2	数Ⅲ	積分法	標準 標準	・$\boxed{1}$に解きやすい問題を置いたと思うが，出来はどうだったか？ ・どんな間違いがあったか？
$\boxed{2}$ 問1 問2	数Ⅱ	高次方程式	標準 標準	・記述はしっかりできていたか？ ・必要・十分の証明がしっかりできていたか？ ・問2は問1で証明した内容を使っているが，もし問1の証明ができていなくても大丈夫か？
$\boxed{3}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	複素数平面	易 標準 標準	・各問ごとの出来の差はどうだったか？ ・問3は，問2と比べると絶対値記号のはずし方を見たかったのかと思われますが，いかがですか？
$\boxed{4}$ 問1 問2 問3	数A	確率	易 易 難	・問3ができている受験生はいましたか？ ・解きごたえのあるいい問題でした。この問題が医学科の受検生がどのくらい解けるかが気になるところですが，前期ではこのレベルの出題は厳しいでしょうか？
全体 ・今までの後期試験に比べると，解きやすい問題が多く感じましたが，全体的な出来はどうでしたか？				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1　定積分$\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$を求めよ。

問2　$t>0$とする。座標平面上の点$P(\sqrt{t}, \log t)$と直線$y=x$との距離が最小になるtの値とそのときの距離を求めよ。

解答　問1　$\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 dx-\int_1^2\frac{1}{x}dx=\left[x\right]_1^2-\left[\log|x|\right]_1^2=(2-1)-(\log 2-0)=1-\log 2$　答

問2　点$P(\sqrt{t}, \log t)$と直線$y=x$すなわち$x-y=0$との距離を$d(t)$とすると,

$$d(t)=\frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{2}}$$

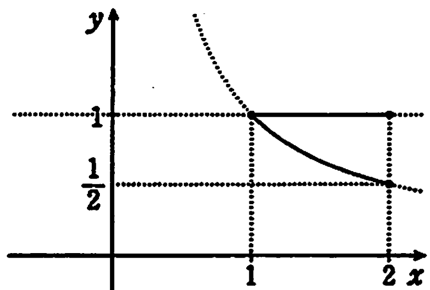
ここで,$f(t)=\sqrt{t}-\log t$とおくと,

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}=\frac{\sqrt{t}-2}{2t}$$

$f'(t)=0$とすると,$t=4$

$f(t)$の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	$2-2\log 2$	↗



ここで,

$2-2\log 2=2(1-\log 2)$について,

直線$y=1(1\leqq x\leqq 2)$と曲線$y=\frac{1}{x}(1\leqq x\leqq 2)$

の位置関係と問1の結果より

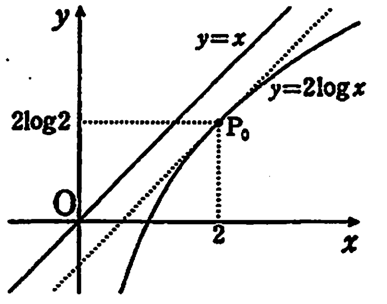
$\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=1-\log 2>0$がわかる。

点$P(\sqrt{t}, \log t)$と直線$y=x$との距離が最小になるtの値は$t=4$で,

そのときの距離は,

$$\frac{|\sqrt{4}-\log 4|}{\sqrt{2}}=\frac{2|1-\log 2|}{\sqrt{2}}=\frac{2(1-\log 2)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(1-\log 2)$$　答

別解　点Pは，$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\log t \end{cases}$ とおくことで，曲線 $y=2\log x$ 上の点であると考えられる。



この曲線 $y=2\log x$ の接線のうち，接線の傾きが直線 $y=x$ の傾き1と等しいときの接点を点 P_0 とする。

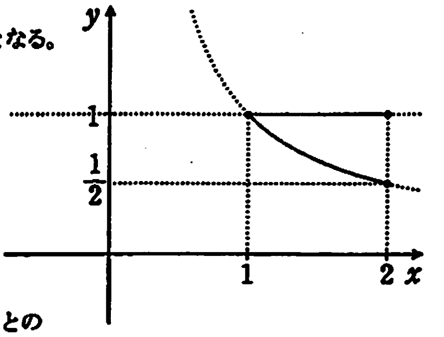
曲線 $y=2\log x$ について，$y'=\dfrac{2}{x}$ より，

点 P_0 の x 座標を s とおくと，$\dfrac{2}{s}=1$ すなわち $s=2$ であるから，点 P_0 の座標は $(2,\ 2\log 2)$ である。

また，曲線 $y=2\log x$ は上に凸であることから，

この点 $P_0(2,\ 2\log 2)$ と直線 $y=x$ との距離が，点 $P(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y=x$ すなわち $x-y=0$ との距離の最小値である。

よって，その距離は，$\dfrac{|2-2\log 2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2|1-\log 2|}{\sqrt{2}}$ となる。



ここで，$|1-\log 2|$ について，

直線 $y=1\ (1\leqq x\leqq 2)$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (1\leqq x\leqq 2)$ の位置関係と問1の結果より

$\displaystyle\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=1-\log 2>0$ がわかる。

よって，座標平面上の点 $P(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y=x$ との距離が最小になるときの距離は，$\dfrac{2(1-\log 2)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(1-\log 2)$

そのときの t の値は $s=2$ より，$t=4$ 答

参考

$1-\log 2>0$ を，直線 $y=1\ (1\leqq x\leqq 2)$ と曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (1\leqq x\leqq 2)$ の位置関係と問1の結果より求めたが，

$1-\log 2=\log e-\log 2=\log\dfrac{e}{2}$ かつ $\dfrac{e}{2}>1$ より $1-\log 2>0$

とした解答も多かったのではないかと思われる。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。(50点)

問1　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，方程式 $2\sin\theta=\sin 3\theta$ を満たす θ の値を求めよ。

問2　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 3\theta-2\sin\theta|d\theta$ を求めよ。

解答 問1 $\sin 3\theta=\sin(\theta+2\theta)$

$$
\begin{aligned}
&=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta\\
&=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\\
&=3\sin\theta-4\sin^3\theta
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
2\sin\theta-\sin 3\theta&=2\sin\theta-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\\
&=-\sin\theta(1-4\sin^2\theta)\\
&=-\sin\theta(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)
\end{aligned}
$$

$2\sin\theta=\sin 3\theta$ のとき，$2\sin\theta-\sin 3\theta=0$ すなわち $-\sin\theta(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)=0$ であるから，

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ すなわち，$\theta=\frac{\pi}{6}$　答

問2　問1より，$\sin 3\theta-2\sin\theta=\sin\theta(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)$ であり，

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\geqq 0$，$1+2\sin\theta\geqq 0$ である。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$0\leqq\sin\theta\leqq\frac{1}{2}$ より，$1-2\sin\theta\geqq 0$ すなわち $\sin 3\theta-2\sin\theta\geqq 0$ から，

$$|\sin 3\theta-2\sin\theta|=\sin 3\theta-2\sin\theta$$

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，$1-2\sin\theta\leqq 0$ すなわち $\sin 3\theta-2\sin\theta\leqq 0$ から，

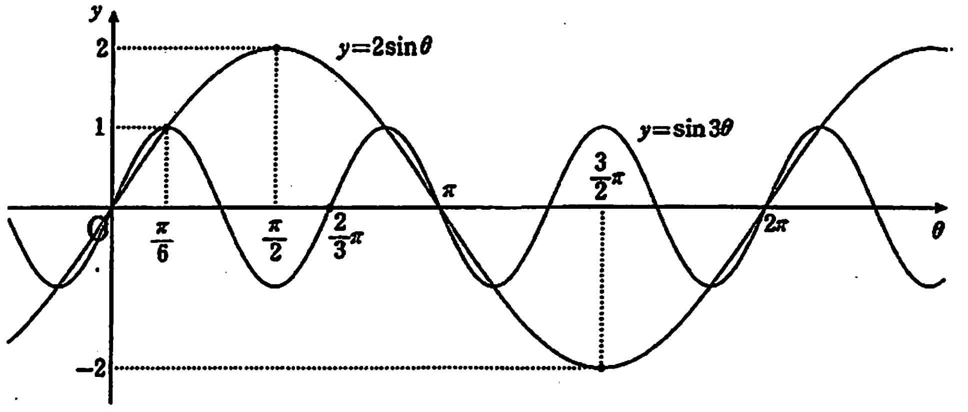
$$|\sin 3\theta-2\sin\theta|=-(\sin 3\theta-2\sin\theta)$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 3\theta-2\sin\theta|d\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin 3\theta-2\sin\theta)d\theta-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 3\theta-2\sin\theta)d\theta\\
&=-\frac{1}{3}\Big[\cos 3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+2\Big[\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{3}\Big[\cos 3\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-2\Big[\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=-\frac{1}{3}(0-1)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{3}(0-0)-2\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=2\sqrt{3}-\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

答

参考



上の $y=\sin 3\theta$ と $y=2\sin\theta$ のグラフと，問1より $\theta=\frac{\pi}{6}$ のときに2つのグラフは交わることからも，

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\sin 3\theta-2\sin\theta\geqq 0$ より，$|\sin 3\theta-2\sin\theta|=\sin 3\theta-2\sin\theta$

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin 3\theta-2\sin\theta\leqq 0$ より，$|\sin 3\theta-2\sin\theta|=-(\sin 3\theta-2\sin\theta)$ がわかる。

$\boxed{3}$ z を複素数とする。$z+\dfrac{3}{z}$ が実数であり，$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ。（50点）

解答　$z=x+yi$ とすると，

$$z+\frac{3}{z}=x+yi+\frac{3}{x+yi}=x+yi+\frac{3(x-yi)}{x^2+y^2}=x+\frac{3x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{3y}{x^2+y^2}\right)i \quad \cdots ①$$

①が実数なので $y-\dfrac{3y}{x^2+y^2}=y\left(1-\dfrac{3}{x^2+y^2}\right)=0$ より，$y=0$ または $x^2+y^2=3$ である。

i) $y=0$ のとき，$z=x$ であり，

$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq 4$ は，$3\leqq x+\dfrac{3}{x}\leqq 4$ とできる。

$x<0$ のとき，$3\leqq x+\dfrac{3}{x}\leqq 4$ を満たさないため，$x>0$ であることがわかる。

$3\leqq x+\dfrac{3}{x}$ より，$x^2-3x+3\geqq 0$ だから，この二次不等式はすべての実数 x について成り立つ。

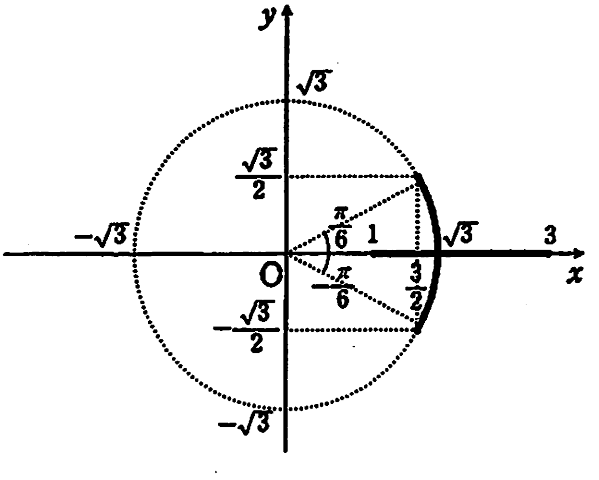
$x+\dfrac{3}{x}\leqq 4$ より，$x^2-4x+3\leqq 0$ だから，これを解くと $1\leqq x\leqq 3$

以上より，$y=0$ のとき，$1\leqq x\leqq 3$ すなわち $1\leqq z\leqq 3$

ii) $x^2+y^2=3$ のとき，①より $z+\dfrac{3}{z}=x+\dfrac{3x}{3}=2x$ なので，

$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq 4$ は，$3\leqq 2x\leqq 4$ となり，$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$

i)，ii) より z の動く範囲は複素数平面上で図の実線部分になる。



図解 zの極形式を$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$とし，題意より$z\neq0$だから$r>0$であり，また$-\pi\leqq\theta<\pi$の範囲で考えても良い。

$$z+\frac{3}{z}=z+3z^{-1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+3r^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{3}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{3}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r+\frac{3}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{3}{r}\right)\sin\theta \quad \cdots①$$

①が実数なので，$r-\dfrac{3}{r}=0$または$\sin\theta=0$である。

i）$r-\dfrac{3}{r}=0$のとき，$r=\sqrt{3}$であり，

$z+\dfrac{3}{z}=\left(r+\dfrac{3}{r}\right)\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$より，

$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq4$は，$3\leqq2\sqrt{3}\cos\theta\leqq4$すなわち$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta$

よって，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$

ii）$\sin\theta=0$すなわち$\theta=-\pi,0$のとき，$\cos\theta=1$であり，

$z+\dfrac{3}{z}=\left(r+\dfrac{3}{r}\right)\cos\theta=r+\dfrac{3}{r}$である。

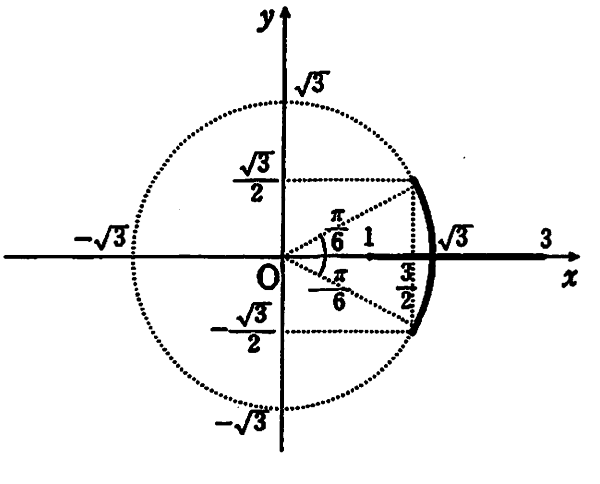
$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq4$より，$3\leqq r+\dfrac{3}{r}\leqq4$である。

$3\leqq r+\dfrac{3}{r}$より，$r^2-3r+3\geqq0$だから，この二次不等式はすべての実数rについて成り立つ。

$r+\dfrac{3}{r}\leqq4$より，$r^2-4r+3\leqq0$だから，これを解くと$1\leqq r\leqq3$である。

以上より，$\sin\theta=0$のとき，$1\leqq r\leqq3$である。

i），ii）よりzの動く範囲は複素数平面上で図の実線部分になる。



4 袋の中に赤玉4個と白玉6個が入っている。Aが玉を2個取り出し，取り出した玉の色を確認して，もし2個とも赤玉なら赤玉1個を，それ以外の場合は白玉1個を袋に戻し，次にBがその袋から玉を2個取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

問1　Aが白玉2個を取り出し，かつBが赤玉を2個取り出す確率を求めよ。

問2　Bが赤玉を2個取り出す確率を求めよ。

問3　Bが取り出した玉が赤玉2個であったとき，Aが取り出した玉が白玉2個である条件付き確率を求めよ。

解答 問1　Aが白玉2個を取り出し，かつBが赤玉を2個取り出す確率は $\dfrac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{1}{18}$ 答

問2　i)　Aが白玉2個を取り出し，かつBが赤玉を2個取り出す確率は，問1より $\dfrac{1}{18}$

ii)　Aが白玉1個と赤玉1個を取り出し，かつBが赤玉を2個取り出す確率は

$$\frac{{}_6C_1\times{}_4C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\frac{2}{45}$$

iii)　Aが赤玉2個を取り出し，かつBが赤玉を2個取り出す確率は $\dfrac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{1}{90}$

i)～iii)より，これらの事象は互いに排反なので，求める確率は $\dfrac{1}{18}+\dfrac{2}{45}+\dfrac{1}{90}=\dfrac{10}{90}=\dfrac{1}{9}$ 答

問3　Bが赤玉2個を取り出す事象をB_0，Aが白玉2個を取り出す事象をA_0とすると，
Bが取り出した玉が赤玉2個であったとき，Aが取り出した玉が白玉2個である条件付き確率は，

$$P_{B_0}(A_0)=\frac{P(A_0\cap B_0)}{P(B_0)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}$$ 答

1 $0 \leqq a \leqq 1$ とし，$f(a)=\int_0^1 |x(a-x)|dx$ とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　定積分 $\int_0^1 x(1-x)dx$ を求めよ。

問2　$f(a)$ を a の関数として表せ。

問3　$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値をそれぞれ求めよ。

解答　問1　$\int_0^1 x(1-x)dx=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$　答

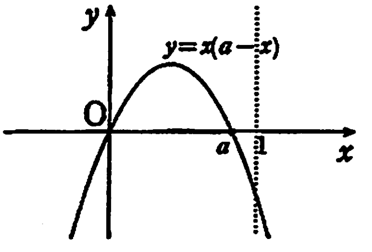
別解　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ より，$\int_0^1 x(1-x)dx=-\int_0^1 x(x-1)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(1-0)^3\right\}=\frac{1}{6}$　答

問2　$0 \leqq a \leqq 1$ より，

$0 \leqq x \leqq a$ のとき　$|x(a-x)|=x(a-x)$

$a \leqq x \leqq 1$ のとき　$|x(a-x)|=-x(a-x)$

以上より，



$$
\begin{aligned}
f(a)&=\int_0^1 |x(a-x)|dx\\
&=\int_0^a x(a-x)dx-\int_a^1 x(a-x)dx\\
&=\int_0^a (ax-x^2)dx-\int_a^1 (ax-x^2)dx\\
&=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a-\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_a^1\\
&=\left\{\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)-0\right\}-\left\{\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)\right\}\\
&=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$
答

問3　$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$ であるから，

$f'(a)=0$ のとき，$0 \leqq a \leqq 1$ より　$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(a)$ の増減表は次のようになり，

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$

$f(a)$ は，$a=0$ のとき最大値 $\frac{1}{3}$

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$ をとる。　答

2 a, b を正の実数とする。座標空間における4点 O$(0,0,0)$, A$(a,0,0)$, B$(0,b,0)$, C$(0,0,1)$を頂点とする四面体OABCを考える。次の問いに答えよ。 (50点)

問1 $\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$の内積を求めよ。

問2 $\cos\angle ACB$と$\sin\angle ACB$をa, bを用いて表せ。

問3 三角形ABCの面積をa, bを用いて表せ。

問4 四面体OABCの体積が1であるとき，三角形ABCの面積の最小値とそのときのa, bの値を求めよ。

解答 問1 $\overrightarrow{CA}=(a,0,-1)$, $\overrightarrow{CB}=(0,b,-1)$ より，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0+0+1=1$ 答

問2 $\cos\angle ACB=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$

$0<\angle ACB<\pi$ より

$$\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$ 答

問3 三角形ABCの面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\sin\angle ACB=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}$$ 答

別解

三角形ABCの面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}==\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)-1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}$$ 答

問4 四面体OABCの体積は，$\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot OC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 1=\frac{1}{6}ab$ であり，

四面体OABCの体積が1であるとき，$\frac{1}{6}ab=1$ より，$b=\frac{6}{a}$ とできる。

三角形ABCの面積をSとおくと，問3より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\cdot\frac{36}{a^2}+a^2+\frac{36}{a^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{36}{a^2}+36}$$

$a^2>0$, $\frac{36}{a^2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により $a^2+\frac{36}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{36}{a^2}}=12$

等号成立は，a が正の実数であることから，$a^2=\frac{36}{a^2}$ すなわち$a=\sqrt{6}$ のときである。

よって，$S\geqq\frac{1}{2}\sqrt{12+36}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ より，

三角形ABCの面積はの最小値は，$a=b=\sqrt{6}$ のとき，$2\sqrt{3}$ をとる。 答

1 関数 $f(x)$ は等式 $f'(x)=\sin x+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ を満たす。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=A$，$f(0)=c$ とする。$f(x)$ を A と c を用いて表せ。

問2 $f(0)=0$ のとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　問1 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=A$ とすると，

$f'(x)=\sin x+A$ より，

$f(x)=-\cos x+Ax+C$ (Cは積分定数) …①

とできる。

ここで，$f(0)=c$ より，①で $x=0$ とすると

$c=-1+C$ すなわち $C=c+1$

よって，

$f(x)=-\cos x+Ax+c+1$ 答

別解

$f'(x)=\sin x+A$ より，

$$\begin{aligned}f(x)-f(0)&=\int_0^x f'(t)dt\\&=\int_0^x(\sin t+A)dt\\&=\Big[-\cos t+At\Big]_0^x\\&=-\cos x+Ax-(-1)\\&=-\cos x+Ax+1\end{aligned}$$

よって，$f(0)=c$ より，

$f(x)=-\cos x+Ax+c+1$ 答

問2 $f(0)=0$ のとき，問1の式に $c=0$ を代入すると，

$f(x)=-\cos x+Ax+1$ とできる。

これを，$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=A$ に代入すると，

$$\int_{-\pi}^{\pi}(-\cos t+At+1)dt=A$$

$$\Big[-\sin t+\frac{1}{2}At^2+t\Big]_{-\pi}^{\pi}=A$$

$$2\pi=A$$

$f(x)=-\cos x+2\pi x+1$ 答

2　A，B，Cをxの整式とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　AをBで割った商をQ，余りをRとする。このとき，CがAとBの共通因数であるための必要十分条件は，CがBとRの共通因数であることを示せ。

問2　次の整式Aと整式Bの共通因数のうち，次数が最大のものを求めよ。

$$A=x^4+9x^3+6x^2-36x+216$$
$$B=x^3+4x^2-15x+42$$

解答　問1　AをBで割った商がQ，余りがRなので，$A=BQ+R$とおける。

CがAとBの共通因数であるならば，CがBとRの共通因数であることを示す。

CがAとBの共通因数であるので，$A=CD$，$B=CE$ (D，Eを整式とする) とおける。

このとき，$A=BQ+R$より，

$$CD=CEQ+R$$
$$R=C(D-EQ)$$

$D-EQ$は整式なので，CはRの共通因数である。

仮定より，CはBの共通因数であるので，CはBとRの共通因数である。

次に，CがBとRの共通因数であるならば，CがAとBの共通因数であることを示す。

CがBとRの共通因数であるので，$B=CE$，$R=CF$ (E，Fを整式とする) とおける。

このとき，$A=BQ+R$より，$A=CEQ+CF=C(EQ+F)$

$EQ+F$は整式なので，CはAの共通因数である。

仮定より，CはBの共通因数であるので，CはAとBの共通因数である。

以上より，CがAとBの共通因数であるための必要十分条件は，CがBとRの共通因数であることである。 終

問2　AをBで割ると，商が$x+5$，余りがx^2-3x+6となるので，

$$x^4+9x^3+6x^2-36x+216=(x^3+4x^2-15x+42)(x+5)+x^2-3x+6$$

とできる。

ここで，$x^3+4x^2-15x+42$をx^2-3x+6で割ると商が$x+7$であることから，

$$x^3+4x^2-15x+42=(x^2-3x+6)(x+7)$$

となり，$R=x^2-3x+6$とおくと，BとRの共通因数x^2-3x+6は，

問1よりAとBの共通因数でもある。

さらに，Bの次数が3であることからx^2-3x+6はAとBの共通因数のうち，次数が最大のものである。 答

3 複素数 z は $|z|=1$ を満たすとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　z の実部を x とする。$z^2+\overline{z}^2$ を x を用いて表せ。ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする。

問2　$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ。

問3　次の等式を証明せよ。

$$\left|\frac{z}{2}+2\overline{z}+2\right|+\left|\frac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|=5$$

解答　問1　$z=x+yi$ とすると，$|z|=1$ より $x^2+y^2=1$ であり，

$z^2+\overline{z}^2=(x^2-y^2+2xyi)+(x^2-y^2-2xyi)=2x^2-2y^2=2x^2-2(1-x^2)=4x^2-2$　答

別解　$|z|^2=z\overline{z}=1$ より，$(z+\overline{z})^2=z^2+\overline{z}^2+2$

$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=x$ より $z+\overline{z}=2x$ であるから，$z^2+\overline{z}^2=(2x)^2-2=4x^2-2$　答

問2　$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|^2=\left(\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right)\left(\dfrac{\overline{z}}{2}+2z-2\right)$

$$=\frac{1}{4}z\overline{z}+z^2-z+\overline{z}^2+4z\overline{z}-4\overline{z}-\overline{z}-4z+4$$

$$=\frac{17}{4}z\overline{z}+z^2+\overline{z}^2-5(z+\overline{z})+4$$

ここで，$|z|=1$ より $z\overline{z}=1$，問1より $z^2+\overline{z}^2=4x^2-2$，$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=x$ より $z+\overline{z}=2x$ から，

$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|^2=\dfrac{17}{4}+4x^2-2-10x+4=4x^2-10x+\dfrac{25}{4}=\left(2x-\dfrac{5}{2}\right)^2=4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2$

$|z|=1$ より $-1\leqq x\leqq 1$ であるから，

$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|^2$ は，$x=-1$ のとき，最大値 $4\left(-1-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{81}{4}$

$x=1$ のとき，最小値 $4\left(1-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$　答

問3　問2より，$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|=\sqrt{4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2}=2\left|x-\dfrac{5}{4}\right|$ である。

問2と同様に，$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}+2\right|^2=\left(\dfrac{z}{2}+2\overline{z}+2\right)\left(\dfrac{\overline{z}}{2}+2z+2\right)$

$$=\frac{1}{4}z\overline{z}+z^2+z+\overline{z}^2+4z\overline{z}+4\overline{z}+\overline{z}+4z+4$$

$$=\frac{17}{4}z\overline{z}+z^2+\overline{z}^2+5(z+\overline{z})+4$$

$$=\frac{17}{4}+4x^2-2+10x+4$$

$$=4x^2+10x+\frac{25}{4}=\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2=4\left(x+\frac{5}{4}\right)^2$$

より，$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}+2\right|=\sqrt{4\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2}=2\left|x+\dfrac{5}{4}\right|$

また，$-1\leqq x\leqq 1$ より $x+\dfrac{5}{4}>0$，$x-\dfrac{5}{4}<0$ であるから，

$\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}+2\right|+\left|\dfrac{z}{2}+2\overline{z}-2\right|=2\left|x+\dfrac{5}{4}\right|+2\left|x-\dfrac{5}{4}\right|=2\left(x+\dfrac{5}{4}\right)-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)=5$　答

4 1個のさいころを投げて3以上の目が出たら5点，2以下の目が出たら2点得られるゲームを行う。次の問いに答えよ。(50点)

問1　さいころを2回投げて，合計点が7点になる確率を求めよ。

問2　さいころを3回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ。

問3　さいころを n 回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ。

解答 問1　1個のさいころを投げて，3以上の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，2以下の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。

2回のうち，1回が3以上の目が出て，1回は2以下の目が出る確率なので，${}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$ 答

問2　さいころを3回投げて，合計点が偶数になるのは，得点が

（i）3回とも偶数

（ii）3回のうち，2回が奇数で1回が偶数

のいずれかの場合である。

（i）得点が3回とも偶数である確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

（ii）得点が，3回のうち2回が奇数で1回が偶数である確率は，${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$

（i），（ii）の事象は互いに排反であるので，求める確率は，$\frac{1}{27}+\frac{4}{9}=\frac{13}{27}$ 答

問3　求める確率を p_n とする。

p_1 はさいころを1回投げて2以下の目が出る確率だから，$p_1=\frac{1}{3}$

p_{n+1} について考える。

さいころを $n+1$ 回投げて合計点が偶数になるのは，以下の事象AまたはBが起こる場合である。

A：さいころを n 回投げた時点での合計点が偶数であり，$n+1$ 回目に2以下の目が出る。

B：さいころを n 回投げた時点での合計点が奇数であり，$n+1$ 回目に3以上の目が出る。

AとBは互いに排反であるから，p_{n+1} を p_n を用いて表すと

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{3}+(1-p_n)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}$$

これを変形して $p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項が $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$，公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから，

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

よって，求める確率は $\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ である。 答

問3の別解

（i）nが偶数のとき，3以上の目が偶数回出れば良いので，求める確率は

$$ {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+{}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 $$

である。

二項定理より，

$$ \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \cdots① $$

$$ \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(-\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^0 $$

より，nは偶数なので，

$$ \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n-{}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \cdots② $$

①，②を辺々加えて，両辺を2で割ることにより，

$$ {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+{}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} $$

（ii）nが奇数のとき，3以上の目が偶数回出れば良いので，求める確率は

$$ {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+{}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}+\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 $$

である。

二項定理より，

$$ \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n={}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(-\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^0 $$

であるが，nは奇数なので，

$$ \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^n=-{}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \cdots③ $$

（i）の式①から式③を辺々ひいて，両辺を2で割ることにより，

$$ {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+{}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}+\cdots+{}_nC_{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} $$

（i），（ii）より，さいころをn回投げて合計点が偶数になる確率は$\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$である。(答)