

平成 29 年度

第41回高校数学教育を考える会

(沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学)

日時 : 平成29年 5月17日(水)

場 所 : 県立那覇工業高等学校 視聴覚教室

目次

平成 29 年度 琉球大学入試試験問題についての感想と質問

(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 1 2

前期日程 乙 1 2, 1 3

後期日程 1 3

平成 29 年度 琉球大学入試問題 解答例

(高数教 大学入試問題検討委員会)

前期日程 甲 1 4

前期日程 乙 2 1

後期日程 3

平成 29 年度 (2017) 琉球大学入試問題 (前期・甲) に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易 度	質問事項
1 問 1 問 2	数Ⅲ	積 分 法	易 標準	・点と直線の距離の公式に代入後に、絶対値を外す際の説明をしっかりとできていたか？ ・$\frac{e}{2} > 1$を用いても問題無かったか？問 1 を利用できた解答は少なかったのでは無いか？ ・接線の方程式を利用して解いていた受検生はいたか？
2 問 1 問 2	数Ⅲ	積 分 法	標準 標準	・3 倍角の公式は説明なく使っても良いとしたのか？(出題者側としては、3 倍角の説明まで期待したか) ・絶対値を外す際の説明をしっかりとできていたか？(説明なしで式変形のみで絶対値を外していった場合、どのように採点しているか？)
3	数Ⅲ	複 素 数 平 面	難	・解答率や、受検生の出来はどうだったか？ ・医学科の正答率はどれくらいだったか？ ・z をそのまま扱っていくか、極形式か$z = x + yi$かなど、解き方はどのような割合だったか？
4 問 1 問 2 問 3	数 A	確率	易 易 易	・説明がどれくらいできていたか？説明が足りないものや、式だけのものなどはどのように採点をしたか？ ・結果として、点数に差がついたか？ ・出題のねらいとしては、記述力を見たかったのか？
全体	・出来はどうだったか？得点の差はうまくつきましたか？ ・受験生にとっては、解きやすい問題が多かったと思うが、意識して問題作成を行ったのか？ ・数Ⅲを中心としたバランスの良い出題で、指導する側としてありがたかったです。 ・昨年・今年と複素数平面の出題が続きましたが、何か大学側からの意図はありますか？また、複素数平面の問題を採点しての感想があればお願いします。			

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

平成 29 年度 (2017) 琉球大学入試問題 (前期・乙) に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	数Ⅱ	積 分 法	易 標準	・$\frac{1}{6}$の公式を使った解答は問題無かったか？ ・教育学部・小学校教育コースの受検生はできていたか？

問 3			標準	・絶対値を外す際の説明をしっかりとできていたか？ (説明なしで式変形のみで絶対値を外していった場合、 どのように採点しているか？)
問 1 問 2 問 3 問 4	数 B	空間 ベク トル	易 易 易 標準	・50 点のうちの配点はどうか？ ・乙の受検生で、相加・相乗平均を正しく使える受検生は どれくらいいたか？(等号成立も含めて) ・差はうまくついたか？
全体	・昨年度は ¹ は小問集合であったが、昨年度の反省や変えた理由があるのか？ ・出題範囲が数Ⅱ・数 B と、バランスの良い出題でよかった。			

平成 29 年度 (2017) 琉球大学入試問題 (後期) に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易 度	質問事項
問 1 問 2	数Ⅲ	積 分 法	標準 標準	・ ¹ に解きやすい問題を置いたと思うが、出来はどうだった か？ ・どんな間違いがあったか？
問 1 問 2	数Ⅱ	高 次 方 程 式	標準 標準	・記述はしっかりとできていたか？ ・必要・十分の証明がしっかりとできていたか？ ・問 2 は問 1 で証明した内容を使っているが、もし問 1 の 証明ができていなくても大丈夫か？
問 1 問 2 問 3	数Ⅲ	複 素 数 平 面	易 標準 標準	・各問ごとの出来の差はどうだったか？ ・問 3 は、問 2 と比べると絶対値記号のはずし方を見たかつ たのかと思われますが、いかがですか？
問 1 問 2 問 3	数 A	確率	易 易 難	・問 3 ができている受検生はいましたか？ ・解きごたえのあるいい問題でした。この問題が医学科の 受検生がどのくらい解けるかが気になるところですが、 前期ではこのレベルの出題は厳しいでしょうか？
全体	・今までの後期試験に比べると、解きやすい問題が多く感じましたが、全体的な出来はど うでしたか？			

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 定積分 $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$ を求めよ。

問2 $t > 0$ とする。座標平面上の点 $P(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ との距離が最小になる t の値とそのときの距離を求めよ。

【解答】 問1 $\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [x]_1^2 - [\log|x|]_1^2 = (2-1) - (\log 2 - 0) = 1 - \log 2$ 図

問2 点 $P(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ すなわち $x-y=0$ との距離を $d(t)$ とすると、

$$d(t) = \frac{|\sqrt{t} - \log t|}{\sqrt{2}}$$

ここで、 $f(t) = \sqrt{t} - \log t$ とおくと、

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t} - 2}{2t}$$

$f'(t) = 0$ とすると、 $t = 4$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	4	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	$2 - 2\log 2$	$\nearrow$

ここで、

$2 - 2\log 2 = 2(1 - \log 2)$ について、

直線 $y=1 (1 \leq x \leq 2)$ と曲線 $y=\frac{1}{x} (1 \leq x \leq 2)$

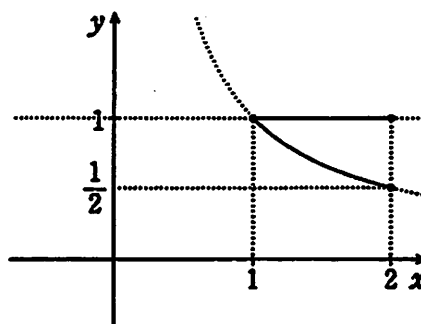
の位置関係と問1の結果より

$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 1 - \log 2 > 0$ がわかる。

点 $P(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ との距離が最小になる t の値は $t=4$ で、

そのときの距離は、

$$\frac{|\sqrt{4} - \log 4|}{\sqrt{2}} = \frac{2|1 - \log 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2(1 - \log 2)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1 - \log 2) \quad \text{図}$$



【別解】 点 P は、 $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\log t \end{cases}$ とおくことで、曲線 $y=2\log x$ 上の点であると考えられる。

この曲線 $y=2\log x$ の接線のうち、接線の傾きが直線 $y=x$ の傾き 1 と等しいときの接点を点 P_0 とする。

曲線 $y=2\log x$ について、 $y'=\frac{2}{x}$ より、

点 P_0 の x 座標を s とおくと、 $\frac{2}{s}=1$ すなわち $s=2$ で

あるから、点 P_0 の座標は $(2, 2\log 2)$ である。

また、曲線 $y=2\log x$ は上に凸であることから、

この点 $P_0(2, 2\log 2)$ と直線 $y=x$ との距離が、点 $P(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ すなわち $x-y=0$ との距離の最小値である。

よって、その距離は、 $\frac{|2-2\log 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2|1-\log 2|}{\sqrt{2}}$ となる。

ここで、 $|1-\log 2|$ について、

直線 $y=1(1 \leq x \leq 2)$ と曲線 $y=\frac{1}{x}(1 \leq x \leq 2)$

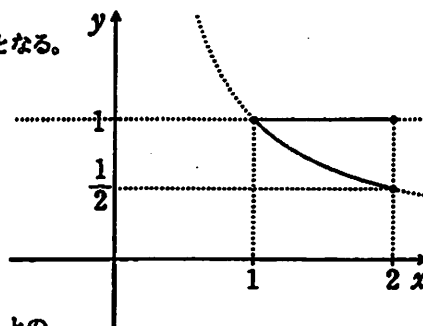
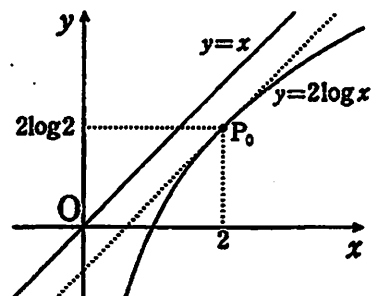
の位置関係と問 1 の結果より

$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 1 - \log 2 > 0$ がわかる。

よって、座標平面上の点 $P(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ との

距離が最小になるときの距離は、 $\frac{2|1-\log 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(1-\log 2)$

そのときの t の値は $s=2$ より、 $t=4$ 図



【参考】

$1-\log 2 > 0$ を、直線 $y=1(1 \leq x \leq 2)$ と曲線 $y=\frac{1}{x}(1 \leq x \leq 2)$

の位置関係と問 1 の結果より求めたが、

$1-\log 2 = \log e - \log 2 = \log \frac{e}{2}$ かつ $\frac{e}{2} > 1$ より $1-\log 2 > 0$

とした解答も多かったのではないかと思われる。

2 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、方程式 $2\sin \theta = \sin 3\theta$ を満たす θ の値を求めよ。

問2 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin \theta| d\theta$ を求めよ。

〔解答〕 問1 $\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta)$

$$\begin{aligned} &= \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \\ &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} 2\sin \theta - \sin 3\theta &= 2\sin \theta - (3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) \\ &= -\sin \theta (1 - 4\sin^2 \theta) \\ &= -\sin \theta (1 + 2\sin \theta)(1 - 2\sin \theta) \end{aligned}$$

$2\sin \theta = \sin 3\theta$ のとき、 $2\sin \theta - \sin 3\theta = 0$ すなわち $-\sin \theta (1 + 2\sin \theta)(1 - 2\sin \theta) = 0$ であるから、

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 図

問2 問1 より、 $\sin 3\theta - 2\sin \theta = \sin \theta (1 + 2\sin \theta)(1 - 2\sin \theta)$ であり、

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin \theta \geq 0$ 、 $1 + 2\sin \theta \geq 0$ である。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ のとき、 $0 \leq \sin \theta \leq \frac{1}{2}$ より、 $1 - 2\sin \theta \geq 0$ すなわち $\sin 3\theta - 2\sin \theta \geq 0$ から、

$$|\sin 3\theta - 2\sin \theta| = \sin 3\theta - 2\sin \theta$$

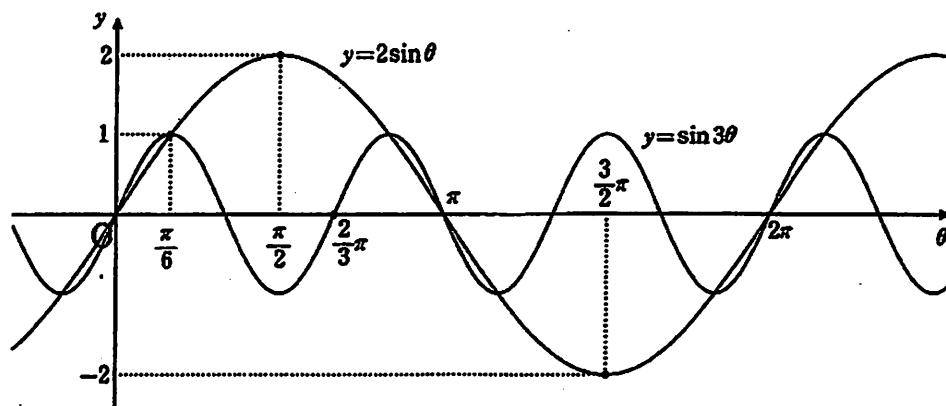
$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$ より、 $1 - 2\sin \theta \leq 0$ すなわち $\sin 3\theta - 2\sin \theta \leq 0$ から、

$$|\sin 3\theta - 2\sin \theta| = -(\sin 3\theta - 2\sin \theta)$$

以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin \theta| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3\theta - 2\sin \theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3\theta - 2\sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{3} [\cos 3\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} + 2 [\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} [\cos 3\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 [\cos \theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} (0 - 1) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{1}{3} (0 - 0) - 2 \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \quad \text{図} \end{aligned}$$

(参考)



上の $y = \sin 3\theta$ と $y = 2\sin \theta$ のグラフと、問1より $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときに2つのグラフは交わることから、

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin 3\theta - 2\sin \theta \geq 0$ より、 $|\sin 3\theta - 2\sin \theta| = \sin 3\theta - 2\sin \theta$

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin 3\theta - 2\sin \theta \leq 0$ より、 $|\sin 3\theta - 2\sin \theta| = -(\sin 3\theta - 2\sin \theta)$ がわかる。

3 z を複素数とする。 $z + \frac{3}{z}$ が実数であり、 $3 \leq z + \frac{3}{z} \leq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ。 (50点)

(解答) $z = x + yi$ とすると、

$$z + \frac{3}{z} = x + yi + \frac{3}{x + yi} = x + yi + \frac{3(x - yi)}{x^2 + y^2} = x + \frac{3x}{x^2 + y^2} + \left(y - \frac{3y}{x^2 + y^2}\right)i \quad \text{---①}$$

①が実数なので $y - \frac{3y}{x^2 + y^2} = y\left(1 - \frac{3}{x^2 + y^2}\right) = 0$ より、 $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 3$ である。

i) $y = 0$ のとき、 $z = x$ であり、

$$3 \leq z + \frac{3}{z} \leq 4 \text{ は、 } 3 \leq x + \frac{3}{x} \leq 4 \text{ とできる。}$$

$x < 0$ のとき、 $3 \leq x + \frac{3}{x} \leq 4$ を満たさないため、 $x > 0$ であることがわかる。

$3 \leq x + \frac{3}{x}$ より、 $x^2 - 3x + 3 \geq 0$ だから、この二次不等式はすべての実数 x について成り立つ。

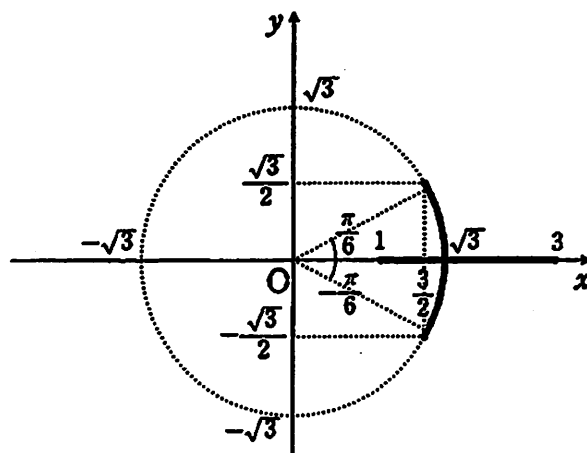
$x + \frac{3}{x} \leq 4$ より、 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ だから、これを解くと $1 \leq x \leq 3$

以上より、 $y = 0$ のとき、 $1 \leq x \leq 3$ すなわち $1 \leq z \leq 3$

ii) $x^2 + y^2 = 3$ のとき、①より $z + \frac{3}{z} = x + \frac{3x}{3} = 2x$ なので、

$$3 \leq z + \frac{3}{z} \leq 4 \text{ は、 } 3 \leq 2x \leq 4 \text{ となり、 } \frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

i), ii) より z の動く範囲は複素数平面上で図の実線部分になる。



図解 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とし、題意より $z\neq 0$ だから $r>0$ であり、また $-\pi\leq\theta<\pi$ の範囲で考えても良い。

$$\begin{aligned} z+\frac{3}{z} &= z+3z^{-1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+3r^{-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1} \\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{3}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{3}{r}(\cos\theta-i\sin\theta) \\ &=\left(r+\frac{3}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{3}{r}\right)\sin\theta \quad \text{---①} \end{aligned}$$

①が実数なので、 $r-\frac{3}{r}=0$ または $\sin\theta=0$ である。

i) $r-\frac{3}{r}=0$ のとき、 $r=\sqrt{3}$ であり、

$$z+\frac{3}{z}=\left(r+\frac{3}{r}\right)\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta \text{ より、}$$

$$3\leq z+\frac{3}{z}\leq 4 \text{ は、} 3\leq 2\sqrt{3}\cos\theta\leq 4 \text{ すなわち } \frac{\sqrt{3}}{2}\leq \cos\theta$$

$$\text{よって、} -\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$$

ii) $\sin\theta=0$ すなわち $\theta=-\pi, 0$ のとき、 $\cos\theta=1$ であり、

$$z+\frac{3}{z}=\left(r+\frac{3}{r}\right)\cos\theta=r+\frac{3}{r} \text{ である。}$$

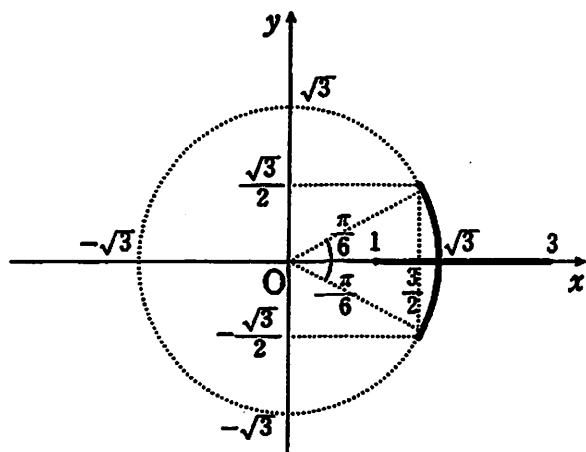
$$3\leq z+\frac{3}{z}\leq 4 \text{ より、} 3\leq r+\frac{3}{r}\leq 4 \text{ である。}$$

$$3\leq r+\frac{3}{r} \text{ より、} r^2-3r+3\geq 0 \text{ だから、この二次不等式はすべての実数 } r \text{ について成り立つ。}$$

$$r+\frac{3}{r}\leq 4 \text{ より、} r^2-4r+3\leq 0 \text{ だから、これを解くと } 1\leq r\leq 3 \text{ である。}$$

以上より、 $\sin\theta=0$ のとき、 $1\leq r\leq 3$ である。

i), ii) より z の動く範囲は複素数平面上で図の実線部分になる。



- 4 袋の中に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている。A が玉を 2 個取り出し、取り出した玉の色を確認して、もし 2 個とも赤玉なら赤玉 1 個を、それ以外の場合は白玉 1 個を袋に戻し、次に B がその袋から玉を 2 個取り出す。次の問いに答えよ。
(50 点)

問 1 A が白玉 2 個を取り出し、かつ B が赤玉を 2 個取り出す確率を求めよ。

問 2 B が赤玉を 2 個取り出す確率を求めよ。

問 3 B が取り出した玉が赤玉 2 個であったとき、A が取り出した玉が白玉 2 個である条件付き確率を求めよ。

(解答) 問 1 A が白玉 2 個を取り出し、かつ B が赤玉を 2 個取り出す確率は $\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{18}$ 図

問 2 i) A が白玉 2 個を取り出し、かつ B が赤玉を 2 個取り出す確率は、問 1 より $\frac{1}{18}$

ii) A が白玉 1 個と赤玉 1 個を取り出し、かつ B が赤玉を 2 個取り出す確率は

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{2}{45}$$

iii) A が赤玉 2 個を取り出し、かつ B が赤玉を 2 個取り出す確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{90}$

i) ~ iii) より、これらの事象は互いに排反なので、求める確率は $\frac{1}{18} + \frac{2}{45} + \frac{1}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$ 図

問 3 B が赤玉 2 個を取り出す事象を B_0 、A が白玉 2 個を取り出す事象を A_0 とすると、

B が取り出した玉が赤玉 2 個であったとき、A が取り出した玉が白玉 2 個である条件付き確率は、

$$P_{B_0}(A_0) = \frac{P(A_0 \cap B_0)}{P(B_0)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2} \quad \text{図}$$

1 $0 \leq a \leq 1$ とし, $f(a) = \int_0^1 |x(a-x)| dx$ とする. 次の問いに答えよ. (50点)

問1 定積分 $\int_0^1 x(1-x) dx$ を求めよ.

問2 $f(a)$ を a の関数として表せ.

問3 $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの a の値をそれぞれ求めよ.

【解答】 問1 $\int_0^1 x(1-x) dx = \int_0^1 (x-x^2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 図

【別解】 $\int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$ より, $\int_0^1 x(1-x) dx = -\int_0^1 x(x-1) dx = -\left[-\frac{1}{6}(1-0)^3 \right] = \frac{1}{6}$ 図

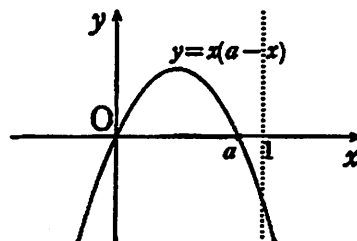
問2 $0 \leq a \leq 1$ より,

$0 \leq x \leq a$ のとき $|x(a-x)| = x(a-x)$

$a \leq x \leq 1$ のとき $|x(a-x)| = -x(a-x)$

以上より,

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 |x(a-x)| dx \\ &= \int_0^a x(a-x) dx - \int_a^1 x(a-x) dx \\ &= \int_0^a (ax - x^2) dx - \int_a^1 (ax - x^2) dx \\ &= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a - \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_a^1 \\ &= \left(\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right) - \left(\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{図} \end{aligned}$$



問3 $f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$ であるから,

$$f'(a) = 0 \text{ のとき, } 0 \leq a \leq 1 \text{ より } a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(a)$ の増減表は次のようになり,

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

$f(a)$ は, $a=0$ のとき最大値 $\frac{1}{3}$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ をとる. 図

- 2 a, b を正の実数とする。座標空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ の内積を求めよ。

問 2 $\cos \angle ACB$ と $\sin \angle ACB$ を a, b を用いて表せ。

問 3 三角形 ABC の面積を a, b を用いて表せ。

問 4 四面体 $OABC$ の体積が 1 であるとき、三角形 ABC の面積の最小値とそのときの a, b の値を求めよ。

解答 問 1 $\overrightarrow{CA} = (a, 0, -1)$, $\overrightarrow{CB} = (0, b, -1)$ より, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 + 0 + 1 = 1$ 図

$$\text{問 2 } \cos \angle ACB = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1}}$$

$0 < \angle ACB < \pi$ より

$$\begin{aligned} \sin \angle ACB &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2 + b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1}} \quad \text{図} \end{aligned}$$

問 3 三角形 ABC の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1} \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2} \quad \text{図}$$

別解

三角形 ABC の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 |\overrightarrow{CB}|^2 - (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1) - 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2} \quad \text{図}$$

問 4 四面体 $OABC$ の体積は, $\frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot 1 = \frac{1}{6} ab$ であり,

四面体 $OABC$ の体積が 1 であるとき, $\frac{1}{6} ab = 1$ より, $b = \frac{6}{a}$ とできる。

三角形 ABC の面積を S とおくと, 問 3 より,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \cdot \frac{36}{a^2} + a^2 + \frac{36}{a^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \frac{36}{a^2} + 36}$$

$$a^2 > 0, \frac{36}{a^2} > 0 \text{ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により } a^2 + \frac{36}{a^2} \geq 2 \sqrt{a^2 \cdot \frac{36}{a^2}} = 12$$

等号成立は, a が正の実数であることから, $a^2 = \frac{36}{a^2}$ すなわち $a = \sqrt{6}$ のときである。

$$\text{よって, } S \geq \frac{1}{2} \sqrt{12+36} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ より,}$$

三角形 ABC の面積はの最小値は, $a = b = \sqrt{6}$ のとき, $2\sqrt{3}$ をとる。 図

1 関数 $f(x)$ は等式 $f'(x) = \sin x + \int_{-x}^x f(t)dt$ を満たす。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\int_{-x}^x f(t)dt = A$, $f(0) = c$ とする。 $f(x)$ を A と c を用いて表せ。

問2 $f(0) = 0$ のとき, $f(x)$ を求めよ。

解答 問1 $\int_{-x}^x f(t)dt = A$ とすると,

$$f'(x) = \sin x + A \text{ より,}$$

$$f(x) = -\cos x + Ax + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \text{---①}$$

とできる。

ここで, $f(0) = c$ より, ①で $x=0$ とすると

$$c = -1 + C \text{ すなわち } C = c + 1$$

よって,

$$f(x) = -\cos x + Ax + c + 1 \quad \text{--- 図}$$

図解

$$f'(x) = \sin x + A \text{ より,}$$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

$$= \int_0^x (\sin t + A)dt$$

$$= [-\cos t + At]_0^x$$

$$= -\cos x + Ax - (-1)$$

$$= -\cos x + Ax + 1$$

よって, $f(0) = c$ より,

$$f(x) = -\cos x + Ax + c + 1 \quad \text{--- 図}$$

問2 $f(0) = 0$ のとき, 問1の式に $c=0$ を代入すると,

$$f(x) = -\cos x + Ax + 1 \text{ とできる。}$$

これを, $\int_{-x}^x f(t)dt = A$ に代入すると,

$$\int_{-x}^x (-\cos t + At + 1)dt = A$$

$$\left[-\sin t + \frac{1}{2}At^2 + t \right]_{-x}^x = A$$

$$2x = A$$

$$f(x) = -\cos x + 2\pi x + 1 \quad \text{--- 図}$$

2 A, B, C を x の整式とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 A を B で割った商を Q , 余りを R とする。このとき, C が A と B の共通因数であるための必要十分条件は, C が B と R の共通因数であることを示せ。

問2 次の整式 A と整式 B の共通因数のうち, 次数が最大のものを求めよ。

$$A = x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 216$$

$$B = x^3 + 4x^2 - 15x + 42$$

解答 問1 A を B で割った商が Q , 余りが R なので, $A = BQ + R$ とおける。

C が A と B の共通因数であるならば, C が B と R の共通因数であることを示す。

C が A と B の共通因数であるので, $A = CD$, $B = CE$ (D, E を整式とする) とおける。

このとき, $A = BQ + R$ より,

$$CD = CEQ + R$$

$$R = C(D - EQ)$$

$D - EQ$ は整式なので, C は R の共通因数である。

仮定より, C は B の共通因数であるので, C は B と R の共通因数である。

次に, C が B と R の共通因数であるならば, C が A と B の共通因数であることを示す。

C が B と R の共通因数であるので, $B = CE$, $R = CF$ (E, F を整式とする) とおける。

このとき, $A = BQ + R$ より, $A = CEQ + CF = C(EQ + F)$

$EQ + F$ は整式なので, C は A の共通因数である。

仮定より, C は B の共通因数であるので, C は A と B の共通因数である。

以上より, C が A と B の共通因数であるための必要十分条件は, C が B と R の共通因数であることである。 

問2 A を B で割ると, 商が $x+5$, 余りが x^2-3x+6 となるので,

$$x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 216 = (x^3 + 4x^2 - 15x + 42)(x+5) + x^2 - 3x + 6$$

とできる。

ここで, $x^3 + 4x^2 - 15x + 42$ を $x^2 - 3x + 6$ で割ると商が $x+7$ であることから,

$$x^3 + 4x^2 - 15x + 42 = (x^2 - 3x + 6)(x+7)$$

となり, $R = x^2 - 3x + 6$ とおくと, B と R の共通因数 $x^2 - 3x + 6$ は,

問1より A と B の共通因数でもある。

さらに, B の次数が3であることから $x^2 - 3x + 6$ は A と B の共通因数のうち, 次数が最大のものである。 

3 複素数 z は $|z|=1$ を満たすとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 z の実部を x とする。 $z^2 + \bar{z}^2$ を x を用いて表せ。ただし、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数とする。

問2 $\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right|^2$ の最大値と最小値を求めよ。

問3 次の等式を証明せよ。

$$\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2 \right| + \left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right| = 5$$

【解答】 問1 $z = x + yi$ とすると、 $|z|=1$ より $x^2 + y^2 = 1$ であり、

$$z^2 + \bar{z}^2 = (x^2 - y^2 + 2xyi) + (x^2 - y^2 - 2xyi) = 2x^2 - 2y^2 = 2x^2 - 2(1 - x^2) = 4x^2 - 2 \quad \text{①}$$

【別解】 $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ より、 $(z + \bar{z})^2 = z^2 + \bar{z}^2 + 2$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = x \text{ より } z + \bar{z} = 2x \text{ であるから、 } z^2 + \bar{z}^2 = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2 \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \text{問2 } \left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right|^2 &= \left(\frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right) \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2z - 2 \right) \\ &= \frac{1}{4} z\bar{z} + z^2 - z + \bar{z}^2 + 4z\bar{z} - 4\bar{z} - \bar{z} - 4z + 4 \\ &= \frac{17}{4} z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 - 5(z + \bar{z}) + 4 \end{aligned}$$

ここで、 $|z|=1$ より $z\bar{z}=1$ 、問1より $z^2 + \bar{z}^2 = 4x^2 - 2$ 、 $\frac{z + \bar{z}}{2} = x$ より $z + \bar{z} = 2x$ から、

$$\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right|^2 = \frac{17}{4} + 4x^2 - 2 - 10x + 4 = 4x^2 - 10x + \frac{25}{4} = \left(2x - \frac{5}{2} \right)^2 = 4 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2$$

$|z|=1$ より $-1 \leq x \leq 1$ であるから、

$$\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right|^2 \text{ は、 } x = -1 \text{ のとき、最大値 } 4 \left(-1 - \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x = 1 \text{ のとき、最小値 } 4 \left(1 - \frac{5}{4} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{③}$$

問3 問2より、 $\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right| = \sqrt{4 \left(x - \frac{5}{4} \right)^2} = 2 \left| x - \frac{5}{4} \right|$ である。

$$\begin{aligned} \text{問2と同様に、} \left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2 \right|^2 &= \left(\frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2 \right) \left(\frac{\bar{z}}{2} + 2z + 2 \right) \\ &= \frac{1}{4} z\bar{z} + z^2 + z + \bar{z}^2 + 4z\bar{z} + 4\bar{z} + \bar{z} + 4z + 4 \\ &= \frac{17}{4} z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 5(z + \bar{z}) + 4 \\ &= \frac{17}{4} + 4x^2 - 2 + 10x + 4 \\ &= 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} = \left(2x + \frac{5}{2} \right)^2 = 4 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{より、} \left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2 \right| = \sqrt{4 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2} = 2 \left| x + \frac{5}{4} \right|$$

また、 $-1 \leq x \leq 1$ より $x + \frac{5}{4} > 0$ 、 $x - \frac{5}{4} < 0$ であるから、

$$\left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2 \right| + \left| \frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2 \right| = 2 \left| x + \frac{5}{4} \right| + 2 \left| x - \frac{5}{4} \right| = 2 \left(x + \frac{5}{4} \right) - 2 \left(x - \frac{5}{4} \right) = 5 \quad \text{④}$$

4 1 個のさいころを投げて 3 以上の目が出たら 5 点, 2 以下の目が出たら 2 点得られるゲームを行う。次の問いに答えよ。
(50 点)

問 1 さいころを 2 回投げて, 合計点が 7 点になる確率を求めよ。

問 2 さいころを 3 回投げて, 合計点が偶数になる確率を求めよ。

問 3 さいころを n 回投げて, 合計点が偶数になる確率を求めよ。

【解答】 問 1 1 個のさいころを投げて, 3 以上の目が出る確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 2 以下の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

2 回のうち, 1 回が 3 以上の目が出て, 1 回は 2 以下の目が出る確率なので, ${}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$ 図

問 2 さいころを 3 回投げて, 合計点が偶数になるのは, 得点が

(i) 3 回とも偶数

(ii) 3 回のうち, 2 回が奇数で 1 回が偶数

のいずれかの場合である。

(i) 得点が 3 回とも偶数である確率は, $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

(ii) 得点が, 3 回のうち 2 回が奇数で 1 回が偶数である確率は, ${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

(i), (ii) の事象は互いに排反であるので, 求める確率は, $\frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27}$ 図

問 3 求める確率を p_n とする。

p_1 はさいころを 1 回投げて 2 以下の目が出る確率だから, $p_1 = \frac{1}{3}$

p_{n+1} について考える。

さいころを $n+1$ 回投げて合計点が偶数になるのは, 以下の事象 A または B が起こる場合である。

A: さいころを n 回投げた時点での合計点が偶数であり, $n+1$ 回目に 2 以下の目が出る。

B: さいころを n 回投げた時点での合計点が奇数であり, $n+1$ 回目に 3 以上の目が出る。

A と B は互いに排反であるから, p_{n+1} を p_n を用いて表すと

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_n) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$$

$$\text{これを变形して } p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

よって, 数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は初項が $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, 公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから,

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

よって, 求める確率は $\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$ である。 図

問 3 の 図解

(i) n が偶数のとき, 3 以上の目が偶数回出れば良いので, 求める確率は

$${}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + {}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

である.

二項定理より,

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^n = {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \text{--- ①}$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^n = {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(-\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^0$$

より, n は偶数なので,

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^n = {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n - {}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \text{--- ②}$$

①, ②を辺々加えて, 両辺を 2 で割ることにより,

$${}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + {}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

(ii) n が奇数のとき, 3 以上の目が偶数回出れば良いので, 求める確率は

$${}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + {}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} + \cdots + {}_nC_{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

である.

二項定理より,

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^n = {}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(-\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^0$$

であるが, n は奇数なので,

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^n = -{}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad \text{--- ③}$$

(i) の式①から式③を辺々ひいて, 両辺を 2 で割ることにより,

$${}_nC_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + {}_nC_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4} + \cdots + {}_nC_{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

(i), (ii) より, さいころを n 回投げて合計点が偶数になる確率は $\frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ である. ㊟

Abstract—The purpose of this study was to determine the effect of a 10-week training program on the heart rate (HR) and energy expenditure (EE) of sedentary, middle-aged women. The subjects were randomly assigned to a control group (CG) and an exercise group (EG). The EG performed a 10-week training program consisting of three sessions per week. The CG performed no exercise. The HR and EE were measured at baseline and at the end of the 10-week training program. The HR and EE of the EG were significantly higher than those of the CG at the end of the 10-week training program. The results of this study suggest that a 10-week training program can improve the HR and EE of sedentary, middle-aged women.

[illegible]

(b)(7)(C), (b)(7)(D), (b)(7)(F), (b)(7)(G)

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

632052

$$9 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2001-2004 01

$$e = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

01212-4101-9991 03924-00 10

$$f^{(0)}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f^{(1)}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} f^{(2)}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{24} f^{(3)}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{720} f^{(4)}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{5040} f^{(5)}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

20150606 170:0236157 0430157 2301570 01

(b) (7) (C), (b) (7) (D), (b) (7) (F), (b) (7) (G)

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26

© 2004 Blackwell Publishing Ltd *Journal of Internal Medicine* 255: 105–112

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

DOI: 10.1002/for

$$e = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2 + (-1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

DECLASSIFIED BY: 38174 DATE: 02-02-2010 BY: 60322 UCBAW

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 =$$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x} \right)^2 + 3 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ as $x \rightarrow 0$, $x^2 \rightarrow 0$ and $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$. (ii)