平成30年度

第42回高校数学教育を考える会

（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

日　時：平成３０年６月６日（水）

場　所： 琉球大学研究者交流施設・50 周年記念館 1F 多目的室 AB

目次

平成 30 年度（2018）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2 問 3	数Ⅱ	積分法	易 易 標準	・問 3 では，a の値の範囲と，交点の x 座標を聞いているが配点はどのようになっているか？ ・場合分けや、解のうち一つを答える部分の配点はどのようにしたか。 ・グラフを用いて、しっかり考えることが出来ていたか？ ・医学科はできていたか？医学科以外の解答率はどうだったか。
2 問 1 問 2	数Ⅲ	複素数平面	易 標準	・どこでつまずく受験生が多かったか。 （帰納法に気付けない生徒も多かったか。） ・帰納法以外の解き方はありますか。 ・この総積$\prod_{k=1}^{n}(a_k+i)$や、a_nの式・問 2 の式に数学的な意味はありますか？
3	数Ⅲ	微分法	難	・2 回微分でつまずいた受検生が多かったと思うが、増減のみでグラフをかいた場合など配点はどのようにしたか。 ・$\cos x-\sin x=0$ を解く際、三角関数の合成などをせず，答えのみ$x=\frac{\pi}{4},-\frac{3}{4}\pi$ とした場合どのように採点したか。 ・医学科の正答率はどれくらいだったか？
4 問 1 問 2 問 3	数 A 数 B	確率 数列	易 標準 易	・説明がどれくらいできていたか？説明が足りないものや式だけのものなどはどのように採点をしたか？ ・昨年度の確率の問題よりは難易度が上がったが，正答率はどうだったか。

全体

・2の問 2 や3が難しい問題であったことをはじめ、例年に比べて難化したように感じるが，意図はあったか。

・各大問の完答率や全体的な出来はどうだったか。

・「大学入学共通テスト」の影響や、今後の二次試験に向けた考えは何かあるか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

平成30年度（2018）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問1 問2 問3	数A 数Ⅱ 数B	小問集合	易 易 易	・問1は合同式を使うことを求めたか？余りなどを利用して解答しても問題なかったか。 ・問1で「理由とともに答えよ」と書いたのには、どういう意図があったか。理由不十分としたものにはどのような解答があったか。 ・問2で真数条件が無い場合や、答えを絞れていない解答の採点基準はどのようにしたか。 ・問3で「$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a}$と$\vec{b}$は平行でないから」などの記述がない場合の減点があったか。
$\boxed{2}$ 問1 問2 問3	数Ⅱ	微分法・積分法	易 易 易	・場合分けの記述や定義域に関しての減点はあったか。 ・頂点の座標や、極大値と$x=4$ のときのyの値などの大小関係まで採点基準としたか。 ・問2の出題意図・ねらいはあるか ・問3では，$\frac{1}{6}$の公式を使っても大丈夫か？
全体 ・昨年度より易しくなったが、去年の出来が悪かったためか？また、今年の出来はどうだったか。 ・国際地球創造学部の入試で数学を選択する受検方法（数学的思考系）が新たにできたが、作問にその影響があったか。国際地球創造学部の受検生の出来はどうだったか。				

平成 30 年度（2018）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問 1 問 2	 数Ⅱ 数Ⅲ	 三角関数 微分法	 標準	・どのような解き方があったか。tan の置き方によっては、分母が 0 のときの場合分けが必要になるが，そのように解いている受検生はいたか。いたら場合分けはできていたか。 ・問 2 の最大値を求める際に、分母の次数を下げるような工夫ができていたか。
2	数Ⅲ		標準	・どのような解き方が多かったか。 ・取り組みやすい良い問題であった。
3 問 1 問 2 問 3	 数Ⅲ	 極限	 難 易 標準	・問 1 は因数分解の形にして微分するところまでどのくらいの生徒が出来ていたか。 ・中間値の定理を使う際に、連続であるからという表記を求めたか。 ・このような証明の問題が出来ていたのかは気になる。 ・問 1 が一番難しいように感じるが、各問の正答率がどうだったか。無答は多かったか。
4	数Ⅱ 数Ⅲ	軌跡と方程式 式と曲線	難	・交点の座標まで、解答に書く必要があったか。 ・原点を含まない場合など、どのような減点があったか。
全体 ・関数を扱う問題が多かったように感じたが、意識したのか。 ・関数の中でも、微分積分や証明問題、軌跡など様々な考え方を使う問題でよかった。				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

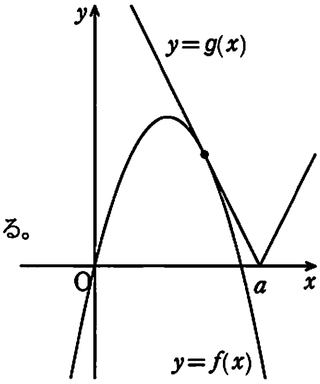
1 a を正の実数とする。関数 $f(x)=-x^2+4x$ と $g(x)=2|x-a|$ について，次の問いに答えよ。 (50点)

問1　$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフの共有点が 1 点となるような a の値を求めよ。

問2　問 1 で求めた a の値のときに，$y=f(x)$ のグラフ，$y=g(x)$ のグラフおよび x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

問3　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるような a の値の範囲と，2 つの交点の x 座標を求めよ。

解答



問1　$g(x)=2|x-a|=\begin{cases}2x-2a\ (x\geqq a)\\ -2x+2a\ (x<a)\end{cases}$ より，

$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフの共有点が 1 点となるのは，$a>0$より

右図のように 2 つのグラフが接するときである。　※

$g(x)$ の式から，$f(x)$ のグラフの接線のうち，傾きが-2であるものについて考える。

$f'(x)=-2x+4$ より，$f'(t)=-2$ となるのは $t=3$ のときである。

$f(3)=-3^2+4\cdot3=3$ より，接点の座標は $(3,3)$ となる。

$g(x)=-2x+2a\ (x<a)$ が点 $(3,3)$ を通るときの a の値を考えると，

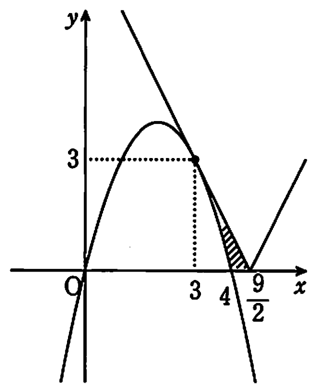
$3=-2\cdot3+2a$ より，$a=\dfrac{9}{2}$　答

別解 (※以降)　$-x^2+4x=-2x+2a$　を解く。

式変形をすると，$x^2+6x+2a=0$となり，

この二次方程式が重解を持つときのaの値を求めると，

$\dfrac{D}{4}=9-2a=0$より，$a=\dfrac{9}{2}$　答



問2　$f(x)=0$ のとき，$x=0,4$ である。右図から，求める面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{9}{2}-3\right)\cdot3-\displaystyle\int_3^4(-x^2+4x)dx=\dfrac{9}{4}-\left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4=\dfrac{7}{12}$　答

問3　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は，

問 1 で求めた a の値を考えると，$0<a<\dfrac{9}{2}$

次に，2 つの交点の x 座標について考える。

i)　$0<a<4$ のとき

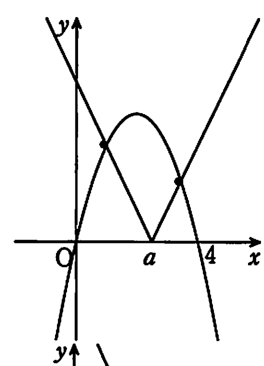
求める 2 つの x 座標は，$-x^2+4x=-2x+2a$ の解の小さい方と，

$-x^2+4x=2x-2a$ の解の大きい方である。

$-x^2+4x=-2x+2a$ を解くと，$x^2-6x+2a=0$ より $x=3\pm\sqrt{9-2a}$

$-x^2+4x=2x-2a$ を解くと，$x^2-2x-2a=0$ より $x=1\pm\sqrt{1+2a}$

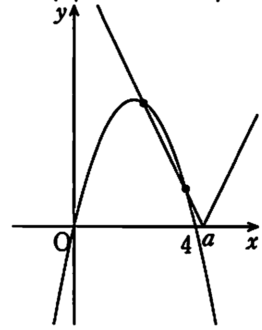
よって，2 つの交点の x 座標は $x=3-\sqrt{9-2a}$，$1+\sqrt{1+2a}$



ii)　$4\leqq a<\dfrac{9}{2}$ のとき

求める 2 つの x 座標は，$-x^2+4x=-2x+2a$の 2 つの解である。

よって，$x=3\pm\sqrt{9-2a}$



i)，ii)より，求める 2 つの交点の x 座標は

$0<a<4$ のとき $x=3-\sqrt{9-2a}$，$1-\sqrt{1+2a}$

$4\leqq a<\dfrac{9}{2}$ のとき $x=3\pm\sqrt{9-2a}$　答

2 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$a_n=n^2+n+1$ とおく。さらに，実数 x_n，y_n を，

$$(a_1+i)(a_2+i)(a_3+i)\cdots(a_n+i)=x_n+y_n i \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　x_2，y_2 および x_3，y_3 を求めよ。

問2　自然数 n に対して，$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つことを示せ。

解答

問1　$a_1=1^2+1+1=3$, $a_2=2^2+2+1=7$, $a_3=3^2+3+1=13$ より，

$x_2+y_2 i=(a_1+i)(a_2+i)=(3+i)(7+i)=20+10i$ である。したがって　$x_2=20$，$y_2=10$　答

$x_3+y_3 i=(a_1+i)(a_2+i)(a_3+i)=\{(3+i)(7+i)\}(13+i)=(20+10i)(13+i)=250+150i$

より，$x_3=250$，$y_3=150$　答

問2　$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ … (*) とする。これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$x_1+y_1 i=a_1+i=3+i$ より $x_1=3$, $y_1=1$

$\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{1+2}$ より，$n=1$ のとき (*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ で (*) が成り立つと仮定する。

すなわち，　$\dfrac{y_k}{x_k}=\dfrac{k}{k+2}$ … ① が成り立つと仮定する。

このとき，

$$\begin{aligned} x_{k+1}+y_{k+1}i &= (x_k+y_k i)(a_{k+1}+i) \\ &= (x_k+y_k i)\{(k+1)^2+(k+1)+1+i\} \\ &= \{x_k(k^2+3k+3)-y_k\}+\{x_k+y_k(k^2+3k+3)\}i \end{aligned}$$

より，$x_{k+1}=x_k(k^2+3k+3)-y_k$, $y_{k+1}=x_k+y_k(k^2+3k+3)$ … ② と表される。

ここで，①より $y_k=\dfrac{k}{k+2}x_k$ だから，

$$x_{k+1}=x_k(k^2+3k+3)-y_k=x_k(k^2+3k+3)-\frac{k}{k+2}x_k=\frac{k^3+5k+8k+6}{k+2}x_k$$

①より $x_k \fallingdotseq 0$ であり，k は自然数なので $k^3+5k^2+8k+6 \fallingdotseq 0$ であるから $x_{k+1} \fallingdotseq 0$ である。

よって，②より

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{x_k+y_k(k^2+3k+3)}{x_k(k^2+3k+3)-y_k}=\frac{x_k+\dfrac{kx_k}{k+2}(k^2+3k+3)}{x_k(k^2+3k+3)-\dfrac{k}{k+2}x_k}=\frac{x_k(k+2)+x_k k(k^2+3k+3)}{x_k(k^2+3k+3)(k+2)-kx_k}$$

$$=\frac{(k^3+3k^2+4k+2)x_k}{(k^3+5k^2+8k+6)x_k}=\frac{(k+1)(k^2+2k+2)x_k}{(k+3)(k^2+2k+2)x_k}=\frac{k+1}{k+3}=\frac{k+1}{(k+1)+2}$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ。

したがって，(i),(ii) より，すべての自然数 n において，$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つ。　答

(ii) の 別解

(ii) $n=k$ で (*) が成り立つと仮定する。

すなわち, $\dfrac{y_k}{x_k}=\dfrac{k}{k+2}$ … ① が成り立つと仮定する。

このとき, 実数 m (ただし, $m\fallingdotseq 0$) を用いて,

$$x_k=(k+2)m\ ,\ y_k=km$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned}x_{k+1}+y_{k+1}i&=(x_k+y_ki)(a_{k+1}+i)\\&=\{(k+2)m+kmi\}\{(k+1)^2+(k+1)+1+i\}\\&=\{(k+2)m+kmi\}\{(k^2+3k+3)+i\}\\&=(k^3+5k^2+8k+6)m+(k^3+3k^2+4k+2)mi\end{aligned}$$

$x_{k+1}=(k^3+5k^2+8k+6)m$, $y_{k+1}=(k^3+3k^2+4k+2)m$

と表される。いま, k は自然数なので, $(k^3+5k^2+8k+6)m\fallingdotseq 0$ だから

$$\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{(k^3+3k^2+4k+2)m}{(k^3+5k^2+8k+6)m}\ \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}=\frac{(k+1)(k^2+2k+2)m}{(k+3)(k^2+2k+2)m}=\frac{(k+1)}{k+3}=\frac{k+1}{(k+1)+2}$$

よって, $n=k+1$ のときも (*) は成り立つ。

したがって, (i) , (ii) より, すべての自然数 n において, $\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つ。 圏

$\boxed{3}$ 関数 $y=e^{\sin x+\cos x}\,(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ の増減，極値，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。（50点）

解答

$f(x)=e^{\sin x+\cos x}$ とする。

$f'(x)=e^{\sin x+\cos x}(\sin x+\cos x)'=e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)$

$\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$f'(x)=-\sqrt{2}\,e^{\sin x+\cos x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f'(x)=0$ のとき，$e^{\sin x+\cos x}>0$ より $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき $-\dfrac{5}{4}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，$f'(x)=0$ の解は $x-\dfrac{\pi}{4}=-\pi,\ 0$ より $x=-\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{\pi}{4}$

また，$f''(x)=(e^{\sin x+\cos x})'(\cos x-\sin x)+e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)'$

$$
\begin{aligned}
&=e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)^2+e^{\sin x+\cos x}(-\sin x-\cos x)\\
&=e^{\sin x+\cos x}\{(\cos x-\sin x)^2+(-\sin x-\cos x)\}\\
&=e^{\sin x+\cos x}(1-2\sin x\cos x-\sin x-\cos x)
\end{aligned}
$$

$f''(x)=0$ のとき，$e^{\sin x+\cos x}>0$ より $1-2\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0$ … ①

ここで，$\sin x+\cos x=p$ とするとき，両辺を 2 乗して整理すると $2\sin x\cos x=p^2-1$ であるから，

方程式①を p で表すと　　$1-(p^2-1)-p=0$

これを整理すると　$p^2+p-2=0$　すなわち　$(p+2)(p-1)=0$ より，$p=-2,1$

ゆえに，$\sin x+\cos x=-2$ または $\sin x+\cos x=1$

いま，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，$-\sqrt{2}\leqq\sin x+\cos x\leqq\sqrt{2}$ より $\sin x+\cos x\neq-2$

$\sin x+\cos x=1$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ より $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

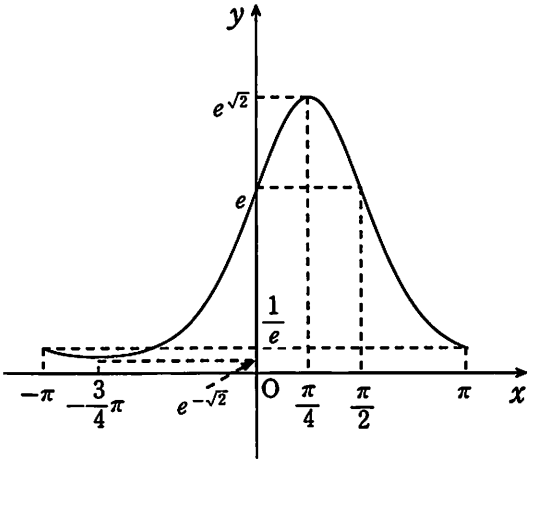
$-\pi\leqq x\leqq\pi$ より $-\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ であるから，この方程式の解は $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi$ より $x=0,\dfrac{\pi}{2}$

よって，関数 $y=f(x)$ の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	$\frac{1}{e}$

よって，極大値は $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $e^{\sqrt{2}}$，極小値は $x=-\dfrac{3}{4}\pi$ のとき $e^{-\sqrt{2}}$ をとる。

また，関数 $y=f(x)$ のグラフは次の実線のようになる。 **図**



別解

$f(x)=e^{\sin x+\cos x}$ とする。$f(x)=e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ より

$f'(x)=e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\times\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}'=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ である。

$f'(x)=0$ とするとき，$e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0$ より，$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ すなわち $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき $-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，$f'(x)=0$ の解は $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ より，$x=-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4}$

また，$f''(x)=\sqrt{2}\left\{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}'\times e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\left\{e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right\}'$

$$=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\left\{-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\qquad\cdots\cdots※$$

$$=-e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\left\{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right\}$$

$$=-e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right\}\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right\}$$

$f''(x)=0$ とするとき，$e^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}>0$ より，$\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right\}\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right\}=0$ であるから，

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ または $-\sqrt{2}$

ここで，$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ より，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq-\sqrt{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ より $-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，

この方程式の解は $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$ より，$x=0,\frac{\pi}{2}$

よって，関数 $y=f(x)$ の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。

ー以下，解答と同様ー

参考

解答の

$f''(x)=(e^{\sin x+\cos x})'(\cos x-\sin x)+e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)'$

$\quad=e^{\sin x+\cos x}(\cos x-\sin x)^2+e^{\sin x+\cos x}(-\sin x-\cos x)$

$\quad=e^{\sin x+\cos x}\{(\cos x-\sin x)^2-(\sin x+\cos x)\}$

において，

$\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right\}=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

としても，

$f''(x)=e^{\sin x+\cos x}\left\{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

となり，別解の※印と同じ結果が得られ，別解と同様に解くことが出来る。

注

解答，別解ともに$f'(x)$，$f''(x)$の値の符号を調べる記述をする際には，下記のようになる。

解答

$f'(x)>0$ となるのは，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$ のときであり，

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき$-\frac{5}{4}\pi\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$であるから，この不等式の解は$-\pi<x-\frac{\pi}{4}<0$ より $-\frac{3}{4}\pi<x<\frac{\pi}{4}$

$f''(x)>0$ となるのは，$1-2\sin x\cos x-\sin x-\cos x>0$ すなわち$-p^2-p+2>0$ のときである。

これを解くと，$-2<p<1$ であるから $-2<\sin x+\cos x<1$ より，$-\sqrt{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき$-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$であるから，この不等式を満たす$x$の値の範囲は，

$-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ または $\frac{3}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$　すなわち $-\pi\leqq x<0$ または$\frac{\pi}{2}<x\leqq\pi$ である。

別解

$f'(x)>0$ となるのは，$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$ のときであり，

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき$-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，この不等式の解は$-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ より，$-\frac{3}{4}\pi<x<\frac{\pi}{4}$

$f''(x)>0$ となるのは$\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right\}\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right\}<0$のときである。

すべての実数xにおいて$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2>0$ であるから，

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1<0$ すなわち$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たすxを求めればよい。

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき$-\frac{3}{4}\pi\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，この不等式の解は

$-\frac{3}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ または$\frac{3}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi$　すなわち　$-\pi<x<0$または$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ である。

$\boxed{4}$ 2つの箱A，Bがあり，どちらの箱にも赤玉と白玉が1個ずつ入っている。
それぞれの箱から，無作為に玉を1個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す。
n 回の操作の後，箱A，Bのどちらにも赤玉，白玉が1個ずつ入っている確率を p_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_1，p_2 を求めよ。

問2　p_n を用いて p_{n+1} を表せ。

問3　自然数 n に対して，p_n を求めよ。

解答　A，B の箱に入っている玉をそれぞれ A(○，△)，B(●，▲) で表すものとする。
例えば，A の箱に赤玉，白玉が1個ずつ入っている場合は，A(R,W) と表す。
このとき，A，B の箱に入っている玉の色の推移と確率は，次のようになる。ただし，［ ］内が確率である。

A(R,W), B(R,W) $\xrightarrow{(i)}$ A(R,W), B(R,W) $\left[2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$　A から赤玉，B から赤玉を取り出すとき，または A から白玉，B から白玉を取り出すとき

A(R,W), B(R,W) $\xrightarrow{(ii)}$ A(R,R), B(W,W) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$　A から白玉，B から赤玉を取り出すとき

A(R,W), B(R,W) $\xrightarrow{(iii)}$ A(W,W), B(R,R) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]$　A から赤玉，B から白玉を取り出すとき

A(R,R), B(W,W) $\xrightarrow{(iv)}$ A(R,W), B(R,W) [1]　　A(W,W), B(R,R) $\xrightarrow{(v)}$ A(R,W), B(R,W) [1]

問1　上の推移より，1 回の操作後に A，B のどちらにも赤玉，白玉が入っているのは，(i) のときだから

$$p_1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\quad 答$$

2回の操作後に A，B のどちらにも赤玉，白玉が入っているのは，$(i)\to(i)$，$(ii)\to(iv)$，$(iii)\to(v)$ のときだから

$$p_2=\left[\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1\right\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\quad 答$$

問2　上の推移より

(I) n 回目の操作終了後 A(R,W)，B(R,W) のとき，$(n+1)$ 回目で A(R,W)，B(R,W) となるときの確率は，

(i) のときを考えて，$p_n\times\left\{2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}=\dfrac{1}{2}p_n$

(II) n 回目の操作終了後 A(R,R)，B(W,W) または A(W,W)，B(R,R) のとき，$(n+1)$ 回目で

A(R,W)，B(R,W) となるときの確率は，$(ii)\to(iv)$，$(iii)\to(v)$ のときを考えて $(1-p_n)\times1=1-p_n$

よって，これらは互いに排反だから $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+(1-p_n)$　すなわち　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+1$　答

問3　問2より　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+1$　これを変形して，$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$

ここで，数列 $\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項が $p_1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$p_n-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　これを変形すると，　$p_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　答

別解　問2より $p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(p_1-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

よって，$n\geqq2$のとき，$p_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　これは，$n=1$のときも成り立つ。答

1 次の問いに答えよ。 (50点)

問1　今日は日曜日で，10 日後は水曜日である。100 日後および100 万日後はそれぞれ何曜日か。理由とともに答えよ。

問2　xの方程式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=1$ を解け。

問3　三角形OABで，辺OAを2 : 1に内分する点をL，辺OBの中点をM，辺ABを2 : 3に内分する点をNとする。線分LMとONの交点をPとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　問1　今日は日曜日で，$10=7\times1+3$ より 10 日後は水曜日である。

同様に，x 日後の曜日を考えるとき、xを7で割ったときの余りが0，1，2，…のとき，

それぞれ日曜日，月曜日，火曜日，… となる。 ※

したがって，合同式を用いて，100 と 100 万を 7 で割った余りを求めると，

$100=10^2\equiv3^2=9\equiv2 \pmod 7$ より，100 日後は火曜日，

$1000000=100^3\equiv2^3=8\equiv1 \pmod 7$ より，100 万日後は月曜日である。　答

別解　※以降　　$100=7\times14+2$ より，100 日後は火曜日，

$1000000=7\times142857+1$ より，100 万日後は月曜日である。　答

問2　真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $x-4>0$　すなわち　$x>4$　……①

方程式を変形すると，$\log_2(x-1)(x-4)=1$　よって　$(x-1)(x-4)=2$

式を整理すると，$x^2-5x+2=0$　となり，①より　$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$　答

問3　点Nは辺ABを2 : 3に内分する点なので，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

点Pは直線ON上にあるので，実数kを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{3}{5}k\vec{a}+\dfrac{2}{5}k\vec{b}$　…①　とできる。

また，LP : PM $=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{2}{3}(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}$　…②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，

①，②より　$\dfrac{3}{5}k=\dfrac{2}{3}(1-t)$，　$\dfrac{2}{5}k=\dfrac{1}{2}t$

これを解くと $k=\dfrac{10}{17}$ となり，①より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{6}{17}\vec{a}+\dfrac{4}{17}\vec{b}$　答

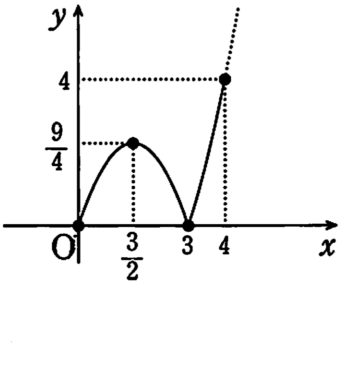
2 関数 $f(x)=x|x-3|\,(0\leqq x\leqq4)$ について，次の問いに答えよ。 (50点)

問1　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

問2　微分係数 $y=f'(2)$ の値を求めよ。

問3　定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$ の値を求めよ。

解答　問1　$f(x)=\begin{cases}-x(x-3) & (0\leqq x\leqq3)\\ x(x-3) & (3<x\leqq4)\end{cases}$　より，グラフは右のようになる。答



問2　$f'(x)=\begin{cases}-2x+3 & (0<x<3)\\ 2x-3 & (3<x<4)\end{cases}$　より，$f'(2)=-2\cdot2+3=-1$　答

問3　$\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=\int_0^3\{-x(x-3)\}dx+\int_3^4 x(x-3)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=\frac{19}{3}$　答

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正方形ABCDについて，辺ADの中点をEとする。辺AB上に点Pをとり，線分APの長さをxとおく。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　xを用いて$\tan\angle EPC$を表せ。

問2　点Pが辺AB上を動くとき，$\tan\angle EPC$の最大値と最小値を求めよ。

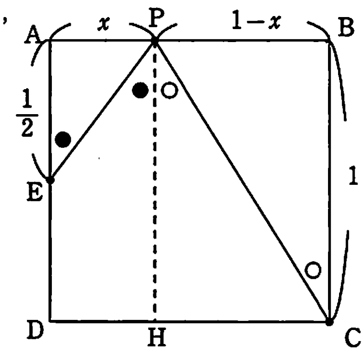
解答

問1　点Pから辺CDに垂線を引き，辺CDとの交点を点Hとすると，

$\angle EPC = \angle EPH + \angle HPC = \angle AEP + \angle BCP$

である。よって，

$$\tan\angle EPC = \tan(\angle AEP + \angle BCP) = \frac{\tan\angle AEP + \tan\angle BCP}{1-\tan\angle AEP\cdot\tan\angle BCP} = \frac{2x+(1-x)}{1-2x(1-x)} = \frac{x+1}{2x^2-2x+1}$$ 答

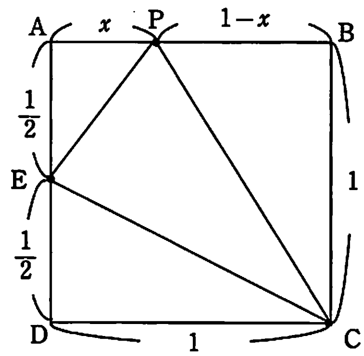


別解

三平方の定理より，$PE^2 = x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+\frac{1}{4}$，

$PC^2 = (1-x)^2+1 = x^2-2x+2$，$CE^2 = 1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$$\tan^2\angle EPC = \frac{\sin^2\angle EPC}{\cos^2\angle EPC} = \frac{1-\cos^2\angle EPC}{\cos^2\angle EPC} = \frac{1}{\cos^2\angle EPC}-1$$



ここで余弦定理より，$\cos\angle EPC = \frac{PE^2+PC^2-CE^2}{2\cdot PE\cdot PC} = \frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+(x^2-2x+2)-\frac{5}{4}}{2\cdot PE\cdot PC} = \frac{2x^2-2x+1}{2\cdot PE\cdot PC}$

であるから，$\tan^2\angle EPC = \frac{4\cdot PE^2\cdot PC^2}{(2x^2-2x+1)^2}-1 = \frac{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(x^2-2x+2)}{(2x^2-2x+1)^2}-1 = \frac{(x+1)^2}{(2x^2-2x+1)^2}$

$0\leqq x\leqq 1$ より $x+1\geqq 0$，$2x^2-2x+1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ であるから，$\tan\angle EPC = \frac{x+1}{2x^2-2x+1}$ 答

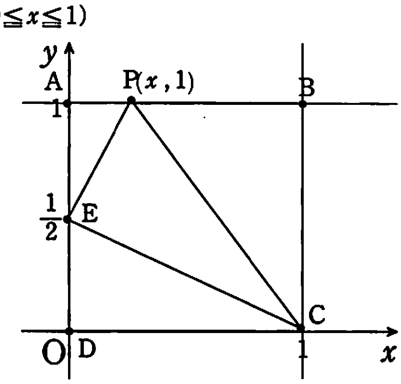
参考

図のように，正方形ABCDを座標平面上に点Dを原点に，辺DC，ADをそれぞれx軸，y軸上にくるように考える。このとき，それぞれの点の座標は次のように表すことができる。

$A(0,1)$，$B(1,1)$，$C(1,0)$，$D(0,0)$，$E\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$P(x,1)$ (ただし，$0\leqq x\leqq 1$)

いま，$\overrightarrow{PE} = \left(-x, -\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PC} = (1-x, -1)$より，

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PC} = x^2-x+\frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{PE}|^2 = x^2+\frac{1}{4}$，$|\overrightarrow{PC}|^2 = x^2-2x+2$



よって，$\cos^2\angle EPC = \frac{(\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PC})^2}{|\overrightarrow{PE}|^2|\overrightarrow{PC}|^2} = \frac{\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(x^2-2x+2)}$

$$= \frac{(2x^2-2x+1)^2}{(4x^2+1)(x^2-2x+2)}$$

となり別解と同じ結果が得られる。

問2　$f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-2x+1}\ (0\leqq x\leqq 1)$ とすると，

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(2x^2-2x+1)-(x+1)\cdot(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2}=\dfrac{-2x^2-4x+3}{(2x^2-2x+1)^2}$ である。

$f'(x)=0$ のとき，$0\leqq x\leqq 1$ より，$x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ であり，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	2

以上より，$\tan\angle EPC$ は，$x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$，$x=0$ のとき最小値 1 をとる。 答

参考

$x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ のときの最大値を求める際に，$f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-2x+1}$ に直接代入してもいいが，

$x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは，$-2x^2-4x+3=0$ より，$2x^2+4x-3=0$ であるから，

$$f(x)=\frac{x+1}{2x^2-2x+1}=\frac{x+1}{2x^2+4x-3-6x+4}=\frac{\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}+1}{-6\cdot\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}+4}=\frac{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}{10-3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{1}{10-3\sqrt{10}}$$

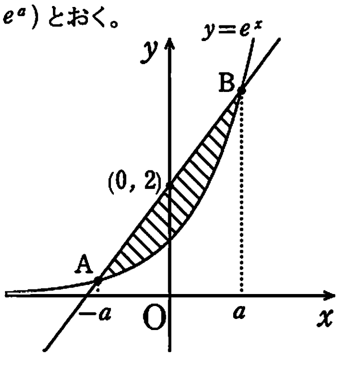
$$=\frac{1}{2(\sqrt{10}-3)}=\frac{3+\sqrt{10}}{2}$$

という計算もできる。

2　座標平面上において，曲線 $y=e^x$ 上の2点A，Bを結ぶ線分の中点が$(0,\ 2)$であるとする。このとき，線分ABと曲線 $y=e^x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。（50点）

解答

線分ABの中点が y 軸上にあるので，$a>0$ として，$A(-a,e^{-a})$，$B(a,e^a)$ とおく。



このとき，$\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}=2$ より，$e^{2a}-4e^a+1=0$ である。

$a>0$ より，$e^a=2+\sqrt{3}$ であるから，$a=\log(2+\sqrt{3})$

よって，線分ABと曲線 $y=e^x$ で囲まれた部分の面積は,

$$\frac{(e^a+e^{-a})\times 2a}{2}-\int_{-a}^{a}e^x dx=4\log(2+\sqrt{3})-\Big[e^x\Big]_{-a}^{a}$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-\left\{(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right\}$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\}$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$ 答

別解

2点A，Bの座標をそれぞれ$A(a,e^a)$，$B(b,e^b)$　$(a<b)$　とする。

線分ABの中点が点$(0,2)$であることから　$\dfrac{a+b}{2}=0$　…①　，$\dfrac{e^a+e^b}{2}=2$　…②

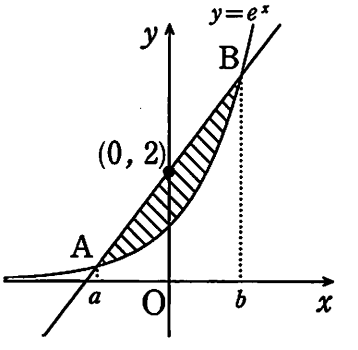
①より　$b=-a$　だから　$e^ae^b=e^ae^{-a}=1$　…③

また，②より　$e^a+e^b=4$　…④

③，④より e^a，e^b は2次方程式　$t^2-4t+1=0$　の解であり，これを解くと　$t=2\pm\sqrt{3}$

$a<b$ より $e^a<e^b$ だから　$e^a=2-\sqrt{3}$，$e^b=2+\sqrt{3}$

よって　　$a=\log(2-\sqrt{3})$，$b=\log(2+\sqrt{3})$



また，直線ABは点$(0,2)$を通り，傾きが$\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$の直線だから,

直線ABの方程式は　$y-2=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}(x-0)$

すなわち　$y=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}x+2$

よって，求める面積を S とすると　　$S=\displaystyle\int_a^b\left\{\left(\frac{e^b-e^a}{b-a}x+2\right)-e^x\right\}dx$

ここで $a=-b$ であることと $y=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}x$ が奇関数であることから,

$$\int_a^b\frac{e^b-e^a}{b-a}x\,dx=\int_{-b}^{b}\frac{e^b-e^a}{b-a}x\,dx=0$$

よって，$S=\displaystyle\int_a^b(2-e^x)dx$

$$=2\Big[x\Big]_a^b-\Big[e^x\Big]_a^b$$

$$=2(b-a)-(e^b-e^a)$$

$$=2\{b-(-b)\}-(e^b-e^a)$$

$$=2\cdot 2b-e^b+e^a$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$ 答

3 $f(x)$ は4次の整式で x^4 の係数は1であるとする。次の問いに答えよ。（50点）

問1　方程式 $f(x)=0$ が4個の異なる実数解をもつとき，方程式 $f'(x)=0$ は3個の異なる実数解をもつことを示せ。

問2　$f(x)$ が $f'(0)=f''(0)=0$ を満たすならば，方程式 $f'(x)=0$ の異なる実数解は2個以下であることを示せ。

問3　方程式 $f(x)=0$ が3重解をもち，$f'(0)=f''(0)=0$ ならば $f(0)=0$ であることを示せ。

解答

問1　$f(x)=0$ の4個の異なる実数解を小さい順に a_1，a_2，a_3，a_4 とすると，

$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$

と表せる。このとき，

$f'(x)=(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$

となる。

ここで，a_1，a_2，a_3，a_4 の大小関係から

$f'(a_1)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)<0$

$f'(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)>0$

$f'(a_3)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)<0$

$f'(a_4)=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)>0$

となる。

$f'(x)$ は3次の整式であり，すべての実数の範囲で連続であるから，中間値の定理より，

$a_1<x_1<a_2$，$a_2<x_2<a_3$，$a_3<x_3<a_4$ を満たす，$f'(x)=0$ の実数解 x_1，x_2，x_3 が存在する。

したがって，方程式 $f(x)=0$ が4個の異なる実数解をもつとき，方程式 $f'(x)=0$ は3個の異なる実数解をもつ。

終

問2　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=12x^2+6ax+2b$

となる。

$f'(0)=f''(0)=0$ より，$c=b=0$

$f'(x)=4x^3+3ax^2=4x^2\left(x+\dfrac{3}{4}a\right)$

となり，$f'(x)=0$ の実数解は，$a=0$ のとき $x=0$，$a\neq 0$ のとき $x=0$，$-\dfrac{3}{4}a$ である。

したがって，$f(x)$ が $f'(0)=f''(0)=0$ を満たすならば，方程式 $f'(x)=0$ の異なる実数解は2個以下である。終

問3　$f(x)=(x-p)^3(x-q)$ とおくと，

$f'(x)=3(x-p)^2(x-q)+(x-p)^3=(x-p)^2(4x-p-3q)$

$f''(x)=2(x-p)(4x-p-3q)+4(x-p)^2=(x-p)(12x-6p-6q)=6(x-p)(2x-p-q)$

となる。

$f'(0)=f''(0)=0$ より，$p^2(p+3q)=0$ かつ $p(p+q)=0$ である。

$p\neq 0$ のとき，$p+3q=0$ かつ $p+q=0$ となるが，この連立方程式の解は $p=q=0$ となり $p\neq 0$ に矛盾する。

よって，$p=0$ である。$p=0$ のとき，$f(x)=x^3(x-q)$ となり，$f(0)=0$ である。

したがって，方程式 $f(x)=0$ が3重解をもち，$f'(0)=f''(0)=0$ ならば $f(0)=0$ である。終

4 不等式 $-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$ が表す座標平面内の領域をＤとする。原点Ｏを通る円Ｃを考える。円ＣがＤに含まれるという条件のもとで円の中心Ｐが動く範囲を図示せよ。（50点）

解答 $\mathrm{P}(X,Y)$ とすると $\mathrm{OP}=\sqrt{X^2+Y^2}$ であり，これが円 C の半径となる。

ただし，円 C が存在するためには，点Ｐは原点と一致してはならないので

$(X,Y)\neq(0,0)$

いま，A(1 1)，B(-1，1)，C(-1，-1)，D(1，-1) とすると，

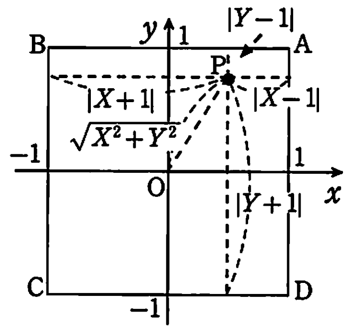
点Ｐと線分 AB，BC，CD，DA との距離はそれぞれ

$|Y-1|$，$|X+1|$，$|Y+1|$，$|X-1|$

となるので，題意を満たすためには４つの不等式

$\mathrm{OP}\leqq|Y-1|$，$\mathrm{OP}\leqq|X+1|$，$\mathrm{OP}\leqq|Y+1|$，$\mathrm{OP}\leqq|X-1|$

すなわち，



$\sqrt{X^2+Y^2}\leqq|Y-1|$，$\sqrt{X^2+Y^2}\leqq|X+1|$，$\sqrt{X^2+Y^2}\leqq|Y+1|$，$\sqrt{X^2+Y^2}\leqq|X-1|$

を同時に満たさなくてはならない。

よって，各式とも両辺ともに正だから２乗して整理すると，

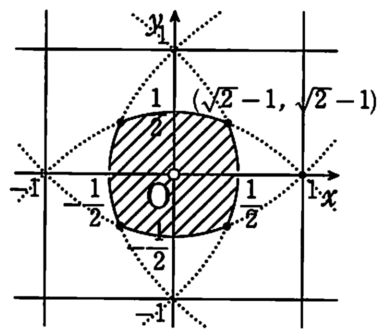
点 $\mathrm{P}(X,Y)$ の満たす式は

$X\leqq-\dfrac{Y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$，$X\geqq\dfrac{Y^2}{2}-\dfrac{1}{2}$，$Y\leqq-\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{1}{2}$，$Y\geqq\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}$

（ただし，原点を除く）

したがって，点Ｐが動く範囲は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含み，原点は含まない。



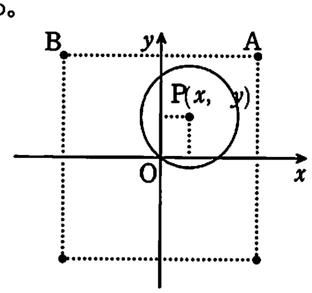
別解 $\mathrm{P}(X,Y)$，A(1 1)，B(-1，1)とおく。$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Y\geqq X$ のときを考える。

$\mathrm{OP}=\sqrt{X^2+Y^2}$ であり，点Ｐから線分 AB までの距離は $1-Y$ より，

円ＣがＤに含まれるのは，　$1-Y\geqq\sqrt{X^2+Y^2}$ …①　のときである。

$1-Y\geqq0$，$\sqrt{X^2+Y^2}\geqq0$ より，①の両辺を２乗すると，$(1-Y)^2\geqq X^2+Y^2$

この式を整理すると，$Y\leqq-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2}$



$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$X\geqq Y$ のときも同様に考えると，$X\leqq-\dfrac{1}{2}Y^2+\dfrac{1}{2}$

第２象限，第３象限，第４象限のときも同様に考えることができる。点Ｐが動く範囲は、上の解答と同じである。

別解 $\mathrm{P}(X,Y)$ とおく。$0\leqq X<1$ かつ $0\leqq Y<1$ の場合について，円Ｃの半径を r ($r>0$) とすると，

円Ｃは原点Ｏを通るから　$X^2+Y^2=r^2$…①　　ここで，$r>0$ により　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

また，円Ｃが領域Ｄに含まれることから　$X+r\leqq1$，$Y+r\leqq1$　すなわち　$r\leqq1-X$，$r\leqq1-Y$

$r>0$，$1-X>0$，$1-Y>0$ から，それぞれ各辺を２乗して　　$r^2\leqq(1-X)^2$　…②　，$r^2\leqq(1-Y)^2$　…③

①を②に代入して　$X^2+Y^2\leqq(1-X)^2$　より　$Y^2\leqq1-2X$　したがって　$X\leqq-\dfrac{1}{2}Y^2+\dfrac{1}{2}$　…④

同様に，①を③に代入して整理すると　$Y\leqq-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2}$　…⑤

$-1<X\leqq0$ かつ $0\leqq Y<1$ の場合，$-1<X\leqq0$ かつ $-1<Y\leqq0$ の場合，$0\leqq X<1$ かつ $-1<Y\leqq0$ の場合も，対称性によりそれぞれ同様に考えても良い。点Ｐが動く範囲は、上の解答と同じである。

参考　２つの別解は対称性を利用しているが、１つ目の解答は，対称性を利用せずに答えを求めた解答である。