令和元年度

第43回高校数学教育を考える会

（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

日時　：　令和元年６月２７日(木)

場　所：　琉球大学研究者交流施設・５０周年記念館１F多目的室AB

目次

平成３１年度　　琉球大学入試試験問題についての感想と質問

（　高数教　　大学入試問題検討委員会　）

平成３０年度　　琉球大学入試問題　　解答例

（　高数教　　大学入試問題検討委員会　）

平成31年度（2019）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	微分法 ・ 積分法	やや易 標準 やや難	・問2は，部分積分を2回する答案も多かったか。問3なども，前の問を誘導として利用することができていたか。 ・問2は積分定数が無いものや，どちらも同じCとしたのはどう採点しましたか。
$\boxed{2}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	微分法 ・ 積分法	標準 標準 標準	・問1で増減表を書く際，$f'(x)$ の符号の根拠の記述を求めたか。 ・問1の $f(a)$ は最も簡単な形まで求めることができていたか。$\log\sqrt{e}$ が残っているものなどはどう採点したか。 ・問1や問3の答えで a を用いたものもあったか。もし，あったらどのように採点したか。
$\boxed{3}$ 問1 問2 問3 問4	数Ⅱ 数B 数B 数Ⅲ	対数関数 数列 数列 極限	やや易 標準 標準 標準	・問2では特性方程式を使ったものや，「このように式変形できる」という書き方をしているものについてはどのように採点しましたか。
$\boxed{4}$ 問1 問2 問3 問4	数A	確率	標準 やや難 難 難	・樹形図を書く解答や文章で書いていく解答など，どのような書き方が多かったですか。 ・問1や問2に3つずつ問題がありますが，配点はどのようになっていますか。 ・難しかったと感じますが，受検生の出来はどうでしたか。
全体	・各大問で誘導が丁寧だったと思います。誘導に乗れるかで時間に大きな差がでたり，前半で引っかかったら後半ができなくなるのではないかと感じました。採点者側の感想としてはどうでしたか？ ・これはできてほしかったという問題はありますか。 ・甲の全体的な感想や，高校で強化してほしい点などはありますか。			

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

平成31年度（2019）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$				
問1	数A	整数の性質	やや易	・記述ができていたか。記述の許容はどれくらいしたか。 ・問1で「互いに素」などの表現がしっかりできていたか ・問1・2は整数の問題であったが，出来はどうだったか
問2	数A	整数の性質	難	・問2では，5の倍数と6の倍数などに分けて考えることが出来ていたか。 ・問2で，5で割ったときの余りによって場合分けをした後，その場合ごとの部分点はあったか。 ・問2は，合同式や帰納法，その他の解答などはあったか ・受検生は，どのような解き方が多かったか気になる。
問3	数II	三角関数	易	・問3は弧度法で答えを書いた場合，減点があったか。 ・$\boxed{1}$の全体の配点(50点をどのように分けているか)が知りたい。
$\boxed{2}$				
問1	数II	図形と方程式	標準	・問1で，aに1と2を代入して答えを出したような答案があったか。あった場合はどのように採点したか。
問2		図形と方程式	標準	・判別式を利用する前に，$2a+1\neq 0$ を記述していない場合の減点はあったか。
問3		積分法	標準	・直線と放物線で囲まれた面積を求める公式 ($\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$) を使った解答で気になった記述や減点はありましたか。

全体

・整数の問題が2問ありましたが，受検生の出来や採点者側の感想はどうでしたか。
・どの問題ができていたか，できていなかったかについてはどうでしたか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

平成31年度（2019）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	微分法	易 標準 標準	・問2のグラフを書く際，極限の記述がないものは減点対象としましたか。 ・$x \to \infty$のときの漸近線について考えている生徒はいたか。
$\boxed{2}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	積分法	易 標準 標準	・問3では，問2の結果を使う時に，$n \geqq 2$という仮定や$n=1$のときも成り立つという記述がないものに減点はあったか。 ・階乗を使わずに，「…」を使ったものも許容としたか。
$\boxed{3}$ 問1 問2 問3	数Ⅲ	複素数平面	標準 標準 やや難	・問1は別解等がありますか（図形・複素数平面・三角関数等を用いたもの） ・問1は，$a \neq 1$ の記述がないものは認めたか。 ・問3では，虚部の正負の判断をしっかりできていたか。
$\boxed{4}$ 問1 問2 問3 問4	数B	平面ベクトル	易 易 易 標準	・解きやすい問題だったと思いますが，しっかりできていましたか。

・解きやすい問題が多かったように思いますが、解くべき問題を解くことができていましたか。
・得点の分布がうまく出るような意識はしましたか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1 a と b は定数で，$a \neq 0, b \neq 0$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 関数 $f(x)=e^{ax}\sin(bx)$ と $g(x)=e^{ax}\cos(bx)$ について，$af(x)-bg(x)$ と $bf(x)+ag(x)$ を微分せよ。

問2 不定積分 $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ と $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ を求めよ。

問3 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 問1 $f'(x)=(e^{ax})'\sin bx+e^{ax}(\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$g'(x)=(e^{ax})'\cos bx+e^{ax}(\cos bx)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$ より，

$$\{af(x)-bg(x)\}'=af'(x)-bg'(x)=a^2e^{ax}\sin bx+abe^{ax}\cos bx-abe^{ax}\cos bx+b^2e^{ax}\sin bx$$
$$=(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx$$

$$\{bf(x)+ag(x)\}'=bf'(x)+ag'(x)=abe^{ax}\sin bx+b^2e^{ax}\cos bx+a^2e^{ax}\cos bx-abe^{ax}\sin bx$$
$$=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$$ 答

問2 問1より，$e^{ax}\sin bx=\dfrac{1}{a^2+b^2}\{af(x)-bg(x)\}'$，$e^{ax}\cos bx=\dfrac{1}{a^2+b^2}\{bf(x)+ag(x)\}'$

よって $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\{af(x)-bg(x)\}+C_1$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx)-b\cos(bx)\}+C_1$$ （C_1 は積分定数）

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\{bf(x)+ag(x)\}+C_2$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{b\sin(bx)+a\cos(bx)\}+C_2$$ （C_2 は積分定数） ……① 答

別解 $I=\int e^{ax}\sin(bx)dx$，$J=\int e^{ax}\cos(bx)dx$ とおき，それぞれ部分積分をすると，

$I=\dfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)-\dfrac{b}{a}J$，$J=\dfrac{1}{a}e^{ax}\cos(bx)+\dfrac{b}{a}I$ となる。これを解くと上の結果が得られる。

問3 $y=0$ のとき，$e^{-x}>0$ より $\sin x=0$ だから $x=0, \pi$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ である。よって，求める体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\pi}(e^{-x}\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\left(e^{-2x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi}e^{-2x}dx-\int_0^{\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx\right)$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}(e^{-2\pi}-e^0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\right)$

また，①で $a=-2$，$b=2$ として考えると，

$$\int_0^{\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx=\left[\frac{e^{-2x}}{(-2)^2+2^2}(2\sin 2x-2\cos 2x)\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{e^{-2\pi}}{4}(\sin 2\pi-\cos 2\pi)-\frac{e^0}{4}(\sin 0-\cos 0)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\right)$$

よって，$V=\dfrac{\pi}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}\right)-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}\right)\right\}=\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{1}{e^{2\pi}}\right)$ 答

参考 オイラーの公式より，$\int e^{(a+bi)x}dx=\int e^{(ax+bxi)}dx=\int e^{ax}\cos(bx)dx+i\int e^{ax}\sin(bx)dx$ …②

一方，複素関数の積分より，$\int e^{(a+bi)x}dx=\dfrac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}+C$ （C は積分定数）となる。ここで，

$$\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi}=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{(a\cos bx+b\sin bx)+i(a\sin bx-b\cos bx)\}$$ …③

となり，②と③の実部と虚部をそれぞれ比べると問2の結果が得られる。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}\ (x>0)$ とする。$f(x)$ の最大値を与える x を a とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問1　関数 $f(x)$ の増減を調べることにより，a の値および最大値 $f(a)$ を求めよ。

問2　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が原点 $(0,0)$ を通るとき，その接線の方程式を求めよ。

問3　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　問1　$f'(x)=\dfrac{(\log x)'x^2-(\log x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$f'(x)=0$ を解くと，$1-2\log x=0$ より $x=\sqrt{e}$

また，$f(\sqrt{e})=\dfrac{\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\dfrac{1}{2e}$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘

増減表により $f(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で最大となる。よって，$a=\sqrt{e}$ ，$f(a)=\dfrac{1}{2e}$ 答

問2　求める接線を l とする。

l の方程式は　$y-f(t)=f'(t)(x-t)$，すなわち　$y-\dfrac{\log t}{t^2}=\dfrac{1-2\log t}{t^3}(x-t)$

この接線 l が原点 (0, 0) を通るから，$-\dfrac{\log t}{t^2}=\dfrac{1-2\log t}{t^3}(-t)$

$$\log t=1-2\log t$$

$$\log t=\frac{1}{3}$$

$$t=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

よって，接線 l の方程式は　$y=\dfrac{1-2\cdot\dfrac{1}{3}}{e}x$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{3e}x$ 答

問3　$f(x)=0$ を解くと　$\log x=0 \Leftrightarrow x=1$

$1\leqq x\leqq\sqrt{e}$ で $f(x)\geqq 0$ だから，求める面積を S とすると

$$S=\int_1^{\sqrt{e}} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}dx=\int_1^{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{x}\right)(\log x)'dx$$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\log\sqrt{e}-\frac{1}{1}\log 1\right)+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{e}}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{e}}-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)=1-\frac{3}{2\sqrt{e}}$$ 答

$\boxed{3}$ 数列$\{a_n\}$が $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められるとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$b_n=\log_2 a_n$ とする。b_{n+2} を b_{n+1}，b_n を用いて表せ。

問2　問1で求めた関係式を次のように表すとき，定数 p，q を求めよ。

$$\begin{cases} b_{n+2}-pb_{n+1}=q(b_{n+1}-pb_n) \\ b_{n+2}-qb_{n+1}=p(b_{n+1}-qb_n) \end{cases} \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \text{ただし，}p\geqq q\text{ とする。}$$

問3　問2で求めた p，q を用いて数列$\{c_n\}$ $\{d_n\}$ を次のように定める。

$c_n=b_{n+1}-pb_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$　$d_n=b_{n+1}-qb_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

一般項 c_n，d_n をそれぞれ求めよ。

問4　一般項 b_n および極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$ を求めよ。

解答　問1　$b_{n+2}=\log_2 a_{n+2}=\log_2\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(\log_2 a_n-\log_2 a_{n+1})=\dfrac{1}{2}(b_n-b_{n+1})$

よって　$b_{n+2}=-\dfrac{1}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_n$ …①　答

問2　与えられた式はいずれも　$b_{n+2}=(p+q)b_{n+1}-pqb_n$ …②　と変形できる。

①と②の係数を比較すると　$p+q=-\dfrac{1}{2}$，$pq=-\dfrac{1}{2}$ であるから，

p，q は2次方程式 $t^2+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}=0$ の実数解である。

これを解くと $t=-1,\ \dfrac{1}{2}$ であるから，$p\geqq q$ より　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-1$　答

参考　問1の結果により，

$x^2=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ すなわち $2x^2+x-1=0$ を解くと，$x=-1,\dfrac{1}{2}$　$p\geqq q$ より，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-1$

問3　問2の結果により　$\begin{cases} b_{n+2}-\dfrac{1}{2}b_{n+1}=-\left(b_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_n\right) \\ b_{n+2}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_{n+1}+b_n) \end{cases}$　すなわち　$\begin{cases} c_{n+1}=-c_n \\ d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n \end{cases}$

ここで，$b_1=\log_2 a_1=\log_2 1=0$，$b_2=\log_2 a_2=\log_2 2=1$ より，

数列$\{c_n\}$は初項 $c_1=b_2-\dfrac{1}{2}b_1=1$，公比$-1$の等比数列，

数列$\{d_n\}$は初項 $d_1=b_2+b_1=1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列 となる。

したがって　$c_n=(-1)^{n-1}$，$d_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　答

問4　問3の結果により，$b_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_n=(-1)^{n-1}$…③，$b_{n+1}+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$…④

③−④より　$-\dfrac{3}{2}b_n=(-1)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　$\therefore\ b_n=\dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(-1)^{n-1}\right\}$

よって

$b_{2n}=\dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}-(-1)^{2n-1}\right\}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$，$b_{2n+1}=\dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}-(-1)^{2n}\right\}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}-\dfrac{2}{3}$

これより　$\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n}=\dfrac{2}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1}=-\dfrac{2}{3}$

$a_n=2^{b_n}$ より，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=2^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$　答

4 箱の中に赤玉1個と白玉2個が入っている。この箱から玉を1個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す。赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n, m)$ とおく。ただし，$n \geqq m \geqq 2$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$P(2,2)$，$P(3,2)$，$P(4,2)$ を求めよ。

問2　$P(m,m)$，$P(m+1,m)$，$P(m+2,m)$ を求めよ。

問3　$n=m+1,\ m+2,\ m+3,\ \cdots,\ 2m$ に対し，$P(n,m)-P(n-1,m)$ を求めよ。

問4　$P(2m,m)$ を求めよ。

解答

問1　$P(2,2)$ は2回の試行で「赤赤」の順に取り出すので，$P(2,2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P(3,2)$ は3回の試行で「赤赤赤」「赤赤白」「白赤赤」のいずれかの順に取り出すので，

$$P(3,2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{27}$$

$P(4,2)$ は3回目までの試行で「赤赤赤」「赤赤白」「白赤赤」のいずれか，または，4回の試行で「赤白赤赤」「白白赤赤」のいずれかの順に取り出すので，

$$P(4,2)=P(3,2)+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{27}+\frac{2}{81}+\frac{2}{81}=\frac{21}{81}=\frac{7}{27}$$ 答

問2　$P(m,m)=\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{1}{3^m}$

$P(m+1,m)$ は $m+1$ 回の試行で「$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$赤」「$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$白」「白$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$」のいずれかの順に取り出すので，

$$P(m+1,m)=\left(\frac{1}{3}\right)^m+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{5}{3^{m+1}}$$

$P(m+2,m)$ は $m+1$ 回までの試行で「$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$赤」「$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$白」「白$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$」のいずれか，または，

$m+2$ 回の試行で「赤白$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$」「白白$\underbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}_{m\text{回}}$」の順に取り出すので，

$$P(m+2,m)=P(m+1,m)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^m=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}=\frac{7}{3^{m+1}}$$ 答

問3　$P(n,m)$ を考えると，

(i) $n-1$ 回までの試行で，赤玉が連続して m 回以上出た場合

または

(ii) $n-m$ 回目が白玉で，$n-m+1$ 回目以降，赤玉が連続して m 回出た場合

のいずれかである。ここで，$n \geqq m$ より $n-m-1$ 回目までに赤玉が連続して m 回出ることはない。

以上より，

$$P(n,m)=P(n-1,m)+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{3}\quad したがって\quad P(n,m)-P(n-1,m)=\frac{2}{3^{m+1}}$$ 答

問4　問3より，

$$P(2m,m)=P(2m-1,m)+\frac{2}{3^{m+1}}=P(2m-2,m)+\frac{2}{3^{m+1}}+\frac{2}{3^{m+1}}=\cdots=P(m,m)+\frac{2m}{3^{m+1}}$$

問2より，$P(m,m)=\left(\frac{1}{3}\right)^m$ なので，$P(2m,m)=\frac{1}{3^m}+\frac{2m}{3^{m+1}}=\frac{2m+3}{3^{m+1}}$ 答

1 次の問いに答えよ。（50点）

問1　不定方程式$21x-10y=1$の整数解で，$0\leqq x\leqq 1000$を満たすものの個数を求めよ。

問2　任意の自然数nに対して，n^5-nは30で割り切れることを示せ。

問3　$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$のとき，方程式$\cos(2\theta)+\sin\theta=1$を解け。

解答　問1　$21x-10y=1\cdots$①　とする。$x=1$，$y=2$は①の整数解の1つである。

すなわち，$21\cdot1-10\cdot2=1\cdots$②

①−②より　$21(x-1)-10(y-2)=0$　すなわち　$21(x-1)=10(y-2)$

21と10は互いに素だから，kを整数として

$$x-1=10k,\ y-2=21k$$

と表せる。よって，①の整数解は

$$x=10k+1,\ y=21k+2$$

$0\leqq x\leqq 1000$のとき，$0\leqq 10k+1\leqq 1000$　より　$-\dfrac{1}{10}\leqq k\leqq\dfrac{999}{10}$

これを満たす整数kは$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$の100個だから，求める個数は100個　**答**

別解　$21x=10y+1$より，左辺の1の位に注目すると，右辺の1の位が常に1であるから

$x=10k+1$　($k=0,1,2,\cdots$)　であることが必要である。また，$x=10k+1$のとき，

不定方程式$21x-10y=1$について，

$10y=21x-1=21(10k+1)-1=210k+20$　すなわち

$y=21k+2$　($k=0,1,2,\cdots$)　が存在するので十分である。

いま，$0\leqq x\leqq 1000$より，$0\leqq 10k+1\leqq 1000$　より　$-\dfrac{1}{10}\leqq k\leqq\dfrac{999}{10}$

これを満たす整数kは$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99$の100個だから，求める個数は100個　**答**

問2　$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$

$(n-1)n(n+1)$は連続する3つの整数の積だから，6の倍数である。…①

また，kを整数として，nは$5k-4$，$5k-3$，$5k-2$，$5k-1$，$5k$のいずれかの形で表される。

$n=5k-4$のとき　$n-1=(5k-4)-1=5(k-1)$

$n=5k-3$のとき　$n^2+1=(5k-3)^2+1=25k^2-30k+9+1=5(5k^2-6k+2)$

$n=5k-2$のとき　$n^2+1=(5k-2)^2+1=25k^2-20k+4+1=5(5k^2-4k+1)$

$n=5k-1$のとき　$n+1=(5k-1)+1=5k$

$n=5k$　　のとき　$n=5k$

よって，$n-1$，n，$n+1$，n^2+1のいずれかが常に5の倍数となるから

$(n-1)n(n+1)(n^2+1)$は5の倍数である。…②

①，②より，n^5-nは6の倍数かつ5の倍数であるから，30で割り切れる。　**答**

別解　上記の①以降で，

「全ての自然数nは5を法として，$n\equiv0$，$n\equiv\pm1$，$n\equiv\pm2$のいずれかで表すことができるので，

$n\equiv0$のとき　$n^5-n\equiv0$

$n\equiv\pm1$のとき　$n^5-n\equiv(\pm1)^5-(\pm1)\equiv0$

$n\equiv\pm2$のとき　$n^5-n\equiv(\pm2)^5-(\pm2)\equiv\pm30\equiv0$　（ただし，複号同順）

よって，n^5-nは6の倍数かつ5の倍数であるから，30で割り切れる」　としても良い。

問3　$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$より，$1-2\sin^2\theta+\sin\theta=1$

$\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$　　したがって，$\sin\theta=0,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$より，　$\theta=0^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ,\ 180^\circ$　**答**

2 a は正の実数とする。$y=2ax^2-(5a-1)x+2a+1$ で表される放物線を C とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　放物線 C は a の値によらず，2定点を通る。その2定点の座標をそれぞれ求めよ。

問2　放物線 C と放物線 $y=x(1-x)$ がただ一つの共有点をもつとき，その共有点の座標と a の値を求めよ。

問3　問1で求めた2定点を通る直線と放物線 C で囲まれる部分の面積を S とする。S の値を a を用いて表せ。

解答　問1　$y=2ax^2-(5a-1)x+2a+1$ を変形すると，

$$(2x^2-5x+2)a+(x-y+1)=0$$

これが a の値によらず成り立つのは $\begin{cases}2x^2-5x+2=0\\ x-y+1=0\end{cases}$ が成り立つときである。

これを解くと　$(x,\ y)=(2,\ 3),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

よって，求める座標は $(2,\ 3),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ 答

問2　$\begin{cases}y=2ax^2-(5a-1)x+2a+1 & \cdots① \\ y=x(1-x) & \cdots②\end{cases}$

とする。①と②を連立して y を消去すると

$(2a+1)x^2-5ax+2a+1=0 \quad \cdots③$

$a>0$ より $2a+1>0$ だから，題意が成り立つのは，2次方程式③の判別式を D として，$D=0$ となるときである。

$D=(-5a)^2-4(2a+1)^2=25a^2-4(4a^2+4a+1)=9a^2-16a-4=(a-2)(9a+2)$

これと，$a>0$ より，題意が成り立つのは，$a=2$ のときである。

$a=2$ を③に代入すると，　$5x^2-10x+5=0$　より，$x=1$

よって，求める共有点は $a=2$ のとき，$(1,0)$ 答

参考 2次方程式③が重解をもつとき，その重解は $x=\dfrac{5a}{2(2a+1)}$ であるから，

$a=2$ であるとき，2次方程式③の重解は，$x=\dfrac{5\cdot 2}{2(2\cdot 2+1)}=1$ となる。

問3　2定点 $(2,\ 3),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る直線の方程式は　$y-3=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{2-\frac{1}{2}}(x-2)$　より，$y=x+1$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき　$x+1\geqq 2ax^2-(5a-1)x+2a+1$ だから

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+1)-\{2ax^2-(5a-1)x+2a+1\}]dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-2ax^2+5ax-2a)dx$$

$$=-2a\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=-2a\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{3}a\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{8}a$$ 答

1　$x>-2$，$x\neq 0$ の範囲で，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{x}+\log(x+2)$ と定める。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問 2　$f(x)$ の増減と極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

問 3　k を実数とする。直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ の交点の個数を調べよ。

解答

問 1　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2(x+2)}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2(x+2)}$ 答

問 2　$f'(x)=0$ のとき，$x>-2$ より，$x=-1, 2$ であり，増減表は次のようになる。

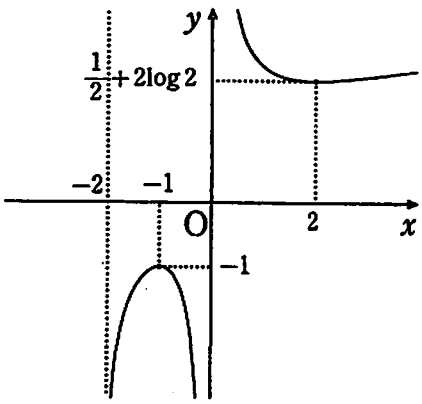
x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↗	-1	↘	／	↘	$\dfrac{1}{2}+2\log 2$	↗

増減表より，$x=-1$ のとき，極大値 -1

$x=2$　のとき，極小値 $\dfrac{1}{2}+2\log 2$

また，$\displaystyle\lim_{x\to -2+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)=\infty$ より，

グラフは次のようになる。



参考 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-\log(x+2)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であることから，

$x\to\infty$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは，曲線 $y=\log(x+2)$ に限りなく近づくことが分かる。

問 3　問 2 より，直線 $y=k$ と曲線 $y=f(x)$ の交点の個数は，

$-1<k<\dfrac{1}{2}+2\log 2$　　のとき 0 個

$k=-1$，$\dfrac{1}{2}+2\log 2$　　のとき 1 個

$k<-1$，$\dfrac{1}{2}+2\log 2<k$　のとき 2 個　答

2 m，n を自然数とし，$A(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$A(m,1)$ を m を用いて表せ。

問2　$n\geqq 2$ のとき，関係式 $A(m,n)=\dfrac{n}{m+1}A(m+1,n-1)$ が成り立つことを示せ。

問3　問1，問2の結果を使って，$A(m,n)$ を m；n を用いて表せ。

解答　問1　$A(m,1)=\int_0^1 x^m(1-x)dx=\int_0^1(x^m-x^{m+1})dx=\dfrac{1}{m+1}\Big[x^{m+1}\Big]_0^1-\dfrac{1}{m+2}\Big[x^{m+2}\Big]_0^1$

$$=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$ 答

問2　$n\geqq 2$ のとき

$$A(m,n)=\int_0^1\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1}\right)'(1-x)^n dx$$

$$=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{m+1}x^{m+1}\{(1-x)^n\}'dx$$

$$=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{m+1}A(m+1,n-1)$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき，関係式 $A(m,n)=\dfrac{n}{m+1}A(m+1,n-1)$ が成り立つ。 答

問3　問2より，$n\geqq 2$ のとき，

$$A(m,n)=\frac{n}{m+1}A(m+1,n-1)$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot A(m+2,n-2)$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}\cdot A(m+n-1,1)$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}\cdot\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$$

$$=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\quad\cdots①$$

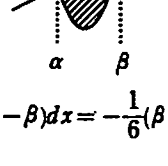
①に $n=1$ を代入すると $\dfrac{m!}{(m+2)!}=\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$ となり，$n=1$ のときも①は成り立つ。

自然数 m，n において，$A(m,n)=\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ となる。 答

参考　問題の $A(m,n)$ は，ベータ関数の m，n を自然数としたときのものである。

$A(m,n)$ の x を $\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ とすると，問3より以下のようになる。

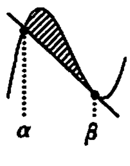
$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad\cdots②$$



②について，

$m=n=1$ のとき，

放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$



$m=1$，$m=2$ のとき，

3次関数のグラフとその接線で囲まれた部分の面積を求める公式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ になる。

$\boxed{3}$ i を虚数単位とし，$a=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ とおく。また，$A=a+a^2+a^4$，$B=a^3+a^5+a^6$ とおく。次の問いに答えよ。（50点）

問1　$A+B$ の値を求めよ。

問2　AB の値を求めよ。

問3　$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ の値を求めよ。

解答

問1　$A+B=(a+a^2+a^4)+(a^3+a^5+a^6)=a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$

ここで，ド・モアブルの定理より

$$a^7=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7=\cos\left(7\times\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(7\times\frac{2\pi}{7}\right)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$a^7-1=0$ より，$(a-1)(a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)=0$

$a\neq 1$ であるから，$1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6=0$

したがって，$A+B=a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6=-1$　答

問2　$AB=(a+a^2+a^4)(a^3+a^5+a^6)$

$=a^4+a^6+a^7+a^5+a^7+a^8+a^7+a^9+a^{10}$

$=a^4+a^5+a^6+3a^7+a^8+a^9+a^{10}$

$=a^4+a^5+a^6+3+a+a^2+a^3$

$=3+(-1)$

$=2$　答

問3　$A=a+a^2+a^4=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$

より，$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ の値は，A の虚部である。

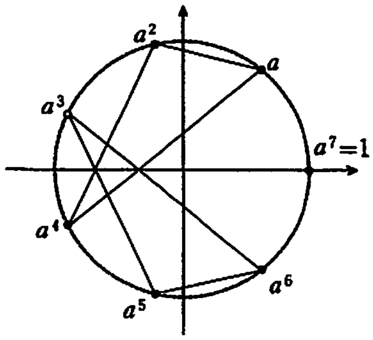
問1，問2より $A+B=-1$，$AB=2$ なので，A, B はそれぞれ，二次方程式 $x^2+x+2=0$ の解である。

この二次方程式を解くと $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ であることと，

$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}>\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$ より，$A=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

したがって，$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$　答

参考　a，a^2，$\cdots$，a^7 を複素平面上に表すと次のようになる。



a，a^2，$\cdots$，a^7 が表す点をそれぞれ A_1，A_2，$\cdots$，A_7 とする。

すると，$\frac{A}{3}$ と $\frac{B}{3}$ はそれぞれ三角形 $A_1A_2A_4$ と三角形 $A_3A_5A_6$ の重心である。

この２つの重心が虚軸に関して対称であることは，問３で A, B が共役な複素数であることからもわかる。

$\boxed{4}$ 三角形OABにおいて，OA=5，OB=4，AB=6とし，線分ABを1:2に内分する点をCとおく。また，ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく。次の問に答えよ。（50点）

問1　$\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

問2　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

問3　$\vec{c}$ の大きさを求めよ。

問4　点Aから直線OCにおろした垂線の交点をHとおく。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

解答

問1　点Cは線分ABを1:2に内分する点なので，$\vec{c}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$　答

問2　$\cos\angle AOB=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}=\dfrac{1}{8}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=5\cdot4\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{2}$　答

問3　$\vec{c}$ の大きさを求めよ。

$$|\vec{c}|^2=\left|\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|^2=\frac{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}{9}=\frac{4\cdot25+4\cdot\frac{5}{2}+16}{9}=14$$

より，$|\vec{c}|=\sqrt{14}$　答

問4　O，C，Hは一直線上にあるので，$\overrightarrow{OH}=k\vec{c}$（$k$ は実数）とできる。

$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{AH}$ は垂直なので，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AH}=\vec{c}\cdot(k\vec{c}-\vec{a})=k|\vec{c}|^2-\vec{c}\cdot\vec{a}=14k-\left(\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right)\cdot\vec{a}=14k-\frac{2}{3}\cdot25-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=14k-\frac{35}{2}$$

$14k-\dfrac{35}{2}=0$ より，$k=\dfrac{5}{4}$

$\overrightarrow{OH}=k\vec{c}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{10\vec{a}+5\vec{b}}{12}$　答