令和2年度

第44回高校数学教育を考える会

（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

紙面発表

目次

令和２年度（2020）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

★は、各学校からあった質問・意見

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問１ 問２ 問３	数Ⅱ	微分法 ・ 積分法	易 易 易	・グラフを書けていたか。 ・直線と曲線の上下関係をいわずに、面積を求める式をいきなり用いたものはどういう採点になったか。 ・直線と曲線の上下関係は、グラフを書いたり、$g(x)=(4x+1)-(x^3+x-1)$とおき増減表などで正負を判断するなどが必要であったか。 ・どういう答案があったか。面積を求める公式を使っていたものは、どのような採点になったか。
2	数Ⅲ	微分法	標準	・増減表を書く際、$f'(x)$の符号についての根拠は不要だったか。（増減表に＋－を入れれば良かったか） ・小問の誘導が無かったが、どのようなねらいや意図があったか。また、出来はどうだったか。 ・差をとって、$f(x)$とおくことが出来ていた受検生はどれくらいの割合がいたか。 ・増減表以降の極大・極小の評価までできている受検生はどれくらいいたか。 ・方程式 $\log x = \sqrt{ax}$ を作るとき、なにか考えられる方法はありますか？（高校を超えた範囲でも）
3 問１ 問２ 問３	数Ａ 数Ａ 数Ｂ	確率 確率 数列	易 標準 難	・複素数平面で考えた受検生はいたか。 ・問３ができていたか ・問２の証明ができていなくて、問３で問２の事実を使ったものは可としたか。 ★数学的帰納法は２年振りの出題であった。前回（２０１８）の出題は１０年振り以上の出題であり、難易度も２０２０より高かったと思う。２０１８と比べて、２０２０の受検生のできはどうだったか。出題間隔が狭まったこと、計算量が減ったことから、得点率が高まっていることを期待したいが…。

4 問１ 問２ 問３	数Ａ	確率	易 難 標準	・問２は場合分けができていたか。 ・確率の和を考える際に、「互いに排反なので」という記述がないものは減点があったか。 ・配点は問１が 20 点、問２が 15 点、問３が 15 点か？ ★こちらの問題も２０１８の大問４と類似であるが、難易度は２０１８より難化している印象を受ける。確率漸化式も前回（２０１８）の出題は１０年以上振りであり、出題間隔は狭まっている。２０１８と比べて得点率はどうであったか。

全体

・自分で規則性を見つけたり、考える力が必要な良問が多かったと感じました。

・数列と複素数や、確率と数列の融合など、融合問題として生徒に解かせたい問題であった。

・３で割ったときの余りや４で割ったときの余りで場合分けが多かった。慣れている受検生と慣れていない受検生で差が出たのではないか。

・全体的なできはどうであったか。

・共通テストを意識しているか？（誘導が無い 2 や規則性を推測させる・巡回する問題などが多い印象を受けた）

★２０１８から２年ぶりの数Ⅲの積分からの出題が無かった。全体を通して 1 数Ⅱ・微積 2 数Ⅲ微分 3 数Ⅱ複素数・数Ｂ帰納法 4 数Ａ確率・数Ｂ漸化式 であった。今年はコロナの影響があるので、２０２０のようなⅠＡⅡＢが多めの出題をお願いしたい。

★２０１８、２０１９、２０２０と難易度の差があるように感じる。２０１８、２０２０は易、２０１９は難。それぞれの学部の合格者平均点の推移を聞きたいが可能か？

★今回の甲問題について、全体的には、受験対策において、しっかりとやっておくべき内容であり、良問かと感じます。ただ、（他にもあるかもしれませんが）第 4 問において、他県の過去問となっており、受験生間で公平性がなくなってしまいます。今後もそうであるなら、他県の過去問も含めて対策をしていくことになりますが、琉球大学としてはどのような方向性でいくのか教えていただきたいと存じます。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和２年度（2020）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質　問　事　項
$\boxed{1}$				
問１	数Ⅱ	三角関数	易	
問２	数Ⅱ	対数関数	易	・問２で不等式を作る際，等号の有無で配点を分けたか。
問３	数B	ベクトル	易	・問３は，相似を利用した解法もあったか。
$\boxed{2}$				
問１	数Ｉ	数と式	易	
問２	数Ⅱ	積分法	標準	・問２では，$-a$ と$a-2$ の大小関係について，証明や根拠のないものは減点があったか。 ・グラフを書き、面積をS_1やS_2として考えていたか。 ・どういう記述をしていたか。 ・証明をしないで、a を求めていたのはどうしたか。 （証明をしていない事実を根拠にして求めた a について認めたか）

全体

・$\boxed{2}$の問２で差がついたか。$\boxed{1}$はできていたか。

・基本的でよく見る問題が多く良かった。生徒も解きやすかったのではないか。

・証明や記述ができていたか。

（答えはあっているが、論理的に説明できていないものは答えを認めなかったか。説明が足りないものの減点は多かったか。）

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和２年度（2020）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問１ 問２	数Ⅲ	積分法	標準 標準	・$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$については，計算できていたか。 ・どのような答案があったか。 ・回転体について，式を立てることができていたか。
2 問１ 問２	数Ⅲ	積分法	標準 やや難	・置き換えの記述はできていたか。 ・どのような力を測る意図で出題したか。 ・このｆ（ｘ）や問２の式は、数学的になにか意味がある式でしょうか。
3	数Ｂ	ベクトル	易	・センター試験でよく出るような問題であったが，自分で内分点の式を作ったり，点Ｄを自分でとって説明するようなことができていたか。（記述する力があったか。） ・式から三角形の面積比がわかる公式があるが、この公式よりというものや根拠が不十分なものはどうしたか。
4 問１ 問２ 問３ 問４	 数Ａ 数Ａ 数Ａ 数Ｂ	 確率 確率 確率 数列	 易 易 標準 難	・確率の問題であったが，記述ができていたか。 ・問３までは解けていたか。 ・問４は，q_nの式を作るのに，問３の誘導に気づき，p_nを使えていたか。 ・漸化式に2^nが入った形であったが，解けていたか。 ・n ≧ 3という条件を意識した記述ができていたか。

全体
・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。
・大問１・２で標準的な計算力を問い、大問３で説明力・記述力を問い、大問４で思考力を問う良問だった。
・今年の現役生は、数Ⅲについてかなり不利な部分があるので、配慮をお願いしたい。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1 関数 $y=x^3+x-1$ の表す曲線 C について，次の問いに答えよ。(50点)

問１　C 上の点 (t, t^3+t-1) における接線の方程式を，t を用いて表せ。

問２　点 $(0, 1)$ を通る C の接線を l とする。l の方程式と接点の座標を求めよ。

問３　C と問２で求めた l で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答 問１　$y'=3x^2+1$ より，点 (t, t^3+t-1) における接線の方程式は

$y-(t^3+t-1)=(3t^2+1)(x-t)$　より，　$\boldsymbol{y=(3t^2+1)x-2t^3-1}$　…　①　　答

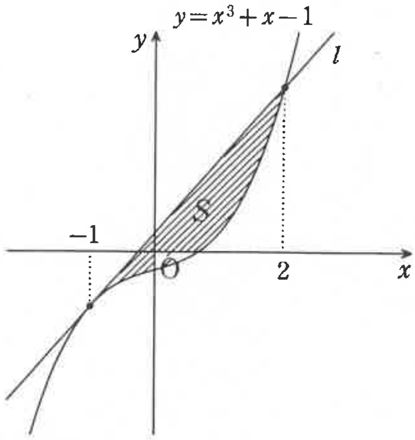
問２　直線①が点 $(0, 1)$ を通るので，

$1=-2t^3-1$ より $t=-1$

①より，l の方程式は，$\boldsymbol{y=4x+1}$

接点の座標は，$\boldsymbol{(-1, -3)}$　答

問３　曲線 C と l の交点の x 座標を求める。



$x^3+x-1=4x+1$ より，

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$ より，$x=-1, 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，l は曲線 C の上側にあるので，

$$S=\int_{-1}^{2}\{(4x+1)-(x^3+x-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{4}\{2^4-(-1)^4\}+\frac{3}{2}\{2^2-(-1)^2\}+2\{2-(-1)\}$$

$$=-\frac{15}{4}+\frac{9}{2}+6=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$　答

参考　問３は，曲線 C と接線 l の接点の x 座標が分かっていれば，

接線 l の方程式が分かっていなくても解くことが出来る。

l は x 軸に垂直な直線でないため $h(x)$ を１次式とすると l ： $y=h(x)$ とおける。

関数 $y=h(x)$ と直線 l の共有点の x 座標について，２式を連立して y を消去すると

$x^3+x-1=h(x)$ より，　$x^3+x-1-h(x)=0$

曲線 C と直線 l ： $y=h(x)$ が $x=-1$ で接することから，この方程式の実数解は，

　$x=-1, -1, \alpha$　（α は実数）

となることが分かり，３次方程式の解と係数の関係より

　$-1+(-1)+\alpha=0$　すなわち　$\alpha=2$ となる。

いま，$y=x^3+x-1$ において，$y''=6x$ であり，$x=-1$ のとき $y''<0$ であるから，

$-1 \leqq x \leqq 2$ の値の範囲において，$h(x) \geqq x^3+x-1$ である。

よって，$S=\int_{-1}^{2}\{h(x)-(x^3+x-1)\}dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx$

$$=-\int_{-1}^{2}\left\{\frac{1}{3}(x+1)^3\right\}'(x-2)dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(x+1)^3dx=\frac{1}{12}\Big[(x+1)^4\Big]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$$

参考

放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

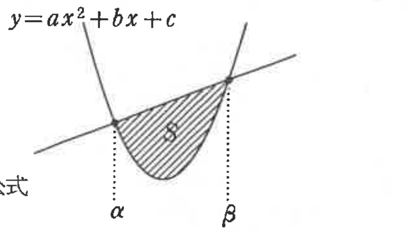
や，３次関数のグラフとその接線で囲まれた部分の面積を求める公式

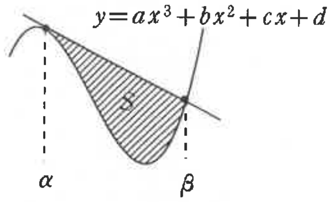
$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

などあるが，後者を利用すると，

$$S=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=\frac{27}{4}$$

である。





2 a を正の実数とする。$x>0$ において，曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。（50点）

解答 $f(x)=\sqrt{ax}-\log x$ とおくと，

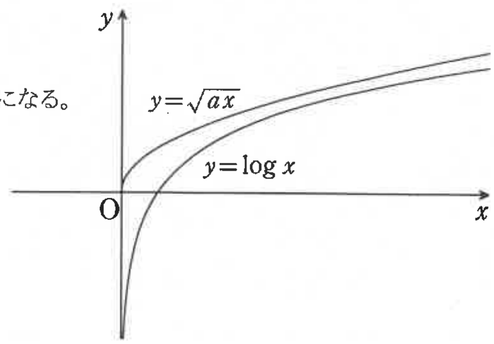
曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないのは，

$f(x)=0$ が解を持たないときである。

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{ax}-2}{2x}$ より，

$f'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{4}{a}$ であるから，増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$		$+$
$f(x)$	/	↘	$2-\log\dfrac{4}{a}$	↗



増減表と $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$ より，$f(x)=0$ の解を持たない，すなわち

曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めると，

$2-\log\dfrac{4}{a}>0$ より，$e^2>\dfrac{4}{a}$ すなわち $\boldsymbol{a>\dfrac{4}{e^2}}$ 答

別解 $g(x)=\log x-\sqrt{ax}$ とおくと，曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないのは，

$g(x)=0$ が解を持たないときである。

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2-\sqrt{ax}}{2x}$ より，$g'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{4}{a}$ であるから，増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$		$-$
$f(x)$	/	↗	$\log\dfrac{4}{a}-2$	↘

増減表と $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$ より，$g(x)=0$ の解を持たない，すなわち曲線 $y=\log x$ と曲線 $y=\sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めると，$\log\dfrac{4}{a}-2<0$ より，$\dfrac{4}{a}<e^2$ すなわち $\boldsymbol{a>\dfrac{4}{e^2}}$ 答

3　iを虚数単位とし，複素数a_nを

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n+\sqrt{3}i\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める。また，複素数b_nを

$$b_1=1,\quad b_{n+1}=a_nb_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める。このとき，次の問いに答えよ。(50点)

問１　a_2，a_3，a_4を求めよ。

問２　すべての正の整数nについて$a_{n+3}=a_n$が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

問３　b_nを求めよ。

解答　問１　$a_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot a_1+\sqrt{3}i=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)+\sqrt{3}i=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot a_2+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{3}i=-1+\sqrt{3}i$$

$$a_4=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot a_3+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i)+\sqrt{3}i=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{3}i=-1$$　答

問２　(i)　$n=1$　のとき，問１より　$a_4=a_1=-1$　となり成立する。

(ii)　$n=k$　のとき，$a_{n+3}=a_n$が成り立つと仮定すると，$a_{k+3}=a_k$となる。

このとき，$a_{(k+1)+3}=a_{k+4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot a_{k+3}+\sqrt{3}i=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_k+\sqrt{3}i=a_{k+1}$

となり，$n=k+1$ のときも$a_{n+3}=a_n$が成り立つ。

(i)，(ii)より，すべての自然数nにおいて$a_{n+3}=a_n$が成り立つ。　終

問３　問２より，$k=1,2,3,\cdots$とすると，

(i)　$n=3k$のとき，$a_{3k}=a_3=-1+\sqrt{3}i$

(ii)　$n=3k-1$のとき，$a_{3k-1}=a_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(iii)　$n=3k-2$のとき，$a_{3k-2}=a_1=-1$

なので，

(i)　$n=3k$のとき，

$$b_{3k+3}=a_{3k+2}b_{3k+2}=a_{3k+2}a_{3k+1}b_{3k+1}=a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k}b_{3k}=a_2a_1a_3b_{3k}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)\cdot(-1+\sqrt{3})\cdot b_{3k}=2b_{3k}$$

よって，$b_n=b_{3k}=2b_{3k-3}=\underbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}_{k-1\text{ 個}}\cdot b_3=2^{k-1}\cdot b_2a_2=2^{k-1}\cdot b_1a_1a_2$

$$=2^{k-1}\cdot1\cdot(-1)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-2^{k-2}(1+\sqrt{3}i)$$

(ii)　$n=3k-1$のとき，$b_n=b_{3k-1}=\underbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}_{k-1\text{ 個}}\cdot b_2=2^{k-1}\cdot b_1a_1=2^{k-1}\cdot1\cdot(-1)=-2^{k-1}$

(iii)　$n=3k-2$のとき，$b_n=b_{3k-2}=\underbrace{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}_{k-1\text{ 個}}\cdot b_1=2^{k-1}\cdot1=2^{k-1}$

以上より，$k=1,2,3,\cdots$とすると，$n=3k$ のとき，　$b_n=-2^{k-2}(1+\sqrt{3}i)$

$n=3k-1$ のとき，　$b_n=-2^{k-1}$

$n=3k-2$ のとき，　$b_n=2^{k-1}$　答

参考 複素数 a_n について複素数平面上で考えると，

$a_1=-1=\cos\pi+i\sin\pi$,

$a_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$,

$a_3=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ である。

さらに，問２より

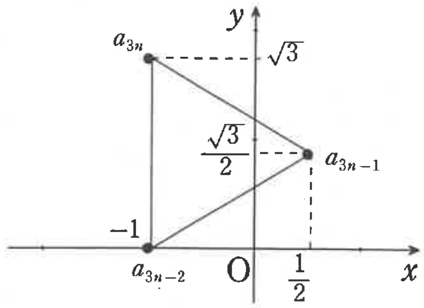
$a_{3n-2}=\cos(2n-1)\pi+i\sin(2n-1)\pi$,

$a_{3n-1}=\cos\left(2n-\dfrac{5}{3}\right)\pi+i\sin\left(2n-\dfrac{5}{3}\right)\pi$,

$a_{3n}=2\left\{\cos\left(2n-\dfrac{4}{3}\right)\pi+i\sin\left(2n-\dfrac{4}{3}\right)\pi\right\}$ であり，

この３点は図１のように正三角形の３頂点をとる。

図１



このことは，$a_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_n+\sqrt{3}i$

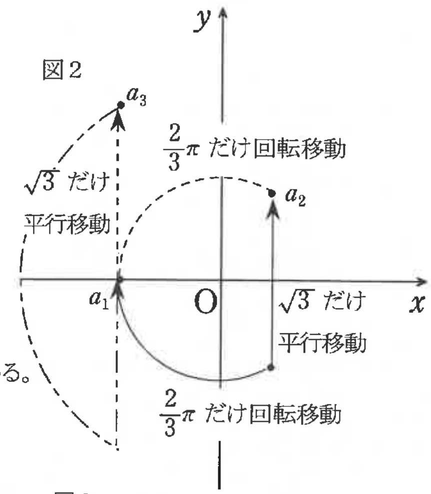
$=\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)a_n+\sqrt{3}i$ より，

図２のように，

点 a_{n+1} は，点 a_n を原点を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転移動し，

虚軸方向に $\sqrt{3}$ だけ平行移動すれば得られることからもわかる。

図２

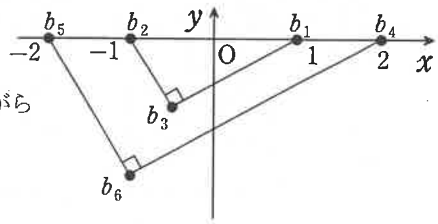


また，複素数 b_n について，複素数平面上で考えると，

$b_{3n-2}=2^{n-1}$, $b_{3n-1}=-2^{n-1}$, $b_{3n}=\dfrac{-(1+\sqrt{3}i)}{2}\cdot 2^{n-1}$

の３点は，図３のように，辺の長さの比を $1:2:\sqrt{3}$ に保ちながら辺の長さが２の累乗倍になっていく直角三角形の３頂点をとる。

図３



このことは，$b_1=1$,

$b_2=a_1b_1=(\cos\pi+i\sin\pi)b_1$

$b_3=a_2b_2=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)b_2$

$b_4=a_3b_3=2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)b_3$

$b_5=a_4b_4=a_1b_4=(\cos\pi+i\sin\pi)b_4$ 　…

のように複素数 b_n は，

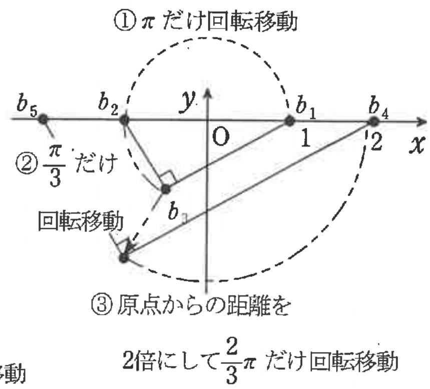
① 原点を中心として π だけ回転移動

② 原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転移動

③ 原点からの距離を２倍して，原点を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転移動

を順に行っていくことで，図４のように得られることからもわかる。

図４



また，$a_1a_2a_3=2$ より，①～③をそれぞれ１回ずつ行うと，原点からの距離が２倍の点に移ることがわかる。
これは，問３の $b_{n+3}=3b_n$ に表れている。

4 1から7までの数を1つずつ書いた7個の玉が，袋の中に入っている。袋から玉を1個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す。この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数となる確率を p_n とする。ただし，n は正の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。（50点）

問１　p_1 と p_2 を求めよ。

問２　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

問３　p_n を求めよ。

解答　問１　1から7までの数のうち，4の倍数は4だけなので，$p_1=\dfrac{1}{7}$

p_2 について考える。1回目に取り出した玉に書かれた数を a_1，2回目に取り出した玉に書かれた数を a_2 とすると，2つの数の和が4の倍数になるのは，

$(a_1,a_2)=(1,3),(2,2),(3,1),(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),$
$(5,7),(6,6),(7,5)$

の13通り。よって，$p_2=\dfrac{13}{7\times7}=\dfrac{13}{49}$　答

問２　試行を $n+1$ 回繰り返して得られる $n+1$ 個の数の和が4の倍数となるのは

（ｉ）試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数で，$n+1$ 個目の数が4である。

（ii）試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が4の倍数でなく，$n+1$ 個目の数を足すと4の倍数となる。

の場合のいずれかである。

（ii）の場合，

n 個の数の和を4で割ったときの余りが1のとき，$n+1$ 個目が3か7であればよく，
n 個の数の和を4で割ったときの余りが2のとき，$n+1$ 個目が2か6であればよく，
n 個の数の和を4で割ったときの余りが3のとき，$n+1$ 個目が1か5であればよい。

（ｉ）と（ii）は互いに排反なので，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{7}+(1-p_n)\times\frac{2}{7}=-\frac{1}{7}p_n+\frac{2}{7}\quad 答$$

問３　問２の式は $p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{7}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$ と変形でき，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{7}$ の等比数列なので，

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$$

したがって，$p_n=\dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{4}$　答

1　次の問いに答えよ。（50点）

問１　$\cos 15°$ の値を求めよ。

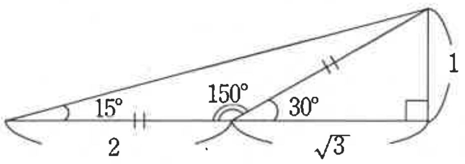
問２　6400^{50} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

問３　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を $2:3$ に内分する点を E とし，対角線 BD と線分 AE の交点を P とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表すとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

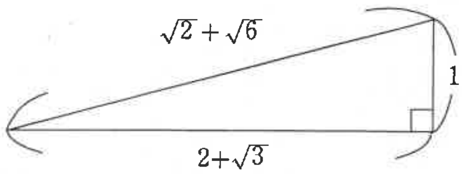
解答

問１　$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　答

参考



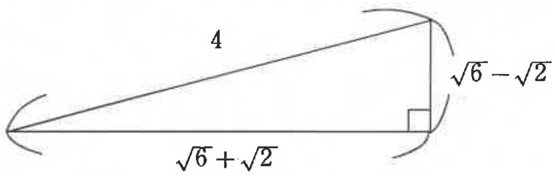
より，



上図の辺の比を覚えていれば、$\cos 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　答

同様に，$\sin 15°$，$\cos 75°$，$\sin 75°$ などの値もすぐにわかる。

さらに，下記の辺の長さの比にも変形できて，下記の図を利用すると有理化の必要がなくなる。



問２　$\log_{10} 6400^{50} = 50\log_{10} 6400 = 50\log_{10}(2^6 \cdot 10^2) = 300\log_{10} 2 + 100\log_{10} 10 = 300 \times 0.3010 + 100 = 190.3$

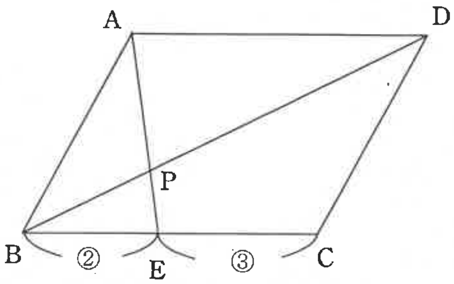
$190 \leqq \log_{10} 6400^{50} < 191$　より，**191 桁**　答

問３　$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b} + \dfrac{2}{5}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\left(\vec{b} + \dfrac{2}{5}\vec{d}\right) = k\vec{b} + \dfrac{2}{5}k\vec{d}$　… ①

点 P は線分BD 上にあるので，$k + \dfrac{2}{5}k = 1$　これより　$k = \dfrac{5}{7}$

① に代入して，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{7}\vec{b} + \dfrac{2}{7}\vec{d}$　答



別解

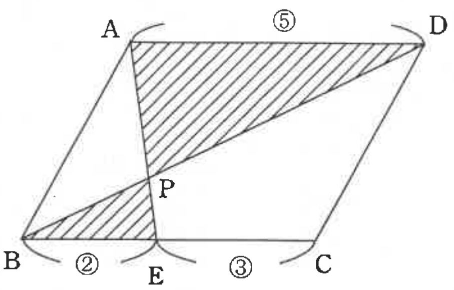
$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b} + \dfrac{2}{5}\vec{d}$

$\triangle \mathrm{APD} \backsim \triangle \mathrm{EPB}$ かつ $\mathrm{AD:EB} = 5:2$ より，

$\mathrm{AP:PE} = 5:2$

したがって，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{5}{7}\left(\vec{b} + \dfrac{2}{5}\vec{d}\right) = \dfrac{5}{7}\vec{b} + \dfrac{2}{7}\vec{d}$　答



2 実数 $a>1$ に対して，$f(x)=x^2+2x-a^2+2a$ とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問１　２次方程式 $f(x)=0$ の解を a を用いて表せ。

問２　放物線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた２つの部分の面積が等しいとき，

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ を示し，このときの a の値を求めよ。

解答

問１　$x^2+2x-a^2+2a=0$ より $(x+a)\{x-(a-2)\}=0$　したがって　$x=a-2,\ -a$　答

問２　$(a-2)-(-a)=2a-2=2(a-1)$　であり，

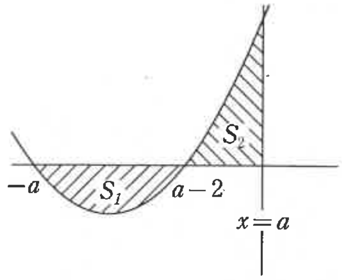
$a>1$ より，$a-2>-a$

よって，右図のように

放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1，

放物線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ の３つのグラフで囲まれた

部分の面積を S_2 とおくと，仮定より $S_1=S_2$



よって，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a-2} f(x)dx+\int_{a-2}^{a} f(x)dx=-\int_{-a}^{a-2}\{-f(x)\}dx+\int_{a-2}^{a} f(x)dx=-S_1+S_2=0$　終

また，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x-a^2+2a)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+(-a^2+2a)x\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{3}\cdot 2a^3+(-a^2+2a)\cdot 2a$

$$=-\frac{4}{3}a^3+4a^2=-\frac{4}{3}a^2(a-3)$$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ より，$a=0,3$　　$a>1$ より，　$a=3$　答

別解

$\int_{-a}^{a} f(x)dx$ を求める部分は，偶関数・奇関数の性質より

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{a}(x^2+2x-a^2+2a)dx=2\int_{0}^{a}(x^2-a^2+2a)dx=2\left[\frac{x^3}{3}+(-a^2+2a)x\right]_{0}^{a}=-\frac{4}{3}a^3+4a^2$$

と計算できる。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。(50点)

問１　座標平面上で２つの不等式

$$x^2+y^2 \leqq 12,\ y \geqq x^2$$

によって定まる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

問２　座標平面上で４つの不等式

$$x^2+y^2 \leqq 12,\ y \leqq x^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

によって定まる領域を E とする。E を x 軸の周りに１回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解答　問１　曲線 $x^2+y^2=12$ …①と曲線 $y=x^2$…② の交点の座標を求める。

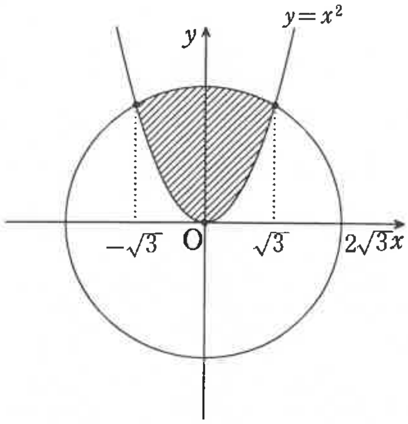
②を①に代入して整理すると，$x^4+x^2-12=0$

左辺を因数分解すると，$(x^2+4)(x^2-3)=0$

x は実数なので，$x^2=3$ より，$x=\pm\sqrt{3}$

よって，交点の座標は $(-\sqrt{3}, 3)$，$(\sqrt{3}, 3)$

右の図の斜線部分の面積 S とすると，



$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(\sqrt{12-x^2}-x^2)dx$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx-2\sqrt{3}$$

ここで，$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$ について，$x=\sqrt{12}\sin t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{12}\cos t$ であり，

x と t の対応は次の通りである。

x	$0 \to \sqrt{3}$
t	$0 \to \dfrac{\pi}{6}$

よって，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{12-12\sin^2 t}\cdot\sqrt{12}\cos t\,dt$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)dt=6\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\pi$$

したがって，$S=2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\pi\right)-2\sqrt{3}=\mathbf{2\pi+\sqrt{3}}$ 答

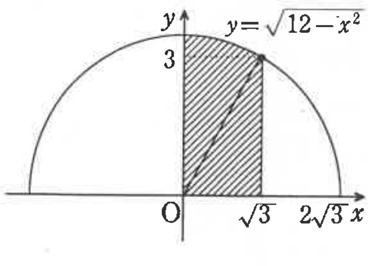
別解（上の曲線①と②の交点を求める部分までは同様。以下の解き方は，置換積分の必要が無い。）

原点と点 $(\sqrt{3}, 3)$ を通る直線の方程式は $y=\sqrt{3}x$ であり，この直線と x 軸の正の向きとのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。また，求める面積の領域は y 軸に関して対称であるから，

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}+\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x-x^2)dx=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})dx=\pi+\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{3})^3=\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より，　$S=2\pi+\sqrt{3}$　答

別解（$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$ を求める計算）



$y=\sqrt{12-x^2}$ のグラフは円の一部なので，右図より，

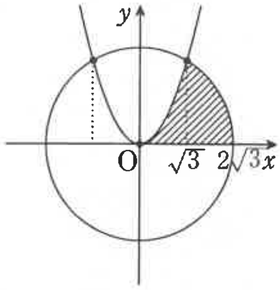
$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

問２　領域Eは右の図の斜線部分であるから，

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(x^2)^2dx+\pi\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}(\sqrt{12-x^2})^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{3}}+\pi\left[12x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{34\sqrt{3}}{5}\pi$$ 答



2　関数$f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$について次の問いに答えよ。(50点)

問１　$\int f(x)dx$を求めよ。

問２　定積分$\int_{\log 2}^{\log 3}xf(x)dx$を求めよ。

解答　問１　$t=e^x-1$とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=e^x$

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{1-e^x}+C\ (C\text{は積分定数})$$ 答

問２　$$\int_{\log 2}^{\log 3}xf(x)dx=\int_{\log 2}^{\log 3}x\left\{\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\right\}dx=\int_{\log 2}^{\log 3}x\left\{\frac{1}{1-e^x}\right\}'dx=\left[\frac{x}{1-e^x}\right]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{dx}{1-e^x}$$

$$=-\frac{1}{2}\log 3+\log 2-\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{dx}{1-e^x}\quad\cdots①$$

ここで，$\int_{\log 2}^{\log 3}\dfrac{dx}{1-e^x}$について，$t=1-e^x$とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=-e^x$であり，

xとtの対応は次の通りである。

x	$\log 2$	$\to$	$\log 3$
t	-1	$\to$	-2

よって，

$$\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{dx}{1-e^x}=\int_{-1}^{-2}\frac{1}{t(t-1)}dt=\int_{-1}^{-2}\left\{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right\}dt=\Big[-\log|t|+\log|t-1|\Big]_{-1}^{-2}=-2\log 2+\log 3$$

これを①に代入すると，

$$\int_{\log 2}^{\log 3}xf(x)dx=-\frac{1}{2}\log 3+\log 2-(-2\log 2+\log 3)=3\log 2-\frac{3}{2}\log 3$$ 答

別解　$\int_{\log 2}^{\log 3}\dfrac{dx}{1-e^x}$については，

$$\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{dx}{1-e^x}=\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=-\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{(e^{-x}-1)'}{e^{-x}-1}=-\Big[\log|e^{-x}-1|\Big]_{\log 2}^{\log 3}=-\log\frac{2}{3}-\log 2$$

$$=-2\log 2+\log 3$$

と計算することも出来る。

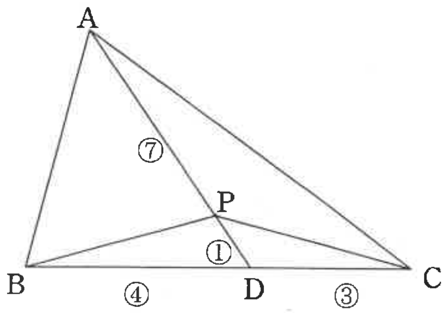
3 △ABC の内部の点 P について，$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。
△ABC の面積を S とするとき，△PBC，△PCA，△PAB の面積をそれぞれ S を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$

$=8\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

$8\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ より；

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{8}=\frac{7}{8}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}$$



であるから，辺 BC を 4:3 に内分する点を点 D とすると，
点 P は線分 AD を 7:1 に内分する点である。
したがって，

$\triangle PBC=\frac{1}{8}S$

$\triangle PCA=\frac{7}{8}\triangle ADC=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{3}{8}S$

$\triangle PAB=\frac{7}{8}\triangle ABD=\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7}S=\frac{4}{8}S=\frac{1}{2}S$ 答

参考 一般に，

> △ABC の内部の点 P について，
> $a\overrightarrow{AP}+b\overrightarrow{BP}+c\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っているとき，
> $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=a:b:c$

である。
問題では，
△ABC の内部の点 P について，
$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っているので，
$\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=1:3:4$
である。
したがって，

$\triangle PBC=\frac{1}{8}S$，$\triangle PCA=\frac{3}{8}S$，$\triangle PAB=\frac{4}{8}S=\frac{1}{2}S$ となる。

4 数直線上の点Pを次の規則で移動させる。一枚の硬貨を投げて，表が出ればPを $+1$ だけ移動させ，裏が出ればPを原点に関して対称な点に移動させる。Pは初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後のPの座標を a_n とする。ただし，n は正の整数とする。このとき，次の問に答えよ。

問１　$a_3=0$ となる確率を求めよ。

問２　$a_4=1$ となる確率を求めよ。

問３　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=-(n-2)$ となる確率を p_n とする。$p_n=\dfrac{1}{2^n}$ であることを示せ。

問４　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を q_n とする。q_n を n を用いて表せ。

解答 問１　硬貨を３回投げた後のPの座標が０になるのは，硬貨が

「裏，裏，裏」または「表，裏，表」の順に出たときであるので，求める確率は $\dfrac{2}{2^3}=\dfrac{1}{4}$ 答

問２　硬貨を４回投げた後のPの座標が１になるのは，硬貨が

「裏，裏，裏，表」または「表，裏，表，表」または「裏，表，裏，裏」の順に出たときであるので，

求める確率は $\dfrac{3}{2^4}=\dfrac{3}{16}$ 答

別解　硬貨を４回投げた後のPの座標が１になる確率を求める。

硬貨を３回投げた後のPの座標が０であるとき，４回目に表が出れば良いので

問１より $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

硬貨を３回投げた後のPの座標が -1 であるとき，４回目に裏が出れば良い。

このとき「裏，表，裏，表」の順に出たときであるので，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

これらは互いに排反だから，求める確率は $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$ 答

問３　硬貨を n 回投げた後のPの座標が $-(n-2)$ になるのは，硬貨が

「裏，$\underbrace{\text{表，……，表}}_{(n-2)\text{個}}$，裏」の順に出たときであるので，$p_n=\dfrac{1}{2^n}$ 答

問４　硬貨を n 回投げた後のPの座標が $n-3$ になるのは，

ⅰ）硬貨を $n-1$ 回投げた後のPの座標が $n-4$ で，n 回目に表が出る

ⅱ）硬貨を $n-1$ 回投げた後のPの座標が $-(n-3)$ で，n 回目に裏が出る

のいずれかの場合である。

硬貨を $n-1$ 回投げた後のPの座標が $n-4$ である確率は，$n-4=(n-1)-3$ より，q_{n-1}

硬貨を $n-1$ 回投げた後のPの座標が $-(n-3)$ である確率は，$-(n-3)=-\{(n-1)-2\}$ より，p_{n-1}

ⅰ）とⅱ）は互いに排反だから，$q_n=\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{2}p_{n-1}$

問３より，$q_n=\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$ …①

これより，$q_n=\dfrac{1}{2}q_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}q_{n-2}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{4}q_{n-2}+\dfrac{2}{2^n}=\cdots=\dfrac{1}{2^{n-3}}q_3+\dfrac{n-3}{2^n}$

問１より，$q_3=\dfrac{1}{4}$ なので，　$q_n=\dfrac{n-1}{2^n}$ 答

別解　①までは同様。①の両辺に 2^n をかけると，$2^nq_n=2^{n-1}q_{n-1}+1$

数列 $\{2^nq_n\}$ $(n\geqq 3)$ は，初項が $n=3$ のとき $2^3q_3=8\cdot\dfrac{1}{4}=2$，

$n=3$	$n=4$	$n=5$		
2	3	4	…	2^nq_n
1	1	…	1	$n-3$ 個

公差１の等差数列なので，$2^nq_n=2+(n-3)\cdot 1=n-1$　したがって，$q_n=\dfrac{n-1}{2^n}$ 答

琉球大学側からの回答

「令和２年度(2020)琉球大学入試問題に関する質問事項」への回答

個別の問題における具体的な回答は差し控えます。それに代わり、以下の総評的なコメントを差し上げます。

１．数学は基礎固めが最重要である。基礎固めができていなければ問題を解けないばかりでなく、解答を読んでも理解できない。一方、基礎固めができていれば、自力で解けない問題でも解答を読んで理解することができる。こうした小さな進歩を積み重ねて、もっと難しい問題集にチャレンジできるようになる。
今回の個別学力試験では、基本的な計算ができていない答案が多く見られた。基礎固めを完璧にするために、教科書を徹底的に使い込むことから始めて欲しい。

２．条件反射的にパターン化された典型問題に当てはめようとして失敗する例が少なくなかった。基本的な知識に基づいて論理的に考える練習をして欲しい。

３．「ケアレスミスは重大な問題である」という認識を持って欲しい。ケアレスミスは「うっかり」とか「治そうと思えばいつでも治せる」といった些細なことだと思っている人は、重大性の認識がないからケアレスミスを繰り返すのである。
「ケアレスミスは自分の将来を左右するかもしれない、絶対に治さなくてはいけない課題である」という自覚を持って欲しい。

４．解答例が琉球大学公式ホームページに公開されているので、適宜参照して欲しい。

以上