令和３年度

第45回高校数学教育を考える会

（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

紙面発表

目次

令和３年度（2021）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質　問　事　項
$\boxed{1}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅱ 数Ａ 数Ⅱ	 円の方程式 整数 指数・対数	 標準 標準 標準	・問１は，境界線を含まないという記述までできていたか。 ・問１は，放物線と円の交点の記述がないものはどのように採点したか。連立方程式として解く必要があったか。（記載のみで良かったか。） ・問２は，ユークリッドの互除法の計算を書いただけのものでよかったか。また，答えだけのものはどのような配点になったか。 ・問３は，置き換えや，$\sqrt{x}>0$ などの記述ができていたか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅱ	 微分法 ・ 積分法	 易 標準 標準	・問１の極値を調べる部分は増減表だけで，「x＝○のとき，極大値●」という記述まで必要だったか。極値をとるときの x までかけていたか。 ・問２がどれくらいの受検生が解けていたか。どこでつまずいているものが多かったか。 ・問２では問題の条件に従って，適するものをしっかり判断出来ていたか。

全体

・受検生の力を見ることが出来る良い構成だったと感じました。点数はうまく分かれたでしょうか。

・$\boxed{1}$ がどれくらいできていたか，採点の感想などを聞きたいです。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和３年度（2021）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅱ	 微分法 ・ 積分法	 易 易 やや難	・問３は，数の大小関係の説明は必要だったか。どれくらいできていたか。 ・問３は，グラフの有無は配点に影響あったか。 ・問３は，問２ができていなくても点数はあったか。 ・間違っている解答は，どこでつまずいていたか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅲ 数Ｂ 数Ⅲ	 微分法 数列 極限	 標準 難 やや難	・問１から証明問題であったが，受検生の出来はどうであったか。問題で与えられたeに大きさをどの程度利用できていたか。 ・問２は，$n=1$ のときに成り立つことの証明はどの程度の割合でできていたか。また，$n=1$のときに成り立つことの証明のみで配点があったか。 ・いろいろな答案があったと想像できるが，採点の感想を聞きたい。 ・医学部医学科はどれくらいできていたか。 ・問題の着想はどんなところからか。
$\boxed{3}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅲ 数Ⅲ 数Ⅱ	 極方程式 微分法 三角関数	 標準 標準 やや難	・x,yの関係式に置き換えることができていたか。 ・$\theta=0$のとき$r=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき$r=1$などと点をとってグラフをかいた受検生はいなかったか。その場合はどのような配点になったか。 ・離心率の公式や事実を知っていて，グラフの概形を書いたものはどのような配点になったか。
$\boxed{4}$ 問１ 問２ 問３	 数Ａ	 確率	 易 標準 標準	・問題の意味を理解できていたか。 ・採点の感想を聞きたいです。 ・記述がしっかりできていたか。式や計算だけのものは点数を与えたか。

全体

・微積分や確率など，頻出の分野からの出題に加え，極方程式や証明問題があり，全体的にバランスの良い出題だったと感じました。数の大小関係の評価や，記述力が求められる印象を受けましたが受検生がどのくらいできていたか気になります。

・共通テストを意識した作問作りをしていく考えはありますか？

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和３年度（2021）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$	数Ⅲ	微分法	やや難	・出題の意図は，計算力を見たかったのでしょうか。 ・凹凸を含めた増減表をかいて解答すれば良かったか。答え方としては，どのようなものが多かったか。 ・x の値は合っているが，y の値が違っているものは減点したか。 ・グラフでは，変曲点の y 座標の大小の評価まで必要だったか。 ・どのような配点・採点基準だったか。
$\boxed{2}$	数Ⅲ	積分法	標準	・三角関数の合成は，α の設定までできていたか。 ・絶対値を外す部分で，$x=\pi-\alpha$ で $f(x)$ の正負が分かれるところなどがしっかりできていたか。
$\boxed{3}$	数Ⅲ	複素数平面	標準	・両辺を割るときに，0 でないという記述の有無で点数が変わったか。 ・正の方向の回転と、負の方向の回転を二つ考えていたか。 ・仮定をして矛盾を導く背理法の流れが最後までできていたか。 ・$\sqrt{3}$ が無理数であることを使う方向で考えられていたか。 ・正答率が聞きたい。
$\boxed{4}$ 問１ 問２ 問３	 数Ａ 数Ａ 数Ａ	 確率 確率 確率	 易 やや易 やや易	・確率の問題であったが，記述ができていたか。 ・問３は，答えが p によらないところがあり，面白いと思いました。 ・確率の出題についての意図や今回の問題設定の意図などはありますか。

全体

・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。

・微分・積分・証明問題，その中にも増減表やグラフの記入・場合分け・背理法などがありバランスの良い出題だったと感じました。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-6x+7$ を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問１　方程式 $f(x)=0$ を解け。

問２　$f(x)$ が $x=\alpha, \beta$（ただし，$\alpha<\beta$）で極値をとるとき，α と β を求めよ（極値を求める必要はない）。

問３　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる領域のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たす部分の面積を求めよ。

解答 問１　$f(1)=2-3-6+7=0$ より $f(x)$ は $x-1$ を因数に持つ。

$f(x)$ を $x-1$ で割ると商は $2x^2-x-7$ であるから

$f(x)=(x-1)(2x^2-x-7)$ より，$f(x)=0$ の解は $x=1, \dfrac{1\pm\sqrt{57}}{4}$ 答

問２　$f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$ より，$f'(x)=0$ のとき $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから，

増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$\alpha<\beta$ より，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 答

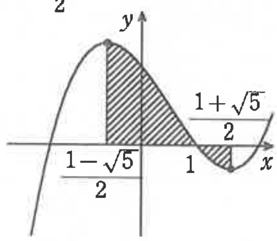
問３　$7<\sqrt{57}<8$ より，$8<1+\sqrt{57}<9$ であるから $2<\dfrac{1+\sqrt{57}}{4}<\dfrac{9}{4}$

$-8<-\sqrt{57}<-7$ より，$-7<1-\sqrt{57}<-6$ であるから $-\dfrac{7}{4}<\dfrac{1-\sqrt{57}}{4}<-\dfrac{3}{2}$

$2<\sqrt{5}<3$ より，$3<1+\sqrt{5}<4$ であるから $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$

$-3<-\sqrt{5}<-2$ より，$-2<1-\sqrt{5}<-1$ であるから $-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<-\dfrac{1}{2}$

以上の大小関係と問１，問２より，求める面積は右図の斜線部分である。



求める面積を S，$F(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^3-3x^2+7x$ とおくと，

$$S=\int_\alpha^1 f(x)dx+\int_1^\beta\{-f(x)\}dx$$
$$=F(1)-F(\alpha)-\{F(\beta)-F(1)\}$$
$$=2F(1)-\{F(\alpha)+F(\beta)\}$$

ここで，$F(1)=\dfrac{1}{2}-1-3+7=\dfrac{7}{2}$，

$$F(\alpha)+F(\beta)=\frac{1}{2}(\alpha^4+\beta^4)-(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)$$

であり，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ より，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot 1=4$$
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=3^2-2\cdot(-1)^2=7$$

より，$S=2\cdot\dfrac{7}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\cdot 7-4-3\cdot 3+7\cdot 1\right)=\dfrac{19}{2}$ 答

別解　$F(\alpha)+F(\beta)$ を求める計算は，

$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ より，$\alpha^2=\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，

$$\alpha^3=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{8-4\sqrt{5}}{4}=2-\sqrt{5},$$

$$\alpha^4=(\alpha^2)^2=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{2^2}=\frac{14-6\sqrt{5}}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$\beta^2=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

$$\beta^3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5},$$

$$\beta^4=(\beta^2)^2=\frac{(3+\sqrt{5})^2}{2^2}=\frac{14+6\sqrt{5}}{4}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

以上より，$\alpha+\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1$，$\alpha^2+\beta^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

$$\alpha^3+\beta^3=2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}=4,\quad \alpha^4+\beta^4=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=7$$

と計算しても良い。

また，$(a+b\sqrt{k})^n=a_n+b_n\sqrt{k}$　（数列 a_n，b_n は有理数とする）のとき

$(a-b\sqrt{k})^n=a_n-b_n\sqrt{k}$ という事実を知っていれば，

問３で $\alpha+\beta$，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，$\alpha^4+\beta^4$ の値は，それぞれ α，α^2，α^3，α^4 の実部の２倍である。

参考　$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，$\alpha^4+\beta^4$ について，

一般に，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\alpha$，β であるとき，

$S_n=\alpha^n+\beta^n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とすると，$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$ が成り立つ。

証明）$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …①

$a\beta^2+b\beta+c=0$ …②

①×α^n ＋②×β^n により　$a(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+b(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+c(\alpha^n+\beta^n)=0$

今回，問２より α，β は２次方程式 $x^2-x-1=0$ の解だから

$S_{n+2}-S_{n+1}-S_n=0$ すなわち $S_{n+2}=S_{n+1}+S_n$ が成り立つ。

$S_0=\alpha^0+\beta^0=2$，$S_1=\alpha+\beta=1$ だから

$\alpha^2+\beta^2=S_2=S_1+S_0=1+2=3$

$\alpha^3+\beta^3=S_3=S_2+S_1=3+1=4$

$\alpha^4+\beta^4=S_4=S_3+S_2=4+3=7$

なお，$L_0=2$，$L_1=1$，$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$ により求められる数 L_0，L_1，L_2，… は
リュカ数と呼ばれる。
今回の S_n は n 番目のリュカ数 L_n に一致する。

2 数列$\{a_n\}$を　$a_1=1$，$a_{n+1}=2e^{-a_n}-1+a_n$ ($n=1,2,3\cdots$)によって定める。次の問いに答えよ。ただし，$2<e<3$であることは証明なしに用いてよい。（50点）

問１　$f(x)=e^{-x}-1+x$ とする。$0<x<1$ のとき，不等式$0<f(x)<\dfrac{2}{3}x$ が成り立つことを示せ。

問２　$b_n=a_n-\log 2$ とする。すべての正の整数nについて$0<b_n<1$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

問３　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解答　問１　$f'(x)=-e^{-x}+1$ である。$0<x<1$ のとき，$-1<-x<0$ より，$\dfrac{1}{e}<e^{-x}<1$ …①

$-1<-e^{-x}<-\dfrac{1}{e}$ より，$0<-e^{-x}+1<-\dfrac{1}{e}+1$ であるから，$f'(x)>0$ より $f(x)$ は単調増加

また，$f(0)=0$ より $0<x<1$ のとき，$f(x)>0$ …②

$g(x)=\dfrac{2}{3}x-f(x)=-e^{-x}+1-\dfrac{1}{3}x$ とおくと，$g'(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{3}$

$0<x<1$ のとき，①より $\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}<e^{-x}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{2}{3}$ であり，

$2<e<3$ より，$\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3-e}{3e}>0$ であるから，$g'(x)>0$ より $g(x)$ は単調増加

また，$g(0)=0$ より $0<x<1$ のとき，$g(x)>0$ すなわち，$f(x)<\dfrac{2}{3}x$ …③

②，③より，$0<x<1$ のとき，不等式$0<f(x)<\dfrac{2}{3}x$ が成り立つ。　**終**

別解　（$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ単調増加であることの証明部分）

$f'(x)=-e^{-x}+1$　より，$f''(x)=e^{-x}>0$ である。$f'(x)$ は単調増加かつ $f'(0)=0$ であるから，$0<x<1$ のとき $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調増加

$g'(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{3}$，$g''(x)=-e^{-x}<0$ である。$g'(x)$ は単調減少かつ $g'(1)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3-e}{3e}>0$ であるから，$0<x<1$ のとき，$g'(x)>0$ より $g(x)$ は単調増加

問２　すべての正の整数nについて$0<b_n<1$ …④ となることを，数学的帰納法を用いて証明する。

（i）$n=1$ のとき　$b_1=a_1-\log 2=1-\log 2=\log\dfrac{e}{2}$

$2<e<3$ より $1<\dfrac{e}{2}$ かつ $\dfrac{e}{2}<e$ であるから $\log 1<\log\dfrac{e}{2}<\log e$ すなわち，$0<b_1<1$

よって，④は$n=1$ のときに成り立つ。

（ii）$n=k$ のとき，すべての正の整数kについて$0<b_k<1$ …⑤　となると仮定する。

$n=k+1$ のとき，

$$b_{k+1}=a_{k+1}-\log 2=2e^{-a_n}-1+a_n-\log 2=e^{\log 2}\cdot e^{-a_n}-1+a_n-\log 2$$

$$=e^{-(a_n-\log 2)}-1+a_n-\log 2=e^{-b_n}-1+b_n=f(b_k)$$

ここで，問１より，$0<f(b_k)<\dfrac{2}{3}b_k$ であるから $0<b_{k+1}<\dfrac{2}{3}b_k$ …⑥

⑤，⑥より $0<b_{k+1}<\dfrac{2}{3}<1$ が成り立つ。

よって，④は $n=k+1$ のときも成り立つ。

（i），（ii）よりすべての正の整数nについて$0<b_n<1$ は成り立つ。　**終**

別解　（ｉ）までは解答と同様

（ii）$n=k$ のとき，すべての正の整数 k について $0<b_k<1$ すなわち，$0<a_k-\log 2<1$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，$b_{k+1}=a_{k+1}-\log 2=2e^{-a_n}-1+a_n-\log 2$

いま，仮定より $\log 2<a_k<1+\log 2=\log 2e$ だから $-\log 2e<-a_k<-\log 2$

$e>1$ より，$e^{-\log 2e}<e^{-a_k}<e^{-\log 2}$ であるから $\dfrac{1}{2e}<e^{-a_k}<\dfrac{1}{2}$

したがって，$\dfrac{1}{e}<2e^{-a_k}<1$ …⑦

また，仮定より $0<a_k-\log 2<1$ だから $-1<a_k-\log 2-1<0$ …⑧

よって，⑦，⑧の辺々を加えると $\dfrac{1}{e}-1<b_{k+1}<1$ すなわち $0<\dfrac{e-1}{e}<b_{k+1}<1$ だから

④は $n=k+1$ のときも成り立つ。

（ｉ），（ii）よりすべての正の整数 n について $0<b_n<1$ は成り立つ。　終

問３　⑥より，十分大きい n について，

$$0<b_n<\frac{2}{3}b_{n-1}<\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot b_{n-2}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}b_1=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-\log 2)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-\log 2)=0$ より，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-\log 2)=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{\log 2}$　答

参考　マクローリンの定理の剰余項による問１の別解

> マクローリンの定理
>
> C^n 級の関数 $f(x)$ について，$\displaystyle f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$
>
> を満たす $c=c(x)$ が，０と x の間に存在する。なお，$\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$ を剰余項という。

$(e^{-x})'=-e^{-x}$，$(e^{-x})''=e^{-x}$ であるから，関数 $e^{-x}\ (x>0)$ にマクローリンの定理を適用して

$e^{-x}=e^0+\dfrac{-e^0}{1!}x+\dfrac{e^{-c}}{2!}x^2$，$0<c<x$ を満たす $c=c(x)$ が存在する。

すなわち　$e^{-x}=1-x+\dfrac{e^{-c}}{2}x^2$ より，$f(x)=e^{-x}-1+x=\dfrac{e^{-c}}{2}x^2$

$0<c<x$ により $0<e^{-x}<e^{-c}<e^0$ だから　$0<\dfrac{e^{-x}}{2}x^2<\dfrac{e^{-c}}{2}x^2<\dfrac{x^2}{2}$

$0<x<1$ のとき $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{6}x(3x-4)<0$ だから，$\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{2}{3}x$

よって　$0<\dfrac{e^{-c}}{2}x^2<\dfrac{2}{3}x$ により，$0<f(x)<\dfrac{2}{3}x$

3　xy 平面上で，極方程式 $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ により与えられる曲線 C を考える。次の問いに答えよ。（50点）

問１　曲線 C の概形を図示せよ。

問２　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とし，曲線 C 上の，極座標が (r,θ) である点Pを考える。点Pにおける曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であることを示せ。

問３　問２の点Pから y 軸におろした垂線と y 軸との交点をH，原点をOとする。∠OPHの二等分線と，点Pにおける曲線 C の接線は直交することを示せ。

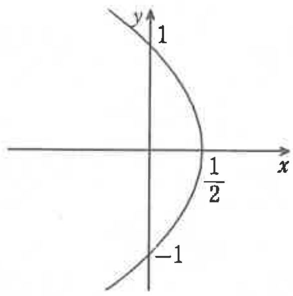
解答　問１　$r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ より，$r(1+\cos\theta)=1$　$r+r\cos\theta=1$　$r=1-r\cos\theta$

両辺を２乗して　$r^2=(1-r\cos\theta)^2$

$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ であるから，

$x^2+y^2=(1-x)^2$　$y^2=1-2x$　$x=-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$

よって，曲線 C の概形は右図の放物線になる。　答



問２　$y^2=1-2x$ の両辺を x で微分すると，

$2yy'=-2$ より，$y\neq0$ なので $y'=-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{r\sin\theta}=-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

よって，点Pにおける曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ である。　答

別解　$r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ より，$\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{-(1+\cos\theta)'}{(1+\cos\theta)^2}=\dfrac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d(r\sin\theta)}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\sin\theta+r\cos\theta=\frac{\sin^2\theta+r\cos\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d(r\cos\theta)}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\cos\theta+r\cdot(-\sin\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}=-\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

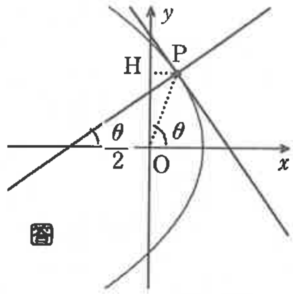
以上より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\dfrac{1}{(1+\cos\theta)}}{-\dfrac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}}=-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

よって，Pにおける曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ である。　答

問３　∠OPH の二等分線と x 軸正の向きとのなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ なので，直線の傾きは $\tan\dfrac{\theta}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\tan\dfrac{\theta}{2}$ であるから，

$$\tan\frac{\theta}{2}\cdot\left(-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\cdot\left(-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}{\sin\theta}=-1$$



よって，∠OPH の二等分線と，点 P における曲線 C の接線は直交する。 答

別解　（$\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\left(-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=-1$ の計算部分）

$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とすると $\tan\dfrac{\theta}{2}\cdot\left(-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\tan\alpha\cdot\left(-\dfrac{1+\cos2\alpha}{\sin2\alpha}\right)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\left(-\dfrac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)=-1$

別解　極座標 (r,θ) の直交座標を (x,y) とする。問２より，点 $\mathrm{P}(x,y)$ における曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1}{y}$ であるから，点 P を通り，点 P における曲線 C の接線と直交する直線の方程式は，

$Y-y=y(X-x)$ より，$Y=yX-y(x-1)$ となる。

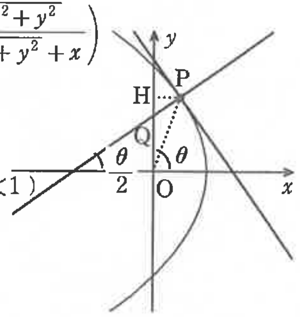
いま，∠OPH の二等分線と y 軸との交点を Q とすると，$\mathrm{OQ}:\mathrm{HQ}=\mathrm{PO}:\mathrm{PH}=\sqrt{x^2+y^2}:x$

$\mathrm{H}(0,y)$ だから $\mathrm{OQ}=y\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$　すなわち，$\mathrm{Q}\left(0,\ y\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

ここで，$y\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=\dfrac{y\sqrt{x^2+(1-2x)}}{\sqrt{x^2+(1-2x)}+x}=\dfrac{y|x-1|}{|x-1|+x}$

$=\dfrac{y\{-(x-1)\}}{-(x-1)+x}$　（問１のグラフより $x<1$）

$=-y(x-1)$



また，直線 PQ の傾きは，$\dfrac{y-\{-y(x-1)\}}{x}=y$ である。

よって，点 P を通り，点 P における曲線 C の接線と直交する直線 $Y=yX-y(x+1)$ が ∠OPH の二等分線である。

以上より，∠OPH の二等分線と，点 P における曲線 C の接線は直交する。 答

参考　$\boxed{離心率\ e}$

点 P の極方程式が $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ とする，

点 A の極座標（a,0），A を通り始線 OX に垂直な直線を ℓ，

点 P から直線 ℓ におろした垂線を PH とするとき，

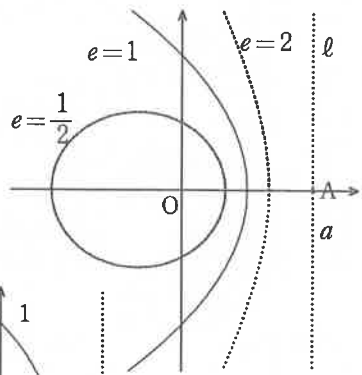
OP : PH $=e:1$ であり，

（ⅰ）　$0<e<1$ のとき，楕円

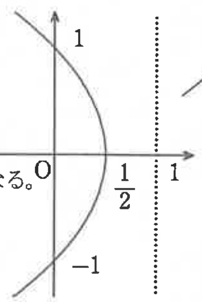
（ⅱ）　$e=1$　のとき，放物線

（ⅲ）　$e>1$　のとき，双曲線

となり，この e を離心率という。



$\boxed{3}$ は $e=1$，$a=1$ の場合なので，曲線 C の概形は右の放物線になる。



参考 放物線の焦点

図１のように，左側からx軸と並行な方向に向かってくる光は，放物線で反射して焦点に集まる。
（このことはパラボラアンテナ等に利用される）
図２のように，放物線上の点Pにおける接線をℓとして，$\angle\alpha$と$\angle\alpha'$を考える。
図３の点Pにおける法線ℓ'を引くとき，$\angle\alpha=\angle\alpha'$で光が反射することを考えると，
$\angle\beta=90^\circ-\angle\alpha=90^\circ-\angle\alpha'=\angle\beta'$となる。
今回の問題は，図３のように，$\angle$OPHの二等分線は法線ℓ'と一致することを出題している。

図１

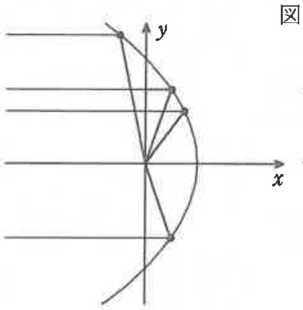


図２

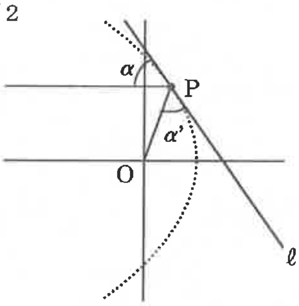
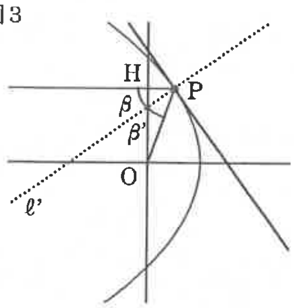


図３



4 袋Aには赤玉が１個と白玉が２個，袋Bには赤玉が３個と白玉が２個入っている。袋Bから玉を２個取り出して袋Aに入れ，よく混ぜてから，袋Aから玉を１個取り出して，色を見てから袋Aに戻す。さらに，よく混ぜてから，もう一度袋Aから玉を１個取り出す。このとき，次の問いに答えよ。（50点）

問１　袋Bに白玉がちょうど１個残っている確率を求めよ。

問２　袋Aから最初に取り出す玉が白玉である確率を求めよ。

問３　袋Aから二度とも白玉を取り出す確率を求めよ。

解答　問１　袋Bに白玉がちょうど１個残っているのは，袋Bから白玉１個と赤玉１個を取り出す場合である。

よって，求める確率は $\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{6}{10}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$ 答

問２　袋Aから最初に取り出す玉が白玉であるのは，

（ｉ）袋Bから白玉２個を取り出し，袋Aから白玉を取り出す場合
（ii）袋Bから白玉１個，赤玉１個を取り出し，袋Aから白玉を取り出す場合
（iii）袋Bから赤玉２個を取り出し，袋Aから白玉を取り出す場合

のいずれかであり，これらは互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{4}{5}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\frac{3}{5}+\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{6}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{4+18+6}{50}=\frac{28}{50}=\boldsymbol{\frac{14}{25}}$$ 答

問３　袋Aから最初に取り出す玉が白玉であるのは，

（ｉ）袋Bから白玉２個を取り出し，袋Aから白玉を２回取り出す場合
（ii）袋Bから白玉１個，赤玉１個を取り出し，袋Aから白玉を２回取り出す場合
（iii）袋Bから赤玉２個を取り出し，袋A から白玉を２回取り出す場合

のいずれかであり，これらは互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{10}\times\frac{16}{25}+\frac{6}{10}\times\frac{9}{25}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{25}$$

$$=\frac{16+54+12}{250}=\frac{82}{250}=\boldsymbol{\frac{41}{125}}$$ 答

1　次の問いに答えよ。（50点）

問１　不等式$(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$ の表す領域を図示せよ。

問２　15334 と 30381 の最大公約数を求めよ。

問３　方程式$2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$ を解け。

解答　問１　求める領域は，不等式$(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$ より，

$$\begin{cases} x^2+y^2-2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2-2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x^2+y^2>2 \\ y>x^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2<2 \\ y<x^2 \end{cases}$$

の表す領域である。

放物線$y=x^2$…①と円$x^2+y^2=2$…②の交点を求める。

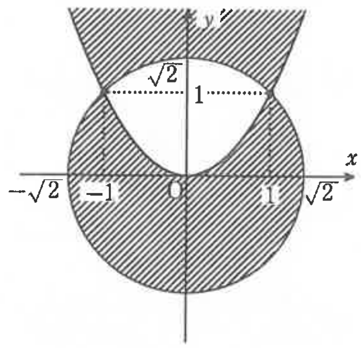
①を②に代入すると，$x^2+x^4=2$ より$(x^2+2)(x^2-1)=0$

xは実数なので，$x=1,-1$

よって，交点は$(1,1)$と$(-1,1)$

したがって，表す領域は右図の斜線部分である。

ただし，境界線は含まない。　答



問２　ユークリッドの互除法より，

$30381=15334\times1+15047$

$15334=15047\times1+287$

$15047=287\times52+123$

$287=123\times2+41$

$123=41\times3$

したがって，15334 と 30381 の最大公約数は **41**　答

問３　$2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$ より，$(\sqrt{2})^{2x}-\sqrt{2}(\sqrt{2})^x-4=0$

$(\sqrt{2})^x=t$ とおくと，$t^2-\sqrt{2}t-4=0$

左辺を因数分解すると，$(t+\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$

$t>0$ より，$t=2\sqrt{2}$

よって，$(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}$ より $\boldsymbol{x=3}$　答

2 関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ について，次の問いに答えよ。(50点)

問１　$y=f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかけ。

問２　曲線 $y=f(x)$ について，傾きが９で y 切片が正である接線の方程式を求めよ。

問３　問２で求めた接線と曲線 $y=f(x)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

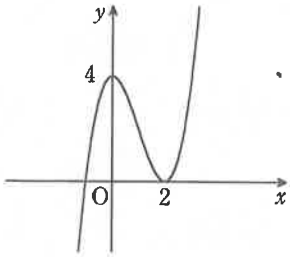
解答　問１　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき $x=0,2$ であるから，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

よって，**$x=0$ のとき極大値４，$x=2$ のとき極小値０**をとる。

したがって，グラフは右図のようになる。　答



問２　$f'(x)=3x^2-6x$ より，傾きが９のとき，$3x^2-6x=9$

これを解くと，$3(x-3)(x+1)=0$　より　$x=3,-1$

（i）$x=3$ のとき，$f(3)=4$ より，

接線の方程式は，$y-4=9(x-3)$　より　$y=9x-23$

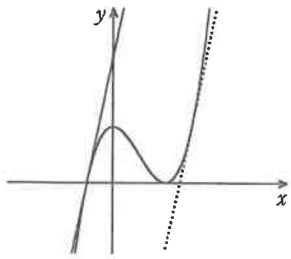
これは，y 切片が負であるので不適。

（ii）$x=-1$ のとき，$f(-1)=0$ より，

接線の方程式は，$y-0=9(x+1)$　より　$y=9x+9$

これは，y 切片が正であるので適する。

以上より，求める接線の方程式は，$\boldsymbol{y=9x+9}$　答



問３　問２より，$y=9x+9$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標を求めると

$x^3-3x^2+4=9x+9$　整理すると，$(x+1)^2(x-5)=0$　$x=-1,5$

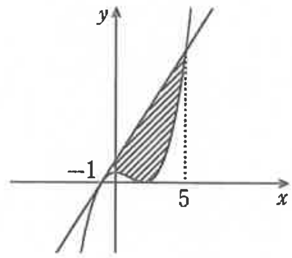
求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{5}\{9x+9-(x^3-3x^2+4)\}dx=\int_{-1}^{5}(-x^3+3x^2+9x+5)dx$$

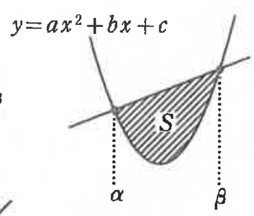
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{9}{2}x^2+5x\right]_{-1}^{5}$$

$$=-\frac{1}{4}\{5^4-(-1)^4\}+\{5^3-(-1)^3\}+\frac{9}{2}\{5^2-(-1)^2\}+5\{5-(-1)\}$$

$=108$　答



参考



放物線と直線で囲まれた部分の面積を求める公式　$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

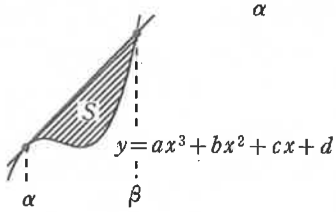
や，３次関数のグラフとその接線で囲まれた部分の面積を求める公式

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

などあるが，後者を利用すると，

$$S=\frac{1}{12}\{5-(-1)\}^4=108$$

である。



$\boxed{1}$ 関数 $y=x^3e^{-x^2}$ の増減，極値および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，$\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}=0$，$\lim_{x\to-\infty}x^3e^{-x^2}=0$ であることは証明なしに用いてよい。(50点)

解答 $y=x^3e^{-x^2}$ より，$y'=3x^2e^{-x^2}+x^3\cdot(-2x)e^{-x^2}=(3x^2-2x^4)e^{-x^2}$

$$y''=(6x-8x^3)e^{-x^2}+(3x^2-2x^4)\cdot(-2x)e^{-x^2}=(6x-14x^3+4x^5)e^{-x^2}$$

$$=2x(3-7x^2+2x^4)e^{-x^2}=2x(2x^2-1)(x^2-3)e^{-x^2}$$

$y'=0$ のとき $x=0,\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$y''=0$ のとき，$x=0,\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，

この関数の凹凸を含めた増減表は以下のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{e^3}$	↘	$-\left(\dfrac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$	↗	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2e}}$	↗		↗	$\dfrac{1}{2\sqrt{2e}}$	↗	$\left(\dfrac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$	↘	$\dfrac{3\sqrt{3}}{e^3}$	↘

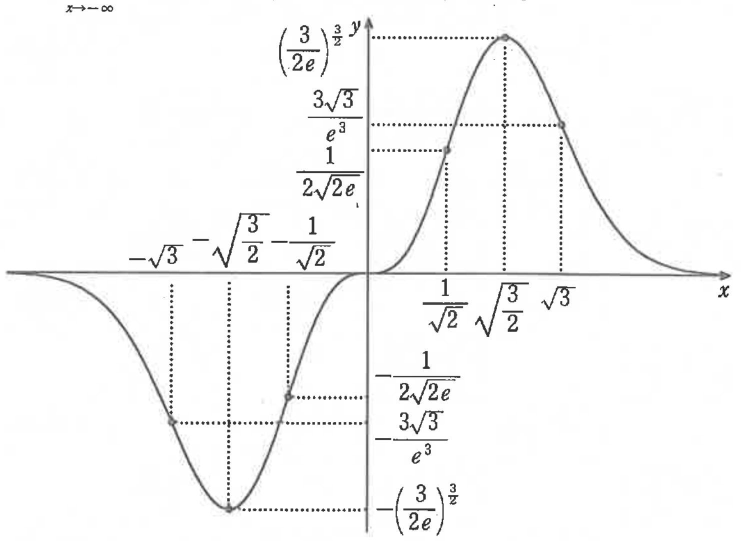
以上より，この関数は $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\leqq x\leqq\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **のときに増加**，$x<-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$\sqrt{\dfrac{3}{2}}<x$ **のときに減少** し，

$x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **のとき極小値** $-\left(\dfrac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$，$x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **のとき極大値** $\left(\dfrac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ をとる。

$x\leqq-\sqrt{3}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ **のときに上に凸，**

$-\sqrt{3}<x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{3}<x$ **のときに下に凸** である。

また，$\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}=0$，$\lim_{x\to-\infty}x^3e^{-x^2}=0$ より，グラフは次のようになる。



2　定積分 $\int_0^{\pi}|3\sin x+\cos x|dx$ を求めよ。 (50点)

解答　$f(x)=3\sin x+\cos x$ とおく。

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となる α をとると, $f(x)=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$

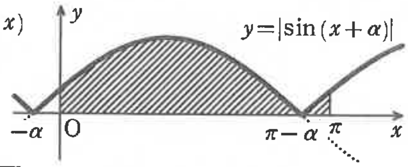
$0<x<\pi$ のとき $0<x+\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから,

$f(x)=0$ すなわち $\sin(x+\alpha)=0$ のとき, $x+\alpha=\pi$ より $x=\pi-\alpha$

よって, $0\leqq x<\pi-\alpha$ のとき $|3\sin x+\cos x|=3\sin x+\cos x$

$\pi-\alpha\leqq x\leqq\pi$ のとき $|3\sin x+\cos x|=-(3\sin x+\cos x)$

であるから,



$$\int_0^{\pi}|3\sin x+\cos x|dx=\int_0^{\pi-\alpha}\{f(x)\}dx+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\{-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^{\pi-\alpha}\{\sqrt{10}\sin(x+\alpha)\}dx+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\{-\sqrt{10}\sin(x+\alpha)\}dx$$

$$=\sqrt{10}\Big[-\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\pi-\alpha}-\sqrt{10}\Big[-\cos(x+\alpha)\Big]_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$=-\sqrt{10}\{\cos\pi-\cos\alpha\}+\sqrt{10}\{\cos(\pi+\alpha)-\cos\pi\}$$

$$=-\sqrt{10}\left(-1-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\sqrt{10}\left\{(-1)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-0\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-(-1)\right\}=\mathbf{2\sqrt{10}}\quad\text{答}$$

別解　(定積分の計算部分)

$$\int_0^{\pi}|3\sin x+\cos x|dx=\int_0^{\pi-\alpha}(3\sin x+\cos x)dx+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\{-(3\sin x+\cos x)\}dx$$

$$=3\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi-\alpha}+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi-\alpha}-3\Big[-\cos x\Big]_{\pi-\alpha}^{\pi}-\Big[\sin x\Big]_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

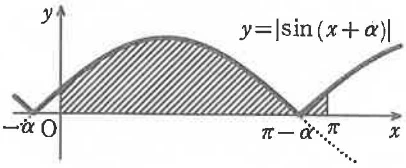
$$=-3\{\cos(\pi-\alpha)-\cos 0\}+\{\sin(\pi-\alpha)-\sin 0\}$$

$$+3\{\cos\pi-\cos(\pi-\alpha)\}-\{\sin\pi-\sin(\pi-\alpha)\}$$

$$=-3\left\{(-1)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+0\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-1\right\}+\left\{0\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}-0\right\}$$

$$+3\left\{(-1)-(-1)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-0\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}-\left\{0-0\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$$

$$=\mathbf{2\sqrt{10}}\quad\text{答}$$



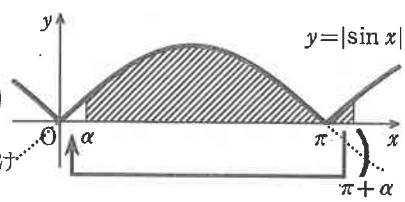
別解　$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となる α をとると

$3\sin x+\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$

よって, $S=\int_0^{\pi}|3\sin x+\cos x|dx$ とおくと $S=\sqrt{10}\int_0^{\pi}|\sin(x+\alpha)|dx$

曲線 $y=|\sin(x+\alpha)|$ を x 軸方向に α だけ平行移動すると

曲線 $y=|\sin x|$ に一致するから



$S=\sqrt{10}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}|\sin x|dx=\sqrt{10}\left(\int_{\alpha}^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{\pi+\alpha}|\sin x|dx\right)$

$\int_{\pi}^{\pi+\alpha}|\sin x|dx$ について, 曲線 $y=|\sin x|$ を x 軸方向に $-\pi$ だけ

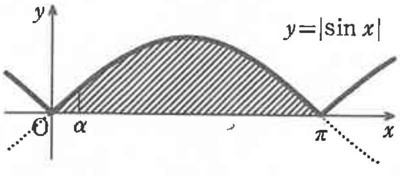
平行移動すると曲線 $y=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$ に一致するから $\int_{\pi}^{\pi+\alpha}|\sin x|dx=\int_0^{\alpha}|\sin x|dx$

よって, $S=\sqrt{10}\left(\int_{\alpha}^{\pi}|\sin x|dx+\int_0^{\alpha}|\sin x|dx\right)=\sqrt{10}\int_0^{\pi}|\sin x|dx$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $\sin x \geqq 0$ だから　$|\sin x| = \sin x$

よって，$S = \sqrt{10}\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \sqrt{10}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= \sqrt{10}(-1-1) = \mathbf{2\sqrt{10}}$　答



3　α，β は複素数で，α の実部，虚部はどちらも０でない有理数であるとする。複素数平面上で３点 O(0)，A(α)，B(β) が正三角形の頂点となっているとき，β の実部，虚部はどちらも無理数であることを示せ。ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。（50点）

解答　$\alpha = a + bi$（a，b は０でない有理数），$\beta = c + di$（c，d は実数）とする。

点Bは点Aを原点を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点であるから，

$$c + di = \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(a+bi) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a+bi) = \frac{a \mp \sqrt{3}\,b}{2} + \frac{\pm\sqrt{3}\,a + b}{2}i \text{（複号同順）}$$

よって，$c = \dfrac{a \mp \sqrt{3}\,b}{2}$，$d = \dfrac{\pm\sqrt{3}\,a + b}{2}$（複号同順）

ここで，β の実部すなわち c が有理数であると仮定すると，$c = \dfrac{a \mp \sqrt{3}\,b}{2}$ より $\sqrt{3} = \mp\dfrac{2c-a}{b}$ …①

β の虚部すなわち d が有理数であると仮定すると，$d = \dfrac{\pm\sqrt{3}\,a + b}{2}$ より $\sqrt{3} = \pm\dfrac{2d-b}{a}$ …②

①，②はともに左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾する。

したがって，β の実部，虚部はどちらも無理数である。　答

4　原点Oから出発して座標平面内を移動する点Aを考える。点Aは，１回ごとに，確率 p で x 軸の正の向きに１だけ移動し，確率 $1-p$ で y 軸の正の向きに１だけ移動する。ここで，$0 < p < 1$ である。

点A が14回移動するとき，

- E を「点A が座標平面内の点 P(5，4) を通る」という事象
- F を「点A が座標平面内の点 Q(7，7) に到達する」という事象

とする。このとき，次の問いに答えよ。（50点）

問１　事象 E が起こる確率 $P(E)$ を求めよ。

問２　事象 E が起こったときの事象 F の条件付き確率 $P_E(F)$ を求めよ。

問３　事象 F が起こったときの事象 E の条件付き確率 $P_F(E)$ を求めよ。

解答　問１　点Pを通るのは，９回移動したときに，５回は x 軸方向，４回は y 軸方向に移動するときであるから，

$$P(E) = {}_9\mathrm{C}_5\, p^5(1-p)^4 = \mathbf{126p^5(1-p)^4}$$　答

問２　点Pを通って，点Qに到達するのは，点Pを通ったあとの５回の移動について，２回は x 軸方向，３回は y 軸方向に移動するときであるから，

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{{}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2\, p^7(1-p)^7}{{}_9\mathrm{C}_5\, p^5(1-p)^4} = \mathbf{10p^2(1-p)^3}$$　答

問３　点Pを通って，点Qに到達するのは，点Pを通ったあとの５回の移動について，２回は x 軸方向，３回は y 軸方向に移動するときであるから，

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{{}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2\, p^7(1-p)^7}{{}_{14}\mathrm{C}_7\, p^7(1-p)^7} = \mathbf{\frac{105}{286}}$$　答