

令和 4 年度

第 4 6 回高校数学教育を考える会 (沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学)

目次

令和 4 年度	琉球大学入試試験問題についての感想と質問 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 0
前期日程	乙	1 1
後期日程		1 2
令和 4 年度	琉球大学入試問題 解答例 (高数教 大学入試問題検討委員会)	
前期日程	甲	1 3 ～ 1 8
前期日程	乙	1 9 ～ 2 1
後期日程		2 2 ～ 2 4

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(前期・乙)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易 度	質 問 事 項
1 問1 問2 問3	数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅱ	三角関数 指数・対数 式と方程式	標準 標準 易	- 問1は、第一象限のみの場合はどのような採点になったか。 - 問1は、直角三角形を書いて求めたものが多かったか。 - 問2は、大小関係、不等号、等号などの記述が出きていたか。 - 全体的にどのような部分点、減点があったか。
2 問1 問2	数Ⅱ 数Ⅱ	微分法 積分法	標準 標準	2つの放物線の頂点のx座標が同じなのは意図があったか。 - 計算をしやすくするための対称性の利用や説明はできていたか。 - 違う部分の面積を求めてしまったものはなかったか。あればどのような採点になったか。 - 計算量が多かったと思うが、しっかり立式や計算ができていたか。 - 問1ができないと問2もできない形でしたが、どうだったでしょうか。
全体 - すべて数学Ⅱからの出題でしたが、 1 、 2 それぞれのできはどうだったでしょうか。 - 受検生の力を見ることが出来る良い構成だったと感じました。点数はうまく分かれたでしょうか。 - どれくらいできていたか、採点の感想などを聞きたいです。				

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(前期・甲)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2 問3	数Ⅲ	微分法・ 積分法	易 標準 やや難	- 問3は、グラフの概形をかく場合、極限を考える必要があったが、どうだったか。 - 直線と曲線の上下関係がしっかり求められていたか。
2 問1 問2 問3	数B 数B 数B	数列 数列 数列	標準 標準 やや難	- 問1で生徒が普段使っている公式を証明させ、問2、問3ではそれを拡張する内容を扱う非常に良い出題だと思いました。難易度としても良かったです。 - 数学的帰納法の記述や、与えられた恒等式を利用した記述はできていたか。 3つとも証明問題であり、受検生の証明する力が見られたのではないか。出来はどうであったか。
3 問1 問2	数B 数Ⅲ	空間ベクトル 微分法	標準 標準	- 基本的な空間図形であるうえに、内分する辺の比もシンプルで良問でした。 - 最小値を求める際は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ と $\frac{\sqrt{21}}{14}$ の大小の比較、説明は必要であったか。答えのみで良かったか。
4 問1 問2 問3	数A 数A 数A	場合の数	標準 標準 やや難	- 問題の条件や意味を理解できていたか。 - 考え方や解き方がどうだったか。説明がしっかりできていたか。採点の感想を聞きたいです。
全体 微積分や証明、空間図形、場合の数など、幅広い範囲からの出題だと感じました。証明や場合の数を解く際の記述力が求められる印象を受けましたが受検生がどのくらいできていたか気になります。				

(注：易・標準・難は教科書レベルにおいて)

令和4年度(2022)琉球大学入試問題(後期)に関する質問事項

問題 番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問1 問2	数Ⅱ 数Ⅱ	式と方程式 微分法	標準 標準	・3つの実数解を求めた時点で部分点があったか。 ・問1で2番目に大きいものを特定する際、どのような考え方をしていたか。(単調増加か、不等式で考えるか) ・問2で、不等式の両辺を2乗する際に、両辺共に正であることを言えていたか。 ・式 $x = p + (1-p)x^3$ が $(1-p)x^3 - x + p = 0$ でない意味はありますか？x に α を代入して次数下げのようなことも考えましたがうまくいきませんでした。 ・問題の着想はどんなところからか。
2 問1 問2	数Ⅲ	積分法	標準	・区分求積法をつかえていたか。 ・根拠が不十分で、答えのみだったもの(不等式を用いていないもの)などはどのような採点になったか。
3	数Ⅲ	積分法	標準	・絶対値の外し方、場合分けなどができていたか。 ・「$1 < k$ のとき」を考えていないものは減点になったか。
4 問1 問2	数A 数A	整数 整数	標準 標準	・利用する等式を与えているが、どのような理由で与えることになったか。与えないことも検討したか。 ・問2は考え方・内容ともに問1と変わらない感じがしますが、実際受験生はどうでしたか。
全体 ・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。 ・区分求積法や積分の定数部分の置き換えなど、生徒に知っていてほしい範囲からの出題が多く良問に感じました。				

(注: 易・標準・難は教科書レベルにおいて)

1 $x > 0$ の範囲で、関数 $f(x)$ を $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$ と定め、 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。次の問いに答えよ。

(50点)

問1 $f(x)$ の極値を求めよ。

問2 曲線 C の接線で、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが負であるものを ℓ とする。直線 ℓ の傾きを求めよ。

問3 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 問1 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ とすると、 $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} = \frac{-2(x-1)}{x^3}$ より、増減表は以下のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+		-
$f(x)$	/	↗	極大	↘

したがって、 $f(x)$ は $x=1$ のとき、極大値 1 をとる。 **答**

別解 $f(x) = -x^{-2} + 2x^{-1}$ として、 $f'(x) = 2x^{-3} - 2x^{-2} = 2x^{-3}(1-x)$ と計算しても良い。

問2 曲線 C 上の点 $(t, -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t})$ における接線の方程式は $y - (-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}) = \frac{-2(t-1)}{t^3}(x-t)$...①

接線が点 $(0, 1)$ を通るので、 $1 - (-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}) = \frac{2t(t-1)}{t^3}$

これを整理すると、 $t(t^2 - 4t + 3) = 0$ であり、 $t > 0$ より、これを解くと $t = 1, 3$

$f'(1) = 0$ 、 $f'(3) = -\frac{4}{27}$ であり、直線 ℓ の傾きは負であることから、求める傾きは $-\frac{4}{27}$ **答**

参考 接線の方程式を $y = ax + 1$ として、方程式 $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = ax + 1$ を作り a を求めようとしても

$ax^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ となり、うまくいかない。

問3 直線 ℓ は点 $(0, 1)$ を通るので、切片が 1 であるから、直線 ℓ の方程式は、 $y = -\frac{4}{27}x + 1$...②である。

曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標を求める。

$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = -\frac{4}{27}x + 1$ を整理すると、 $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$

左辺を因数分解すると、 $(x-3)^2(4x-3) = 0$ より、 $x = 3, \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \leq x \leq 3$ のとき、

$(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}) - (-\frac{4}{27}x + 1) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 54x - 27}{27x^2} = \frac{(x-3)^2(4x-3)}{27x^2} \geq 0$ であるから

$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \geq -\frac{4}{27}x + 1$ となる。

よって求める面積は、

$\int_{\frac{3}{4}}^3 \left((-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}) - (-\frac{4}{27}x + 1) \right) dx = \left[\frac{1}{x} + 2\log|x| + \frac{2}{27}x^2 - x \right]_{\frac{3}{4}}^3 = 4\log 2 - \frac{21}{8}$ **答**

参考 $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$ の左辺を因数分解する際、問2より曲線 C と直線 ℓ は $x = 3$ で接するので、左辺は $(x-3)^2$ を因数に持つことを利用する。

【参考】

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2(x-1)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{-2 \cdot x^3 - (-2x+2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2(2x-3)}{x^4} \text{ より,}$$

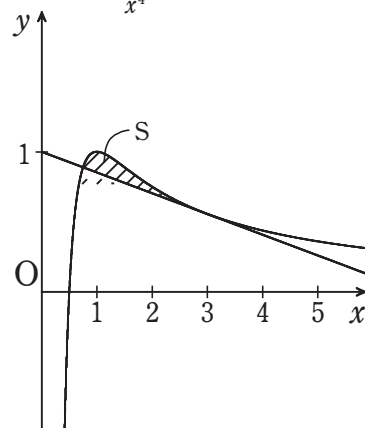
増減とグラフの凹凸は以下になる。

x	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	/	+		-		-
$f''(x)$	/	-		-		+
$f(x)$		↗	極大	↘		↘

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{-1+2x}{x^2} \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right) = 0$$

より, グラフは右図のようになり, 問3で求める面積の領域は斜線部分になる。



2 d と n を正の整数とする。1 から n までの d 乗の和を $S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1 すべての正の整数 n について, $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。

問2 恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ を利用して, $S_5(n)$ を求めよ。

問3 すべての正の整数 n について, $24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れることを示せ。

【解答】 問1 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \dots \text{①}$ とする。

すべての正の整数 n について, ①が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき, (左辺) $= 1^3 = 1$ (右辺) $= \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1$ より, ①は $n=1$ のときに成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき, 正の整数 k について $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} S_3(k+1) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2}{4} \end{aligned}$$

よって, ①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より, すべての正の整数 n について $S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ は成り立つ。 

問2 恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ より, $k^5 = \frac{1}{6} \{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 - 2k^3\}$

したがって,

$$\begin{aligned} S_5(n) &= 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 \\ &= \frac{1}{6} \{1^3 \cdot 2^3 - 0^3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^3\} + \frac{1}{6} \{2^3 \cdot 3^3 - 1^3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^3\} + \cdots + \frac{1}{6} \{n^3(n+1)^3 - (n-1)^3n^3 - 2n^3\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ -2(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + n^3(n+1)^3 \right\} = \frac{1}{6} \left\{ -2 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + n^3(n+1)^3 \right\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12} \quad \text{答} \end{aligned}$$

問3 $k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 = 8k^7 + 8k^5$ より, $k^7 = \frac{1}{8}\{k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 - 8k^5\}$ したがって

$$\begin{aligned} S_7(n) &= 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 \\ &= \frac{1}{8}\{1^4 \cdot 2^4 - 0^4 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^5\} + \frac{1}{8}\{2^4 \cdot 3^4 - 1^4 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^5\} + \cdots + \frac{1}{8}\{n^4(n+1)^4 - (n-1)^4n^4 - 8n^5\} \\ &= \frac{1}{8}\{-8(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + n^4(n+1)^4\} \\ &= \frac{1}{8}\left\{-8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} + n^4(n+1)^4\right\} \end{aligned}$$

ここで, $24S_7(n) = n^2(n+1)^2\{-2(2n^2+2n-10) + 3n^2(n+1)^2\}$ であり, n が正の整数であるから $-2(2n^2+2n-10) + 3n^2(n+1)^2$ は整数となる。

よって, すべての正の整数 n について, $24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れる。 

参考

高校の数学では, 本問のように恒等式を用いて同じ項を打ち消し合って $S_k(n)$ を求めることが多いが,

$S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ を一般化したのが, 日本の関孝和とスイスのヤコブ・ベルヌーイがほぼ同時期に発見したと言われている以下の『関・ベルヌーイの公式』である。

$$\text{関・ベルヌーイの公式} \quad S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k C_i B_i n^{k+1-i} \dots \textcircled{1}$$

ここで, 関・ベルヌーイ数 B_i は $\sum_{i=0}^n C_i B_i = n+1 \dots \textcircled{2}$ で求められる。

これを用いて, $S_7(n)$ を求める。

②について, $n=0$ のとき, ${}_1C_0B_0=1$ より, $B_0=1$

$n=1$ のとき, ${}_2C_0B_0 + {}_2C_1B_1 = 2$ より, $1 \cdot 1 + 2B_1 = 2$ であるから, $B_1 = \frac{1}{2}$

$n=2$ のとき, ${}_3C_0B_0 + {}_3C_1B_1 + {}_3C_2B_2 = 3$ より, $1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3B_2 = 3$ であるから, $B_2 = \frac{1}{6}$

同様に, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_7=0$, $\dots$ がわかる。

①より,

$$\begin{aligned} S_7(n) &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^7 {}_8C_i B_i n^{8-i} \\ &= \frac{1}{8} ({}_8C_0 B_0 n^8 + {}_8C_1 B_1 n^7 + {}_8C_2 B_2 n^6 + {}_8C_3 B_3 n^5 + {}_8C_4 B_4 n^4 + {}_8C_5 B_5 n^3 + {}_8C_6 B_6 n^2 + {}_8C_7 B_7 n) \\ &= \frac{1}{8} \left(1 \cdot 1 \cdot n^8 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^7 + 28 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^6 + 56 \cdot 0 \cdot n^5 + 70 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^4 + 56 \cdot 0 \cdot n^3 + 28 \cdot \frac{1}{42} \cdot n^2 + 8 \cdot 0 \cdot n \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(n^8 + 4n^7 + \frac{14}{3}n^6 - \frac{7}{3}n^4 + \frac{2}{3}n^2 \right) = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} \text{ である。} \end{aligned}$$

他にも, 積分 $S_k(n) = \int \{kS_{n-1}(n) + B_k\}dn$ を用いる方法もある。(ここでも, 関・ベルヌーイ数を用いる。)

$$\begin{aligned} \text{例えば, } S_3(n) &= \int \{3S_2(n) + B_3\}dn = \int \left\{3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + B_3\right\}dn = \int \left\{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + B_3\right\}dn \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + B_3n \end{aligned}$$

ここで, $n=1$ とすると, $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + B_3$ より, $B_3=0$ であり, $S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

が分かり, 同様に $S_4(n)$, $S_5(n)$, $\dots$ を求めることができる。

- 3 一辺の長さが1の正四面体OABCにおいて、辺OAを2:1に内分する点をD、辺OBを1:2に内分する点をEとする。辺OC上に点Pをとり、線分OPの長さを t とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\cos \angle EDP$ を t を用いて表せ。

問2 点Pが辺OC上を動くとき、 $\cos \angle EDP$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 問1 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{c}=\vec{a} \cdot \vec{c}=1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

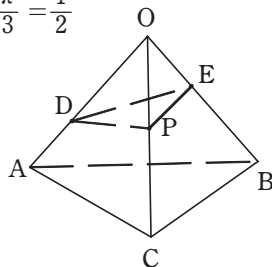
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OP}=-\frac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b},$$

$$|\overrightarrow{DE}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{DP}|^2=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4t}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{4t}{3} \cdot \frac{1}{2}+t^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DP}=\frac{4}{9}|\vec{a}|^2-\frac{2t}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}-\frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=\frac{4}{9}-\frac{2t}{3} \cdot \frac{1}{2}-\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}+t^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}t$$

$$\text{以上より, } \cos \angle EDP=\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DP}|}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}t}{\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}} \quad \text{図}$$



別解 余弦定理より, $\cos \angle EDP=\frac{DE^2+DP^2-EP^2}{2DE \cdot DP}$

$$\text{ここで, } DE^2=OD^2+OE^2-2OA \cdot OE \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$DP^2=OD^2+OP^2-2OD \cdot OP \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+t^2-2 \cdot \frac{2}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{2}=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$EP^2=OE^2+OP^2-2OE \cdot OP \cos \frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2+t^2-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{2}=t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}$$

$$\text{以上より, } \cos \angle EDP=\frac{\frac{1}{3}+t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}-\left(t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\right)}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}$$

$$\text{問2 } f(t)=\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}} \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{9t^2-6t+4} - \sqrt{3}(2-t) \{2\sqrt{9t^2-6t+4}\}'}{4(9t^2-6t+4)} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}(9t^2-6t+4) - \sqrt{3}(2-t)(18t-6)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}(9t^2-6t+4) - \sqrt{3}(2-t)(18t-6)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} = \frac{2\sqrt{3}(-15t+2)}{4(9t^2-6t+4)\sqrt{9t^2-6t+4}} \end{aligned}$$

であり, 増減表は右のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{15}$	...	1
$f'(t)$		+		-	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{\sqrt{21}}{14}$

$$\text{また, } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{21}}{14} > 0 \text{ より } \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{21}}{14}$$

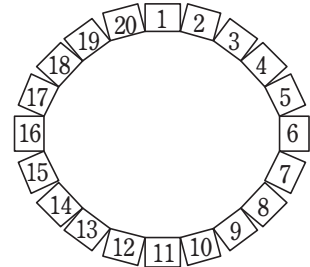
したがって, $\cos \angle EDP$ は $t=\frac{2}{15}$ のとき, 最大値1, $t=1$ のとき, 最小値 $\frac{\sqrt{21}}{14}$ をとる。図

4 次の問いに答えよ。(50点)

問1 1から9までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 9$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。このような3つの数 (a_1, a_2, a_3) の選び方のうち、 $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問2 1から50までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 50$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。このような3つの数 (a_1, a_2, a_3) の選び方のうち、 $a_2 - a_1 \geq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問3 1から20までの番号が書かれた座席が、図のように円形に並んでいる。この中から、2つ以上の間隔を空けて3つの座席を選ぶ(例えば、1番を選んだときは2番、3番、19番、20番は選べない)。このような3つの座席の選び方は全部で何通りあるか。



【解答】 問1 $a_2 - a_1 \geq 3$ より $a_2 \geq a_1 + 3$ 、 $a_3 - a_2 \geq 3$ より $a_3 - 3 \geq a_2$ だから

$$a_1 + 3 \leq a_2 \leq a_3 - 3 \text{ すなわち } a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2$$

$$\text{いま、} 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 9 \text{ より、} 3 \leq a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2 \leq 7$$

ここで、3以上7以下の異なる3つの値の組 $(a_1 + 2, a_2, a_3 - 2)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、求める場合の数は ${}_5C_3 = 10$ 通り **【答】**

問2 $a_2 - a_1 \geq 10$ より $a_2 \geq a_1 + 10$ 、 $a_3 - a_2 \geq 10$ より $a_3 - 10 \geq a_2$ だから

$$a_1 + 10 \leq a_2 \leq a_3 - 10 \text{ すなわち } a_1 + 9 < a_2 < a_3 - 9$$

$$\text{いま、} 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 50 \text{ より、} 10 \leq a_1 + 9 < a_2 < a_3 - 9 \leq 41$$

ここで、10以上41以下の異なる3つの値の組 $(a_1 + 9, a_2, a_3 - 9)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、求める場合の数は ${}_{32}C_3 = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4960$ 通り **【答】**

問3 1から20までの自然数の中から、 $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 20$ を満たすように3つの数を選び、それを (a_1, a_2, a_3) とする。

$a_1 = 1$ のとき、条件より $1 = a_1 < a_2 < a_3 \leq 18$ かつ $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ である。

$$a_2 - a_1 \geq 3 \text{ かつ } a_3 - a_2 \geq 3 \text{ より } a_1 + 3 \leq a_2 \leq a_3 - 3 \text{ すなわち } a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2$$

$$\text{いま、} a_1 = 1 \text{ より、} 3 = a_1 + 2 < a_2 < a_3 - 2 \leq 16$$

ここで、4以上16以下の異なる値の組 $(3, a_2, a_3 - 2)$ を1つ決めると、 (a_1, a_2, a_3) の組み合わせがただ1つ決まる。よって、その場合の数は ${}_{13}C_2 = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$ 通り

さらに、 a_1 が2番から20番まで入ることを考えると、 $78 \times 20 = 1560$ 通り。ただし、 a_1 が、最初に考えた場合の a_2 、 a_3 のそれぞれの場所に来るときが重複しているので、 $1560 \div 3 = 520$ 通り **【答】**

【別解】 問1 $a_2 - a_1 \geq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geq 3$ より、 $a_2 \geq a_1 + 3$ かつ $a_3 \geq a_2 + 3$

(i) $a_1 = 1$ のとき、 $(a_2, a_3) = (4, 7) (4, 8) (4, 9) (5, 8) (5, 9) (6, 9)$

(ii) $a_1 = 2$ のとき、 $(a_2, a_3) = (5, 8) (5, 9) (6, 9)$

(iii) $a_1 = 3$ のとき、 $(a_2, a_3) = (6, 9)$

以上より、10通り **【答】**

問2 $a_2 - a_1 \geq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geq 10$ より, $a_2 \geq a_1 + 10$ かつ $a_3 \geq a_2 + 10$

(i) $a_1 = 1$ のとき, $(a_2, a_3) = (11, 21) (11, 22) \cdots (11, 50)$

$(12, 22) (12, 23) \cdots (12, 50) \cdots$

$(40, 50)$ の $30 + 29 + \cdots + 1$ 通り

(ii) $a_1 = 2$ のとき, $(a_2, a_3) = (12, 22) (12, 23) \cdots (12, 50)$

$(13, 23) (13, 24) \cdots (13, 50) \cdots$

$(40, 50)$ の $29 + 28 + \cdots + 1$ 通り

以上の考え方を繰り返して, 求める場合の数は,

$$(30 + 29 + \cdots + 1) + (29 + 28 + \cdots + 1) + \cdots + (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 30 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{2} k(k+1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{30} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{30} k$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \cdot \left(\frac{61}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 \cdot \left(\frac{64}{6} \right) = 4960 \quad \text{以上より, } \mathbf{4960 \text{ 通り}} \quad \text{答}$$

問3 1番に a_1 が入り, a_2 と a_3 の座席の番号を (a_2, a_3) とする。ただし, $a_2 < a_3$ とする。

2つ以上の間隔を空けるので, 4番から18番のうち, a_2 と a_3 の座席を選ぶ方法は ${}_{15}C_2 = 105$ 通り

このうち, 隣り合っているのは, $(a_2, a_3) = (4, 5) (5, 6) \cdots (17, 18)$ の14通り

1つだけ間隔が空いているのは, $(a_2, a_3) = (4, 6) (5, 7) \cdots (16, 18)$ の13通り

したがって, 1番に a_1 が入り, 2つ以上の間隔を空けて座席を選ぶ方法は $105 - 14 - 13 = 78$ 通り。

さらに, a_1 が2番から20番まで入ることを考えると, $78 \times 20 = 1560$ 通り。ただし, a_1 が, 最初に

考えた場合の a_2, a_3 のそれぞれの場所に来るときが重複しているので, $1560 \div 3 = 520$ 通り 答

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 $\tan \alpha = 5$ のとき、 $\sin 2\alpha$ の値を求めよ。

問2 n を正の整数とする。 n を二進法で表すと2022桁である。このとき、 n を十進法で表すと何桁になるか。
ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

問3 a, b を実数とする。整式 $f(x)$ と整式 $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = x^4 + ax^2 - 2x + 3$, $g(x) = x^2 + x + b$ と定める。
 $f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるような実数の組 (a, b) をすべて求めよ。

解答 問1 $\tan \alpha = 5$ より、 $\sin \alpha = 5 \cos \alpha$

$$\text{これを } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ に代入して、} \cos^2 \alpha = \frac{1}{26}, \sin^2 \alpha = \frac{25}{26}$$

$\tan \alpha > 0$ より、 α は第1象限または第3象限の角であるから、

$$(\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

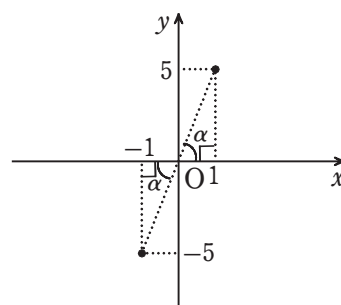
$$\text{いずれの場合も、} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \quad \text{答}$$

別解

$\tan \alpha = 5$ より、右図のように考えると、

$$(\sin \alpha, \cos \alpha) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

$$\text{いずれの場合も、} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$



問2 n を二進法で表すと2022桁なので、 $2^{2021} \leq n < 2^{2022}$

この不等式の常用対数をとると、

$$\log_{10} 2^{2021} \leq \log_{10} n < \log_{10} 2^{2022}$$

$$2021 \log_{10} 2 \leq \log_{10} n < 2022 \log_{10} 2$$

$$2021 \times 0.3010 \leq \log_{10} n < 2022 \times 0.3010$$

$$608.321 \leq \log_{10} n < 608.622$$

$$10^{608.321} \leq n < 10^{608.622}$$

以上より、 $10^{608} \leq n < 10^{609}$ であるから、 n を十進法で表すと609桁になる。 答

問3 $f(x)$ を $g(x)$ で割ると、

商は $x^2 + x + (a - b + 1)$,

余りは $(-a + 2b - 3)x + 3 - b(a - b + 1)$

となる。

$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるとき、

余りが0になることを考えると、

$$\begin{cases} -a + 2b - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 3 - b(a - b + 1) = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + 2b - 3 = 0 & \cdots \text{①} \\ 3 - b(a - b + 1) = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①より、} a = 2b - 3 \cdots \text{③}$$

これを、②に代入して、整理すると $b^2 - 2b - 3 = 0$ これを解いて $b = -1, 3$

③より、 $b = -1$ のとき $a = -5$, $b = 3$ のとき $a = 3$ なので、

求める実数の組 (a, b) は、 $(-5, -1), (3, 3)$ 答

$$\begin{array}{r} x^2 - x + (a - b + 1) \\ x^2 + x + b \overline{) x^4 - 2x + 3} \\ \underline{-(x^4 + x^3 + bx^2)} \\ -x^3 + (a - b)x^2 - 2x \\ \underline{-(x^3 + x^2 - bx)} \\ (a - b + 1)x^2 + (-2 + b)x + 3 \\ \underline{-(a - b + 1)x^2 + (a - b + 1)x + (a - b + 1)b} \\ (-a + 2b - 3)x + 3 - b(a - b + 1) \end{array}$$

2 座標平面上の2つの放物線 $C_1: y = -x^2 + 2x$, $C_2: y = 2x^2 - 4x + 9$ について、次の問いに答えよ。(50点)

問1 放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は2つ存在する。放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線の方程式を2つとも求めよ。

問2 問1で求めた2つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 問1 $f(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 9$ とおく。

$$f'(x) = -2x + 2, \quad g'(x) = 4x - 4 \text{ より,}$$

$$\text{放物線 } C_1 \text{ 上の点 } (s, -s^2 + 2s) \text{ における接線の方程式は } y - (-s^2 + 2s) = (-2s + 2)(x - s)$$

$$\text{これを整理すると, } y = (-2s + 2)x + s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{放物線 } C_2 \text{ 上の点 } (t, 2t^2 - 4t + 9) \text{ における接線の方程式は } y - (2t^2 - 4t + 9) = (4t - 4)(x - t)$$

$$\text{これを整理すると, } y = (4t - 4)x - 2t^2 + 9 \quad \dots \textcircled{2}$$

放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は、①と②の傾きと切片が等しいことを考えると、

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} -2s + 2 = 4t - 4 & \dots \textcircled{3} \\ s^2 = -2t^2 + 9 & \dots \textcircled{4} \end{cases} \text{ を解くことで求められる。}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } s = -2t + 3 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{これを}\textcircled{4}\text{に代入すると, } (-2t + 3)^2 = -2t^2 + 9$$

$$\text{これを整理すると, } 6t(t - 2) = 0 \text{ より } t = 0, 2$$

$$\textcircled{2} \text{ より, 求める直線の方程式は } y = -4x + 9, \quad y = 4x + 1 \quad \text{答}$$

別解 放物線 C_2 上の点 $(t, 2t^2 - 4t + 9)$ における接線の方程式は $y - (2t^2 - 4t + 9) = (4t - 4)(x - t)$

$$\text{これを整理すると, } y = (4t - 4)x - 2t^2 + 9 \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{放物線 } C_1 \text{ の方程式に代入して } (4t - 4)x - 2t^2 + 9 = -x^2 + 2x$$

$$\text{これを整理すると, } x^2 + 2(2t - 3)x - 2t^2 + 9 = 0$$

直線⑥と放物線 C_1 は接するので、この2次方程式は重解をもたなくてはならない。

よって、この2次方程式の判別式を D とすると $D = 0$ となる。

$$D/4 = (2t - 3)^2 - (-2t^2 + 9) = 6t^2 - 12t = 6t(t - 2)$$

$$D/4 = 0 \text{ のとき, } t = 0, 2$$

$$\text{よって, 求める方程式は } t = 0, 2 \text{ を}\textcircled{6}\text{に代入して, } y = -4x + 9, \quad y = 4x + 1 \quad \text{答}$$

問2 問1で求めた2つの直線および放物線 C_1 との接点の座標を求める。

問1の過程より

直線 $y = -4x + 9$ と放物線 C_1 の接点の座標は、 $(3, -3)$

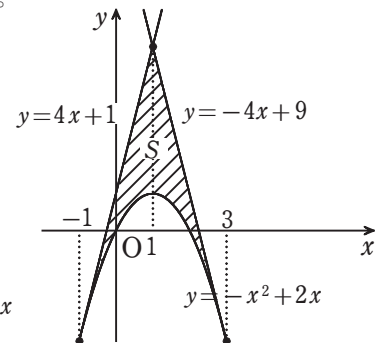
直線 $y = 4x + 1$ と放物線 C_1 の接点の座標は、 $(-1, -3)$

2直線 $y = -4x + 9$, $y = 4x + 1$ の交点の x 座標は

$$2 \text{ 式を連立して } x = 1$$

よって求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(4x + 1) - (-x^2 + 2x)\} dx + \int_1^3 \{(-4x + 9) - (-x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



別解 問 1 で求めた 2 つの直線および放物線 C_1 との接点の x 座標を求める。

⑤より, $t=0$ のとき $s=3$, $t=2$ のとき $s=-1$

また, 放物線 C_1 の方程式は $y=-(x-1)^2+1$ とできるので,

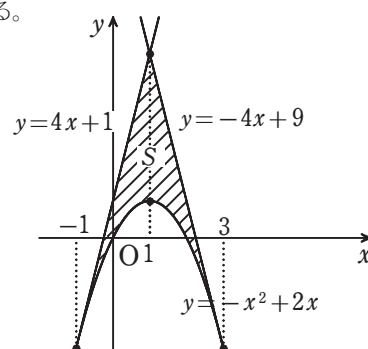
放物線 C_1 の頂点の座標は $(1, 1)$

問 1 で求めた 2 つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分は

図のように, 直線 $x=1$ に関して対象となることから,

求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^1 \{(4x+1) - (-x^2+2x)\} dx = 2 \int_{-1}^1 (2x^2+2x+1) dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^1 = 2 \left\{ \frac{2}{3} \cdot (1+1)^2 + (1-1)^2 + (1+1) \right\} = \frac{16}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$



参考 右図において, 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求める公式

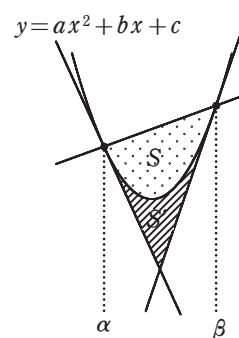
$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

や, 放物線と二本の接線で囲まれた部分の面積 S' を求める公式

$$S' = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

などあるが, 後者を問 2 で利用すると,

$$S' = \frac{|-1|}{12}\{3 - (-1)\}^4 = \frac{16}{3} \quad \text{答}$$



1 p を $0 < p < \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 3次方程式 $x = p + (1-p)x^3$ の実数解のうち、2番目に大きいものを求めよ。

問2 問1で求めた実数解を α とする。不等式 $\alpha < p + p^3$ が成り立つことを示せ。

【解答】 問1 $f(x) = (1-p)x^3 - x + p$ とおき、3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解を考える。

$f(1) = 1 - p - 1 + p = 0$ より、 $f(x) = (x-1)\{(1-p)x^2 + (1-p)x - p\}$ と因数分解できる。

$(1-p)x^2 + (1-p)x - p = 0$ と解くと、

$$x = \frac{-(1-p) \pm \sqrt{(1-p)^2 + 4p(1-p)}}{2(1-p)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4p}{1-p}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$$

ここで、 $\alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ 、 $\alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ とおく。

$0 < p < \frac{1}{2}$ より、 $1 < 1+3p < \frac{5}{2}$ かつ $1 < \frac{1}{1-p} < 2$ であるから、 $1 < \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < \sqrt{5}$

したがって、 $0 < \alpha_1 < -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} < 1$ 、 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < \alpha_2 < -1$

よって、3次方程式 $x = p + (1-p)x^3$ の実数解の大小関係は、 $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ となり

2番目に大きいものは $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ 図

問2 問1より、 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}}$ であるから、

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < p + p^3$ すなわち $\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < 2p + 2p^3 + 1$ を示す。

$0 < p < \frac{1}{2}$ より、 $2p + 2p^3 + 1 > 0$ であるから、 $\frac{1+3p}{1-p} < (2p + 2p^3 + 1)^2$ を示せばよい。

$$g(p) = (2p + 2p^3 + 1)^2 - \frac{1+3p}{1-p} = \frac{(1-p)(2p + 2p^3 + 1)^2 - (1+3p)}{1-p} = \frac{4p^4(-p^3 + p^2 - 2p + 1)}{1-p}$$

とおく。

ここで、 $h(p) = -p^3 + p^2 - 2p + 1$ とおくと、 $h'(p) = -3p^2 + 2p - 2 = -3\left(p - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{5}{3}$

より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $h'(p) < 0$ であり $h(p)$ は単調減少である。

さらに、 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$ より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $h(p) > 0$

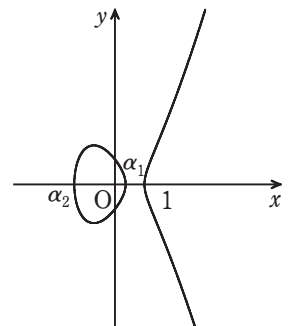
したがって、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、 $g(p) > 0$ である。

以上より、 $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき、不等式 $\alpha < p + p^3$ が成り立つ。 図

【参考】 3次式 $y^2 = x^3 + ax + b(4a^2 + 27b^2 \neq 0)$ で定義された曲線を楕円曲線という。

問1では、 $y^2 = x^3 - \frac{1}{1-p}x + \frac{p}{1-p}$ ($0 < p < \frac{1}{2}$) と x 軸との共有点の

の x 座標を求めており、小さい順に $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ となる



2 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ ($n=1,2,3,\dots$) により定める。次の問に答えよ。(50点)

問1 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ を求めよ。

問2 $a_n \geq 18000$ となるような最小の正の整数 n を求めよ。

【解答】 問1 区分求積法より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$ **【答】**

問2 すべての正の整数 n に対して、 $\int_0^n \sqrt{x} dx < a_n < \int_0^n \sqrt{x+1} dx \dots \textcircled{1}$

$$\int_0^n \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^n = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} \text{であり、} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} = 18000 \text{ のとき、} n = 900$$

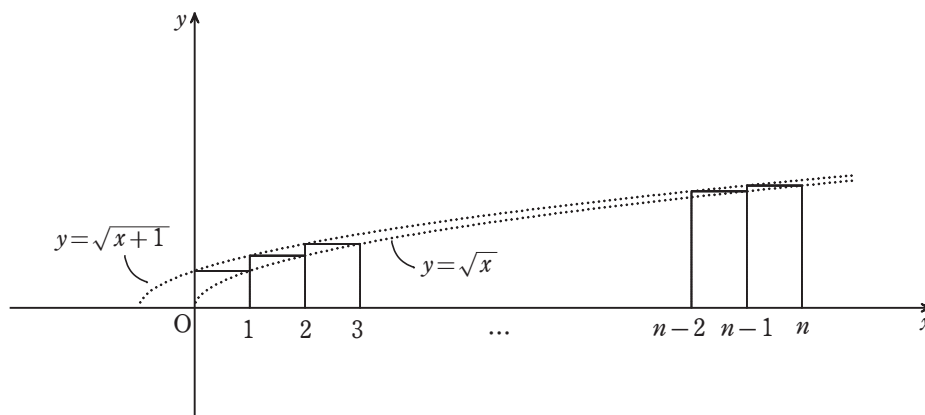
$$\text{したがって、} 18000 = \int_0^{900} \sqrt{x} dx < a_{900} < \int_0^{900} \sqrt{x+1} dx$$

また、 $n = 899$ のとき、

$$\int_0^{899} \sqrt{x} dx < a_{899} < \int_0^{899} \sqrt{x+1} dx = \int_1^{900} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^{900} = 18000 - \frac{2}{3} < 18000$$

より、 $a_{899} < 18000 < a_{900}$ であるから、 $a_n \geq 18000$ となるような最小の正の整数 n は **900** **【答】**

【参考】 不等式 $\textcircled{1}$ は下の図を考えるとわかる。 $\int_0^n \sqrt{x} dx < a_n < \int_0^{n+1} \sqrt{x} dx$ を用いても同じ結果が得られる。



【参考】 a_n は、ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ について $s = -\frac{1}{2}$ としたときの有限級数である。

ゼータ関数については、 $s > 1$ のときに収束することが分かっているが、本問は $s = -\frac{1}{2}$ であり発散する。

問1では、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} = \infty$ であるが、解答より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}$ の発散のスピードが同じくらいだということを表し、ランダウの記号を用いると $a_n = O(n\sqrt{n})$ と表される。

(よく、テーラー展開などで $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$ などと表す。)

また、問1より十分大きい n について $a_n \asymp \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ である。

$$\frac{2}{3} n\sqrt{n} = 18000 \text{ を解くと } n = 900 \text{ であるから、} a_{900} \asymp \frac{2}{3} \cdot 900 \sqrt{900} = 18000$$

ただ、これは a_n のおおよその値であって正確な値ではないため、不等式ではきむというアイデアに行きつく。

- 3 関数 $f(x)$ は $x > 0$ において等式 $f(x) = \log x - \int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt$ を満たすとする。このとき、関数 $f(x)$ を求めよ。(50点)

【解答】 $\int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt$ は定数であるから、 $\int_1^e \frac{|f(t)|}{t} dt = k$ (k は定数) とすると、 $f(x) = \log x - k$ とできる。

$1 < t < e$ のとき、 $\frac{|f(t)|}{t} \geq 0$ より、 $k \geq 0$ である。また、 $\log x - k = 0$ のとき、 $x = e^k$ である。

(i) $1 \leq e^k \leq e$ のとき、すなわち $0 \leq k \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{|\log t - k|}{t} dt = \int_1^{e^k} \frac{-(\log t - k)}{t} dt + \int_{e^k}^e \frac{\log t - k}{t} dt \\ &= \left[-\frac{(\log t)^2}{2} + k \log t \right]_1^{e^k} + \left[\frac{(\log t)^2}{2} - k \log t \right]_{e^k}^e = k^2 - k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって、 $k = k^2 - k + \frac{1}{2}$ であり、これを解くと $k = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ $0 \leq k \leq 1$ より、 $k = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

(ii) $e < e^k$ のとき、すなわち $1 < k$ のとき、

$$k = \int_1^e \frac{|\log t - k|}{t} dt = \int_1^e \frac{-(\log t - k)}{t} dt = \left[-\frac{(\log t)^2}{2} + k \log t \right]_1^e = k - \frac{1}{2}$$

となり、 $k = k - \frac{1}{2}$ これをみたす k は存在しない。

以上より、 $k = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ よって、 $f(x) = \log x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **【答】**

- 4 次の問いに答えよ。(50点)

問1 等式 $2^{199} = (1+1)^{199}$ と、199 が素数であることを用いて、 2^{199} を 199 で割った余りを求めよ。

問2 2^{199} を 39203 で割った余りを求めよ。ただし、 $39203 = 197 \cdot 199$ と素因数分解できることは証明なしに用いてよい。

【解答】 問1 二項定理より、 $2^{199} = (1+1)^{199} = {}_{199}C_0 + {}_{199}C_1 + {}_{199}C_2 + \cdots + {}_{199}C_{199}$

ここで、 ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$ であるが、

$1 \leq r \leq 198$ のとき、 ${}_{199}C_r = \frac{199 \cdot 198 \cdot \cdots \cdot (199 - r + 1)}{r!}$ であることと、199 は素数であることから、

${}_{199}C_r$ は、整数 k_r を用いて ${}_{199}C_r = 199k_r$ と表すことができ、199 で割り切れる。

したがって、 2^{199} を 199 で割った余りは $1+1=2$ **【答】**

問2 $2^{199} = (1+1)^{199} = {}_{199}C_0 + {}_{199}C_1 + {}_{199}C_2 + \cdots + {}_{199}C_{199}$

$$= 1 + \frac{199}{1} + \frac{199 \cdot 198}{2 \cdot 1} + \frac{199 \cdot 198 \cdot 197}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots + {}_{199}C_{197} + {}_{199}C_{198} + {}_{199}C_{199}$$

ここで、 ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$ 、 ${}_{199}C_1 = {}_{199}C_{198} = 199$ 、 ${}_{199}C_2 = {}_{199}C_{197} = \frac{199 \cdot 198}{2 \cdot 1} = 199 \cdot 99$ であるが、

$3 \leq r \leq 196$ のとき、 ${}_{199}C_r = \frac{199 \cdot 198 \cdot \cdots \cdot (199 - r + 1)}{r!}$ であることと、199 と 197 は素数であること

から、 ${}_{199}C_r$ は、整数 l_r を用いて ${}_{199}C_r = 199 \cdot 197 \cdot l_r$ と表すことができ、 $197 \cdot 199$ で割り切れる。

したがって、 2^{199} を $39203 = 197 \cdot 199$ で割った余りは

$$1 + 199 + 199 \cdot 99 + 199 \cdot 99 + 199 + 1 = 2(1 + 199 + 199 \cdot 99) = 2(1 + 199 \cdot 100) = 2 + 39800 = 39802$$

これを 39203 で割った余りは **599** **【答】**

【参考】 問1 については、素数だと同じことがいえます。来年の西暦 $2023 = 7 \times 17^2$ で素数ではないですが、5年後の西暦 2027 は素数ですので、西暦 2027 年に『 2^{2027} を 2027 で割った余りを求めよ。』という問題もできます。