令和５年度

第４７回高校数学教育を考える会
（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

目次

令和５年度（2023）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 積分法	 標準 やや易	・解きやすい問題だったのではないか。 ・採点して何か気になる点はあったか。
2 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 積分法	 標準 標準	・絶対値記号を使ったのは場合分けをさせたいという意図があったのか。 ・グラフが原点に関して対象であることを利用する際はしっかり説明できていたか。($f(-x)=-f(x)$の説明が無いものはどうなったか) ・作問の際にどんな議論があったか。 ・採点して何か気になる点はあったか。
3 問１ 問２	 数Ｂ 数Ⅲ	 空間ベクトル 微分法	 標準 標準	・ベクトルで解くものが多かったか。いろいろな解法があったか。 ・できはどうだったか。 ・大小の比較は説明できていたか。説明が無いもの・不十分なものには減点等があったか。
4 問１ 問２ 問３	 数Ａ 数Ｂ 数Ｂ	 確率 数列 数列	 標準 標準 標準	・問２はどのような解き方があったか。 ・いろいろな考え方・解き方が使われていて良い問題だったと思います。 ・できはどうだったか。
全体	・微積分・空間図形・確率・数列など，幅広い範囲からの出題で良かったです。 ・難易度も難しすぎず良かったと思います。採点した印象はどうだったか。 ・証明がありませんでしたが，記述で説明する力は見ることができたか。			

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和５年度（2023）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質　問　事　項
$\boxed{1}$ 問１ 問２	 数Ｉ 数Ｂ	 整数 数列	 標準 標準	・どんなつまずきがあったか（17 で割ることが出来ていたか。一つの整数の組も容易に求まるものではなかったが、ユークリッドの互除法を用いた後、代入により整数解を求めることが出来ていたか。） ・問２は，問題の意味（段を超える際、白から始まること）を理解できていたか。 ・記述が難しかったと思うが、意味が分かる文章を書けていたか。 ・どのような採点基準があったか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅱ	 微分法 積分法 微分法	 やや易 標準 標準	・増減・極値については，増減表があれば良かったか。（「～のときに増加。」「$x=$△のときに極大値○をとる」などの記述まで必要だったか。） ・グラフを書くことが出来ていたか。 ・問２ができないと問３もできない形でしたが、どうだったでしょうか。 ・$0<3-2\sqrt{2}<1$ については説明が必要だったか。

全体

・いろいろな分野から出題されていましたが，どこができていた・どこができていなかったか。

・例年より難しい印象がありましたが，できはどうだったか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和５年度（2023）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 積分法	 標準 標準	・解きやすい問題だったと思うが、定義域の記述や大小関係、原点に関して対称などの記述までできていたか。 ・細かい採点基準などはあったか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 積分法 積分法	 標準 標準	・$F'(3x)$ をどのように計算していたか。 ・置換積分をしっかりつかえていたか。 ・$\tan x$ の逆関数（$\tan^{-1} x$）に関する出題だったと思うが，作問の際に大学の範囲を着想とすることは多いのか。
$\boxed{3}$ 問１ 問２	 数Ｂ 数Ｂ	 数列 数列	 標準 標準	・問１，問２それぞれに問題の着想は何かありますか？ ・帰納法を使う証明問題でしたが，できはどうでしたか。
$\boxed{4}$ 問１ 問２ 問３ 問４	 数Ａ 数Ｂ 数Ｂ 数Ａ	 確率 数列 数列 確率	 標準 標準 やや難 標準	・誘導が丁寧で解きやすく，いろいろな考え方が必要な良い問題だと感じました。 ・この問題は，誘導も最初からあったのか，後から誘導を作った形か。

全体

・理学部数理科学科のみ対象の試験であったが、受検生のできや印象はどうだったか。

・確率と数列を融合する問題が前期甲・後期と出題があったが，意識して出題をしているか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1　$a>0$ とする。座標平面で関数 $y=\dfrac{1}{x^{a}}$ のグラフ上の点 $(1,1)$ における接線が x 軸と交わる点を A，y 軸と交わる点を B とし，原点を O とする。三角形 OAB の面積を $S(a)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$S(a)$ を求めよ。

問２　$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答　問１　$y=\dfrac{1}{x^{a}}=x^{-a}$ より，$y'=-ax^{-a-1}$

$x=1$ のとき，$y'=-ax^{-a-1}=-a$ より，

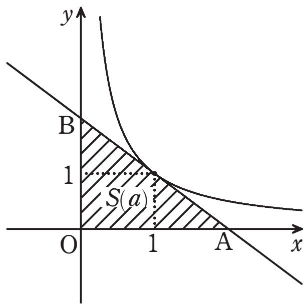
点 $(1,1)$ における接線の方程式は $y-1=-a(x-1)$

すなわち，$y=-ax+a+1$ …①

y 切片を考えると，$\mathrm{B}(0,a+1)$

また，①で $y=0$ とすると $a>0$ より，$x=\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}$

よって，$\mathrm{A}\left(1+\dfrac{1}{a},0\right)$



$1+\dfrac{1}{a}>0$，$a+1>0$ だから　$S(a)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)(a+1)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right)$　…答

問２　問１より，$S(a)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right)$ であるから，$S'(a)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{a^{2}}\right)=\dfrac{(a+1)(a-1)}{2a^{2}}$

$S'(a)=0$ のとき，$a>0$ より，$a=1$

$a>0$ より，増減表は以下のようになる。

a	0	…	1	…
$S'(a)$	/	$-$	0	$+$
$S(a)$	/	↘	最小	↗

よって，$S(a)$ は，$a=1$ のとき，最小値 $S(1)=\dfrac{2^{2}}{2}=2$ をとる。　…答

別解　問１の結果より，$a>0$ のとき，相加平均と相乗平均の大小関係を用いると，

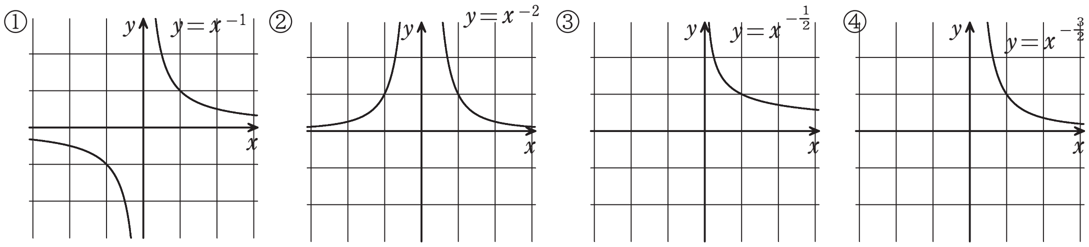
$S(a)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}+2\right)\geqq\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}+2\right)=2$

上の不等式の等号は，$a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a^{2}=1$

$a>0$ より，$a=1$ のときに等号は成立する。

よって，$S(a)$ は，$a=1$ のとき，最小値 2 をとる。　…答

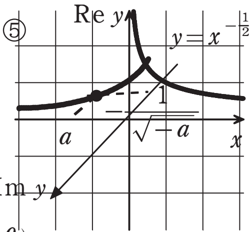
参考　$y=x^{k}$（べき関数、累乗関数）について考える。$k=1$，2 のとき，グラフは直線 $y=x$，放物線 $y=x^{2}$ となる。
本問題は，$k<0$ を考えているので，まずは k を整数として，$k=-1$，-2 のとき，グラフ①，②になる。
さらに，本問題は，k が整数という条件はないので，$k=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{3}{2}$ のとき，グラフ③，④になる。
①～④のいずれのグラフも，確かに定点（1，1）を通り，点（1，1）における接線を引くことができる。



GRAPES などのグラフソフトを用いて，$y=x^k$ の k の値を動かしてグラフの様子を調べると，y 軸より左側の部分が①，②のように現れたり，③，④のように消えたりすることがわかる。ここで，左側の部分が無いときに $x<0$ の値を代入することを考えてみる。

例えば，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ に $x=-2$ を代入すると $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{-2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,i}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ であり，複素数となる。

このように，$x<0$ のとき，y は複素数で表すことはできないかと考え，
Re y，Im y をそれぞれ y の実部，虚部とすると右のようなグラフ⑤になった。

⑤


（$x=-t$ とおくと，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{-t}}=\dfrac{1}{\sqrt{t}\,i}=-\dfrac{1}{\sqrt{t}}i$ ）

より一般的に考えるには，複素関数の定義に従って以下のように行う。

$x=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0)$ とおくと，$y=x^k=r^ke^{ik\theta}=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$

実際は x は複素数全体であるが，本問題に合わせて x は実数とすると，

(i) $x>0$ のとき，$r=x$ かつ $\theta=2n\pi$（n は整数）　よって，$y=x^k(\cos 2kn\pi+i\sin 2kn\pi)$（$n$ は整数）

(ii) $x<0$ のとき，$r=-x$ かつ $\theta=-\pi+2n\pi$（n は整数）

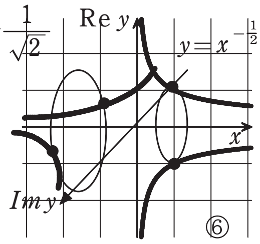
よって，$y=(-x)^k\{\cos(-k\pi+2kn\pi)+i\sin(-k\pi+2kn\pi)\}$（$n$ は整数）

グラフ⑤と比較するために，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ について $x=2$，$x=-2$ のときについて考えると，

$k=-\dfrac{1}{2}$，$x=2$ のとき，(i) より $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(-n\pi)+i\sin(-n\pi)\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$k=-\dfrac{1}{2}$，$x=-2$ のとき，

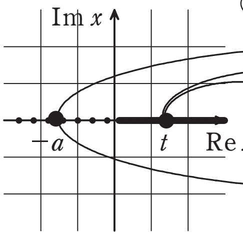
(ii) より $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-n\pi\right)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

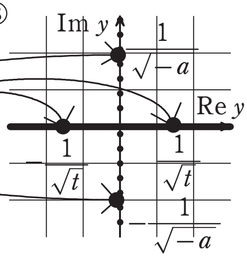


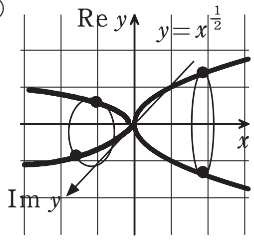
⑥

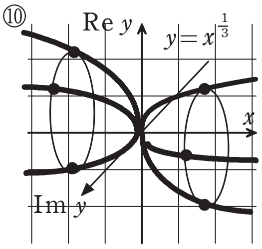
いずれも，1つの x について2つの y の値をとり，$y=x^{-\frac{1}{2}}$ のグラフは右のグラフ⑥のようになる。
これは，下の複素数平面⑦の実軸上の点が複素数平面⑧に移るとも考えられる。

また，同様に考えると，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，のグラフはそれぞれ⑨，⑩のようになる。

⑦


⑧


⑨


⑩


また，グラフ⑥，⑨，⑩から，m を自然数とするとき，

$y=x^{\frac{1}{m}}$ のグラフは $x=a\,(a\neq 0)$ のとき，Re y，Im y 平面上に半径 $\sqrt[m]{|a|}$ の円上に m 個の点をとり，

$y=x^{-\frac{1}{m}}$ のグラフは $x=a\,(a\neq 0)$ のとき，Re y，Im y 平面上に半径 $\dfrac{1}{\sqrt[m]{|a|}}$ の円上に m 個の点をとる。

このように，複素関数論の範囲でべき関数 $w=z^\alpha$　（$w=z^\alpha=e^{\alpha\log(re^{i\theta})}=e^{\alpha\{\log r+i(\theta+2n\pi)\}}$（$n$：整数）とする）や対数関数 $w=\log z$　（$w=\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)$（$n$：整数）とする）を考えるとき，解を複数個持つ多価関数となる。また，これらにより，i^i や $\log i$ なども考えられるようになり，

(1)　$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$（主値）　(2)　$\log i=\dfrac{\pi}{2}i$（主値）　(3)　$\sqrt{1}=\pm 1$　　(4)　$8^{\frac{1}{3}}=2,-1\pm\sqrt{3}\,i$

など，実数の範囲では考えられなかった結果が導かれることがある。
（(1) は実数，(2) は純虚数になることや (3)，(4) は複数の値をとることが驚きである。）

2　a を実数とし，$f(x)=xe^{-|x|}$，$g(x)=ax$ とおく。次の問いに答えよ。（50点）

問１　$f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ は証明なしに用いてよい。

問２　$0<a<1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた２つの部分の面積の和を求めよ。

解答　問１（ｉ）$x\geqq 0$ のとき，$f(x)=xe^{-x}$ より，$f'(x)=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=1$ であるから，増減表は以下のようになる。

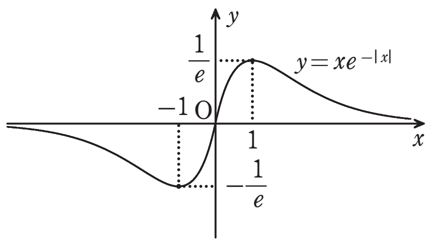
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また，条件より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$

（ii）$x<0$ のとき，$f(x)=xe^{x}$ より，$f'(x)=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(1+x)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$ であるから，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	0



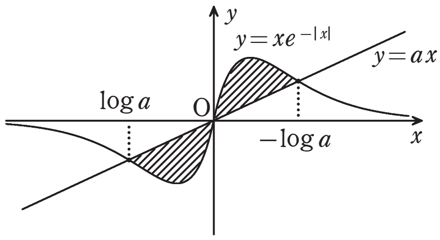
また，$x=-t$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{x}=\lim_{t\to\infty}-te^{-t}=-\lim_{t\to\infty}te^{-t}=0$$

（ｉ），（ii）より，グラフは右図のようになる。

別解　（ii）は，「$f(x)=-f(-x)$ であるから関数 $y=f(x)$ は奇関数であり，グラフは原点対称である。」としてもよい。

問２　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ の交点の x 座標を求める。



$x\geqq 0$ として，$xe^{-x}=ax$ を解くと，

$x(e^{-x}-a)=0$ より，$x=0$ または $e^{-x}=a$

したがって，$x=0,-\log a$

$0<a<1$ であるから　$\log a<0$ より $-\log a>0$

また，$f(x)=-f(-x)$，$g(x)=-g(-x)$ であるから２つの関数のグラフは原点対称であり，

求める面積は，$x\geqq 0$ における面積 $\displaystyle\int_0^{-\log a}(xe^{-x}-ax)dx$ を２倍したものを考えればよい。

また，$\displaystyle\int xe^{-x}dx=\int x\cdot(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}-\int(-e^{-x})dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C$　（C は積分定数）であるから，

$$\int_0^{-\log a}(xe^{-x}-ax)dx=\left[-e^{-x}(x+1)-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^{-\log a}$$

$$=-e^{\log a}(-\log a+1)-\frac{1}{2}a(-\log a)^2+1$$

$$=a(\log a-1)-\frac{1}{2}a(\log a)^2+1$$

したがって，求める面積は　$\boldsymbol{2a(\log a-1)-a(\log a)^2+2}$　…答

3　空間内に４点 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ をとる。時刻 $t=0$ から $t=1$ まで３点 P，Q，R は次のように動くものとする。

- $t=0$ に３点は点 O を出発する。
- 動点 P は線分 OA 上を速さ１で点 A に向かって動く。
- 動点 Q は線分 OB 上を速さ $\frac{1}{2}$ で点 B に向かって動く。
- 動点 R は線分 OC 上を速さ２で動く。$t=\frac{1}{2}$ までは点 C へ向かって動き，$t=\frac{1}{2}$ 以後は点 C から点 O に向かって動く。

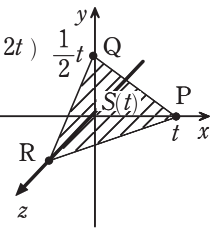
時刻 t における三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする。次の問いに答えよ。（50点）

問１　$S(t)$ を求めよ。

問２　$S(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

解答　問１　時刻 t における点 P，Q の座標はそれぞれ　$P(t,0,0)$，$Q\left(0,\frac{1}{2}t,0\right)$，

R の座標は，$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$R(0,0,2t)$，$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$R(0,0,2-2t)$



（i）　$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\frac{1}{2}t,0\right)$，$\overrightarrow{PR}=(-t,0,2t)$ であるから，

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{5}{4}t^2$，$|\overrightarrow{PR}|^2=5t^2$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=t^2$

したがって，$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}t^2\cdot 5t^2-t^4}=\frac{\sqrt{21}}{4}t^2$

（ii）$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\frac{1}{2}t,0\right)$，$\overrightarrow{PR}=(-t,0,2-2t)$ であるから，

$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{5}{4}t^2$，$|\overrightarrow{PR}|^2=5t^2-8t+4$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=t^2$

したがって，$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}t^2(5t^2-8t+4)-t^4}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}$$

（i），（ii）より，
$$S(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2} & \left(\frac{1}{2}<t\leqq 1\right)\end{cases}$$
…答

問２（i）$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$S(t)=\frac{\sqrt{21}}{4}t^2$ より，$S(t)$ は単調に増加し，$t=\frac{1}{2}$ のときに最大値をとる。

（ii）$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$S(t)=\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}$

$f(t)=21t^4-40t^3+20t^2$ とおくと，$f'(t)=84t^3-120t^2+40t=4t(21t^2-30t+10)$

$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$f'(t)=0$ とおくと，$t=\frac{15\pm\sqrt{15}}{21}$ より，$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{15-\sqrt{15}}{21}$	…	$\frac{15+\sqrt{15}}{21}$	…	1
$f'(t)$	/	+	0	−	0	+	
$f(t)$	/	↗		↘		↗	1

（i），（ii）と $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{21}}{16}>\frac{1}{4}=S(1)$ より，$S(t)$ を最大にする t の値は $t=\frac{15-\sqrt{15}}{21}$ …答

参考　三角形の面積の公式 $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ は，

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$ のように導かれる。

別解　（$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ を利用する解法）$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$，$|\overrightarrow{PQ}|^2$，$|\overrightarrow{PR}|^2$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ については解答と同様に求める。

問１　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ とすると，

（ｉ）$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\sqrt{5}t}=\dfrac{2}{5}$,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$ であるから，

$$S(t)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\sqrt{5}t\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}t^2}$$ …答

（ii）$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\sqrt{5t^2-8t+4}}=\dfrac{2t}{\sqrt{25t^2-40t+20}}$,

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{25t^2-40t+20}}=\sqrt{\frac{21t^2-40t+20}{25t^2-40t+20}}$$ より，

$$S(t)==\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}t\cdot\sqrt{5t^2-8t+4}\cdot\sqrt{\frac{21t^2-40t+20}{25t^2-40t+20}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}}$$ …答

参考
> 三角形の面積と外積
>
> $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ のとき，$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,-a_1b_3+a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$
>
> を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 外積 という。
>
> $\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトル（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の 法線ベクトル）の一つである。
>
> また，$|\vec{a}\times\vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を２辺とする平行四辺形の面積となる。
>
> すなわち，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を２辺とする三角形の面積Sは，$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ である。

別解　（ベクトルの外積を利用する解法）

問１（ｉ）$0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\frac{1}{2}t,0\right)$，$\overrightarrow{PR}=(-t,0,2t)$ であるから，

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{2}t\cdot 2t-0\cdot 0,-(-t)\cdot(2t)+0\cdot(-t),(-t)\cdot 0-\frac{1}{2}t\cdot(-t)\right)=\left(t^2,2t^2,\frac{1}{2}t^2\right)$$ より，

$$S(t)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}\sqrt{(t^2)^2+(2t^2)^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{4}t^4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}t^2}$$ …答

（ii）$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$\overrightarrow{PQ}=\left(-t,\frac{1}{2}t,0\right)$，$\overrightarrow{PR}=(-t,0,2-2t)$ であるから，

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{2}t\cdot(2-2t)-0\cdot 0,-(-t)\cdot(2-2t)+0\cdot(-t),(-t)\cdot 0-\frac{1}{2}t\cdot(-t)\right)$$

$$=\left(t-t^2,2t(1-t),\frac{1}{2}t^2\right)$$ より，

$$S(t)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}\sqrt{(t-t^2)^2+\{2t(1-t)\}^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}}$$ …答

参考

① xyz 空間上で，x 切片 , y 切片, z 切片がそれぞれ p，q，r のとき

3 点 $(p,0,0)$，$(0,q,0)$，$(0,0,r)$ を通る平面の方程式は $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$ である。

② 平面 $ax+by+cz+d=0$ と点 (x_1,y_1,z_1) との距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

※　①，② は平面上における直線の方程式においても以下の公式①’，②’があるので一緒に覚えると良い。

①’　xy 平面上で，x 切片 , y 切片がそれぞれ p，q のとき

2 点 $(p,0)$，$(0,q)$ を通る直線の方程式は $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$ である。

②’　直線 $ax+by+c=0$ と点 (x_1,y_1) との距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

※ 問 1 では，x 切片 , y 切片, z 切片が分かっているので，平面 PQR の方程式と三角錐 OPQR の体積が容易に分かることから，上の公式を利用して $S(t)$ を求める。

別解　問 1　(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，P$(t,0,0)$，Q$\left(0,\dfrac{1}{2}t,0\right)$，R$(0,0,2t)$ より，

平面 PQR の方程式は $\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{\frac{1}{2}t}+\dfrac{z}{2t}=1$　これを変形して，$4x+8y+2z-4t=0$ であるから，

平面 PQR と点 O との距離 h は $h=\dfrac{|-4t|}{\sqrt{4^2+8^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{21}}t$

三角錐 OPQR の体積を $V(t)$ とおくと，$V(t)=\left(\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\dfrac{1}{2}t\right)\cdot 2t\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}t^3$

$V(t)=\dfrac{1}{3}hS(t)$ より，$S(t)=\dfrac{3V(t)}{h}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}t^3}{\frac{2}{\sqrt{21}}t}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2$　…答

ii) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，P$(t,0,0)$，Q$\left(0,\dfrac{1}{2}t,0\right)$，R$(0,0,2-2t)$ より，

平面 PQR の方程式は $\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{\frac{1}{2}t}+\dfrac{z}{2-2t}=1$ これを変形して，$\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{\frac{1}{2}t}+\dfrac{z}{2-2t}-1=0$ であるから，

平面 PQR と点 O との距離 h は

$$h=\frac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{4}{t^t}+\dfrac{1}{4(1-t)^2}}}=\frac{2t(1-t)}{\sqrt{20(1-t)^2+t^2}}=\frac{2t(1-t)}{\sqrt{21t^2-40t+20}}$$

三角錐 OPQR の体積を $V(t)$ とおくと，$V(t)=\left(\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\dfrac{1}{2}t\right)\cdot(2-2t)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}t^2(1-t)$

$V(t)=\dfrac{1}{3}hS(t)$ より，$S(t)=\dfrac{3V(t)}{h}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}t^2(1-t)}{\frac{2t(1-t)}{\sqrt{21t^2-40t+20}}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}$　…答

参考

ヘロンの公式　三辺の長さ a，b，c の三角形の面積 S は $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とすると，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

別解　（ヘロンの公式を利用する解法）

問１（ｉ）$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{5}\,t$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}t^2+4t^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}t$ より，

$$s=\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+\sqrt{5}\,t+\dfrac{\sqrt{17}}{2}t}{2}=\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{17}}{4}t$$

$$S=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{17}}{4}t\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{4}t\times\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{17}}{4}t\times\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{17}}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{4}t^2}\quad\cdots\text{答}$$

（↑ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ がうまく使えるようになっている！）

ⅰ）$\dfrac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{5t^2-8t+4}$，

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\sqrt{\frac{1}{4}t^2+(2-2t)^2}=\frac{\sqrt{17t^2-32t+16}}{2}\ \text{より，}$$

$$s=\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+\sqrt{5t^2-8t+4}+\dfrac{\sqrt{17t^2-32t+16}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{5}\,t+2\sqrt{5t^2-8t+4}+\sqrt{17t^2-32t+16}}{4}$$

$5t^2-8t+4=A$，$17t^2-32t+16=B$ とおくと，

$$S=\sqrt{\frac{\sqrt{5}\,t+2\sqrt{A}+\sqrt{B}}{4}\times\frac{-\sqrt{5}\,t+2\sqrt{A}+\sqrt{B}}{4}\times\frac{\sqrt{5}\,t-2\sqrt{A}+\sqrt{B}}{4}\times\frac{\sqrt{5}\,t+2\sqrt{A}-\sqrt{B}}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}\,t+2\sqrt{A})^2-B}{4^2}\times\frac{B-(\sqrt{5}\,t-2\sqrt{A})^2}{4^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5t^2+4t\sqrt{5A}+4A-B}{4^2}\times\frac{B-5t^2+4t\sqrt{5A}-4A}{4^2}}=\sqrt{\frac{(4t\sqrt{5A})^2-(4A-B+5t^2)^2}{4^4}}$$

$4A-B+5t^2=8t^2$ より，$S=\sqrt{\dfrac{80t^2A-64t^4}{4^4}}=\sqrt{\dfrac{5t^2A-4t^4}{4^2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\sqrt{21t^4-40t^3+20t^2}}\quad\cdots$答

4　1個のさいころを6の目が2回出るまで投げ続ける。$k=1,2,3\cdots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に2回目の6の目が出る確率とするとき，次の問いに答えよ。

問１　p_k を求めよ。

問２　p_k を最大にする k の値を求めよ。

問３　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k$ を求めよ。

解答　問１　$k+1$ 回目に2回目の6の目が出るのは，

k 回目までで6の目がちょうど1回出て，$k+1$ 回目にも6の目が出るときである。

よって，求める確率 p_k は，$p_k={}_k\mathrm{C}_1\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{k\cdot 5^{k-1}}{6^{k+1}}}\quad\cdots$答

問２　$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=\dfrac{(k+1)5^k}{6^{k+2}}\times\dfrac{6^{k+1}}{k\cdot 5^{k-1}}=\dfrac{5(k+1)}{6k}$　$(k=1,2,3,\cdots)$ を利用して，p_k を最大にする k の値を求める。

（ｉ）$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ すなわち $p_{k+1}>p_k$ となるのは，$\dfrac{5(k+1)}{6k}>1$　より $k<5$ のときである。

（ii）$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=1$ すなわち $p_k=p_{k+1}$ となるのは，$\dfrac{5(k+1)}{6k}=1$　より $k=5$ のときである。

（iii）$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$ すなわち $p_{k+1}<p_k$ となるのは，$\dfrac{5(k+1)}{6k}<1$　より $k>5$ のときである。

（ｉ）～（iii）より，$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5=p_6>p_7>p_8>\cdots$　となるので，

p_k を最大にする k の値は　$\boldsymbol{k=5,6}$　…答

別解　$p_{k+1}-p_k=\dfrac{(k+1)5^k}{6^{k+2}}-\dfrac{k\cdot5^{k-1}}{6^{k+1}}=\dfrac{5^k}{6^{k+1}}\left\{\dfrac{k}{5}-\dfrac{k+1}{6}\right\}=\dfrac{5^{k-1}}{6^{k+2}}(k-5)$（$k=1,2,3,\cdots$）

を利用して，p_k を最大にする k の値を求める。kは自然数であるから，$\dfrac{5^{k-2}}{6^{k+2}}>0$ より，

（ｉ）$p_{k+1}-p_k>0$ すなわち $p_{k+1}>p_k$ となるのは，$k<5$ のときである。

（ii）$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=1$ すなわち $p_k=p_{k+1}$ となるのは，$k=5$ のときである。

（iii）$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}<1$ すなわち $p_{k+1}<p_k$ となるのは，$k>5$ のときである。

（ｉ）～（iii）より，$p_1<p_2<p_3<p_4<p_5=p_6>p_7>p_8>\cdots$　となるので，

p_k を最大にする k の値は　$\boldsymbol{k=5,6}$　…答

参考　$p_k=\dfrac{k\cdot5^{k-1}}{6^{k+1}}=\dfrac{1}{30}k\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$ とする。

$f(k)=k\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$ とすると，$f'(k)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^k+k\left(\dfrac{5}{6}\right)^k\log\dfrac{5}{6}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^k\left(1+k\log\dfrac{5}{6}\right)$

$f'(k)=0$のとき $k=-\dfrac{1}{\log\dfrac{5}{6}}=\dfrac{1}{\log\dfrac{6}{5}}$ より，$k>0$の範囲で $f(k)$ の増減表は以下のようになる。

k	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\log\dfrac{6}{5}}$	$\cdots$
$f'(k)$	/	$+$	0	$-$
$f(k)$	/	↗	最大	↘

常用対数表や e の近似値などの条件がない中で，これ以上の評価するのは厳しかった。

問３　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot5^{k-1}}{6^{k+1}}=\frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$　より，

$36S_n=1+2\cdot\dfrac{5}{6}+3\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$　…　①

①の両辺に $\dfrac{5}{6}$ をかけて　　$30S_n=1\cdot\dfrac{5}{6}+2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　…　②

①−②より，　$6S_n=1+\dfrac{5}{6}+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$$=\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n=6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n=6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

したがって，求める S_n の値は，　$S_n=\boldsymbol{1-\dfrac{n+6}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$ …答

別解　S_n は，$n+1$ 回さいころを投げる試行において「2回目または3回目または… $n+1$ 回目に2回目の6の目が出る」という事象，すなわち「6の目が2回以上出る」事象の確率である。

その余事象は「6の目が出ない，または1回だけ出る」事象であり，その確率は

$\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+{}_{n+1}C_1\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}=\left(\frac{5}{6}+\frac{n+1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}=\frac{n+6}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$ よって，$S_n=1-\frac{n+6}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$ …**答**

参考　$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ である。これは「さいころを相当な回数投げれば，６の目が2回以上は出るだろう」という素朴な感覚に一致する。

参考　X を「2回目の6の目が出るまでのさいころを投げる回数」とすると，X は確率変数であり

その確率分布は以下の表のようになる。

X	1	2	3	4	…	n	…
P	0	$\frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^0$	$\frac{2}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^1$	$\frac{3}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^2$	…	$\frac{n-1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$	…

X の期待値 $E(X)$ は，無限級数を用いて $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ と表される。

これを求めることにより，2回目の6の目が出るまでの平均回数を知ることができる。

以下，$E(X)$ を求める方法を2通り示す。

解①（高校数学の範囲。ただし $|r|<1$ で $\lim_{n\to\infty}nr^{n-1}=0$，$\lim_{n\to\infty}n^2r^{n-1}=0$ は既知とする。）

部分和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$ を S_n とすると，

$$36S_n=0+2\cdot1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0+3\cdot2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+\cdots+n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\quad\cdots①$$

両辺に $\frac{5}{6}$ を掛けて $30S_n=0+2\cdot1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1+\cdots+(n-1)(n-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}+n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots②$

①−②により　$6S_n=0+2+2\cdot2\left(\frac{5}{6}\right)^1+\cdots+2(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

よって　$S_n=\frac{1}{3}\left\{0+1+2\left(\frac{5}{6}\right)^1+\cdots+(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}-\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

ここで　$T_n=0+1+2\left(\frac{5}{6}\right)^1+\cdots+(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ とおいて，

$T_n-\frac{5}{6}T_n$ を活用して T_n を求めると　$T_n=36-6(n+5)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$　よって

$$S_n=\frac{1}{3}\left\{36-6(n+5)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}-\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}12-2(n+5)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}2(n+5)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}S_n=12$　$\therefore E(X)=12$

解②（無限級数が絶対収束するとき，項別微分が可能であることを利用）

一般に，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ は $|x|<1$ のとき絶対収束し，$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

この式の両辺を2階微分して　$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$

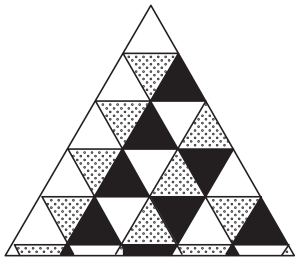
さらに　$x=\frac{5}{6}$ を代入すると　$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{2}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^3}=432$

よって　$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{432}{36}=12$

1　次の問いに答えよ。（50点）

問１　$2023x+374y=17$ を満たす整数 x，y の組を１つ求めよ。

問２　右図のように，同じ大きさの正三角形を並べて大きい正三角形を構築し，上から順番に１段目，２段目，３段目，…と呼ぶことにして，100 段目まで並べる。さらに，右図のように，各段の小三角形を左から白色，灰色，黒色の順に繰り返し塗ることとする。このとき，100 段目までの小三角形の総数と 100 段目までの白色の小三角形の個数を求めよ。



解答　問１　$2023x+374y=17$ の両辺を 17 で割ると，$119x+22y=1$　…①

ここで，$119=22\cdot5+9$　　$22=9\cdot2+4$　　$9=4\cdot2+1$

より，$1=9-4\cdot2=9-(22-9\cdot2)\cdot2=9\cdot5-22\cdot2=(119-22\cdot5)\cdot5-22\cdot2=119\cdot5+22\cdot(-27)$

よって，$119\cdot5+22\cdot(-27)=1$

であるから，①を満たす整数 x，y の組の１つは，$(x, y)=(5, -27)$

すなわち，$2023x+374y=17$ を満たす整数 x，y の組の１つは，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{5}, \boldsymbol{-27})$ …答

問２　１段目，２段目，… の小三角形の個数を並べた数列を $\{a_n\}$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 2 の等差数列なので，その一般項は $a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$ …②

100 段目までの小三角形の総数は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}(2k-1)=\frac{1}{2}\cdot100\cdot(1+199)=\mathbf{10000}$　…答

白色の小三角形の個数を求めるために３段ごとに分けて考える。k が自然数とすると，② より，

$$\begin{cases} a_{3k-2}=2(3k-2)-1=6k-5 \\ a_{3k-1}=2(3k-1)-1=6k-3 \\ a_{3k}==2\cdot3k-1=6k-1 \end{cases}$$

１段目，２段目，… の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ とすると，

$$\begin{cases} a_{3k-2}=6k-5=3(2k-2)+1 \\ a_{3k-1}=6k-3=3(2k-1) \\ a_{3k}=6k-1=3(2k-1)+2 \end{cases}\quad\text{であるから，}\quad\begin{cases} b_{3k-2}=2k-2+1=2k-1 \\ b_{3k-1}=2k-1 \\ b_{3k}=2k-1+1=2k \end{cases}$$

よって，100 段目までの白色の小三角形の個数は

$$\sum_{l=1}^{100}b_l=\sum_{k=1}^{33}(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k})+b_{100}=\sum_{k=1}^{33}(6k-2)+b_{3\cdot34-2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot33\cdot(4+196)+67=3300+67=\mathbf{3367}\quad\text{…答}$$

別解　n 段目までの小三角形の総数は n^2 であるから，100 段目までの小三角形の総数は $100^2=\mathbf{10000}$ …答

別解　１段目，２段目，… の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ として100 段目まで並べると，

1，1，2，3，3，4，5，5，6，7，7，8，… ,63，64，65，65，66，67

$$(1+2+3+\cdots+67)+(1+3+\cdots+65)=\frac{1}{2}\cdot67\cdot(67+1)+\frac{1}{2}\cdot33\cdot(1+65)=2278+1089=\mathbf{3367}\text{…答}$$

別解　１段目，２段目，… の白色の小三角形の個数を並べた数列を $\{b_n\}$ として並べると，

1，1，2，3，3，4，5，5，6，7，7，8，…

３項ずつまとめて $\displaystyle\sum_{l=1}^{100}b_l$ を考えると，$\displaystyle\sum_{l=1}^{100}b_l=\sum_{l=1}^{99}b_l+b_{100}$ であり，

$\displaystyle\sum_{l=1}^{99}b_l=4+10+16+\cdots+(6\cdot33-2)=\frac{1}{2}\cdot33\cdot(4+196)=3300$，$b_{100}=b_{99}+1=2\cdot33+1=67$

したがって，$\displaystyle\sum_{l=1}^{100}b_l=3300+67=\mathbf{3367}$　…答

2 $f(x)=x^3+x^2$ とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問１　$f(x)$ の増減，極値を調べ， $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

問２　$0<a<1$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ によって囲まれた２つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ。

問３　$0<a<1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

解答　問１　$f(x)=x^3+x^2$ より，$f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=-\dfrac{2}{3}, 0$ であるから，$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

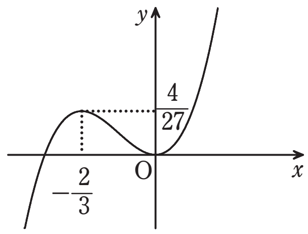
x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$, $f(0)=0$ より，

$f(x)$ は，**$x=-\dfrac{2}{3}$ のとき，極大値 $\dfrac{4}{27}$** ，

$x=0$　のとき，極小値　0　をとる。

また， $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。　…答



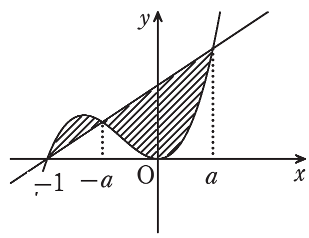
問２　曲線 $f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ との共有点の x 座標をもとめる。

$x^3+x^2=a^2(x+1)$ より，$(x+a)(x-a)(x+1)=0$ であるから，

$x=-1, \pm a$

ここで， $0<a<1$ より，$-1<-a<0<a<1$ であるから，

$S(a)$ は右図の斜線部分の面積となり，



$$S(a)=\int_{-1}^{-a}\{x^3+x^2-a^2(x+1)\}dx+\int_{-a}^{a}\{a^2(x+1)-(x^3+x^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{a^2}{2}x^2-a^2x\right]_{-1}^{-a}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{a^2}{2}x^2+a^2x\right]_{-a}^{a}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^4+a^3\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2\right)\right\}$$

$$+\left\{\left(-\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^4+a^3\right)-\left(-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^4-a^3\right)\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{4}a^4+\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{12}\right)+\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^3\right)$$

$$=-\frac{1}{4}a^4+2a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{12}$$　…答

問３　問２より，$S'(a)=-a^3+6a^2-a=-a(a^2-6a+1)$

$S'(a)=0$ のとき， $0<a<1$ より， $a=3-2\sqrt{2}$

したがって，$0<a<1$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	/	$-$	0	$+$	/
$S(a)$	/	↘	最小	↗	/

以上より， $S(a)$ を最小にする a の値は　**$a=3-2\sqrt{2}$**　…答

$\boxed{1}$ 関数 $y=x\sqrt{9-x^2}$ に対して，次の問いに答えよ。（50点）

問１　増減を調べてこの関数のグラフの概形をかけ。

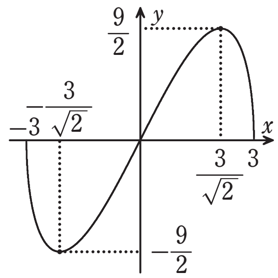
問２　この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ。

解答　問１　$9-x^2\geqq 0$ より，定義域は $-3\leqq x\leqq 3$ である。

$$y'=\sqrt{9-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

より，増減表およびグラフの概形は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0



問２　図形は原点に関して対称なので，求める面積は，$2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=2\left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=18$ …答

別解　$x=3\sin\theta$ とすると，

$$2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin\theta\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\sin\theta|\cos\theta|\,dx=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,dx$$

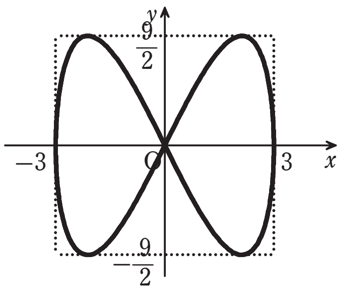
$$=-18\left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{9}{2}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{9}{2}(-1-1)=18 \text{ …答}$$

参考　$x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$y=3\sin\theta\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}=9\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{2}\sin 2\theta$

よって，この曲線はリサージュ曲線 $x=3\sin\theta$，$y=\frac{9}{2}\sin 2\theta$

(右図) の $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分である。



$\boxed{2}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とし，$f(x)=F(3x)-F(x)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$f'(x)$ を求めよ。

問２　$x \geqq 0$ の範囲で，$f(x)$ の最大値を求めよ。

解答　問１　$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$u=3x$ とすると $\dfrac{d}{dx}F(3x)=\dfrac{d}{du}F(u)\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3}{1+(3x)^2}=\dfrac{3}{1+9x^2}$

なので，$f'(x)=3F'(3x)-F'(x)=\dfrac{3}{1+9x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=\boldsymbol{\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}}$ …答

問２　$f'(x)=\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}$ より，$x \geqq 0$ の範囲で，増減表を書くと，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	最大	↘

したがって，$x \geqq 0$ の範囲で，$f(x)$ の最大値は，次の積分で与えられる。

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=F(\sqrt{3})-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}$$

ここで，$t=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$，$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であり，

$t:\dfrac{1}{\sqrt{3}}\to\sqrt{3}$ のとき，$\theta:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{3}$ より，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ …答

参考

$y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数 $y=\tan^{-1}x$ について

$\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$（$C$ は積分定数）

が成り立つ。

証明　$y=\tan^{-1}x$ について，$x=\tan y$

両辺を y で微分して　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{1+x^2}$

すなわち　$(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　だから　$\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$（$C$ は積分定数）

よって　$F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\Big[\tan^{-1}t\Big]_0^x=\tan^{-1}x-\tan^{-1}0=\tan^{-1}x$ だから

$$f(x)=F(3x)-F(x)=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x$$

これを用いると，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=F\left(3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$ …答

$\boxed{3}$ 自然数からなる２つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める。次の問いに答えよ。(50点)

問１　すべての自然数 n に対して，a_n は奇数，b_n は偶数であることを示せ。

問２　すべての自然数 n に対して，$1+2+3+\cdots+\dfrac{a_n-3}{2}+\dfrac{a_n-1}{2}=1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$ が成立することを示せ。

解答　問１　i）$n=1$ のとき，$a_1=3$，$b_1=2$ より a_n は奇数，b_n は偶数である

ii）$n=k$ のとき，a_n は奇数，b_n は偶数である。すなわち，a_k は奇数，b_k は偶数であると仮定すると，

$n=k+1$ のとき，

$a_{k+1}+b_{k+1}\sqrt{2}=(a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=3a_k+4b_k+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}$

a_k，b_k は自然数で，$\sqrt{2}$ は無理数なので，$a_{k+1}=3a_k+4b_k$，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$

$a_{k+1}=3a_k+4b_k$ と，$3a_k$ は奇数，$4b_k$ は偶数であるから a_{k+1} は奇数

$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ と，$2a_k$ は偶数，$3b_k$ は偶数であるから b_{k+1} は偶数

以上より，すべての自然数 n に対して，a_n は奇数，b_n は偶数である。…終

問２　$1+2+3+\cdots+\dfrac{a_n-3}{2}+\dfrac{a_n-1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n-1}{2}\cdot\dfrac{a_n+1}{2}=\dfrac{a_n{}^2-1}{8}$

$1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)=\dfrac{b_n{}^2}{4}$

なので，$\dfrac{a_n{}^2-1}{8}=\dfrac{b_n{}^2}{4}$　すなわち　$a_n{}^2-1=2b_n{}^2$ …① を示せばいい。

i）$n=1$ のとき，（左辺）$=a_1{}^2-1=9-1=8$，（右辺）$=2b_1{}^2=2\cdot4=8$ より ① は成り立つ。

ii）$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると，$a_k{}^2-1=2b_k{}^2$

$n=k+1$ のとき，

（左辺）$=a_{k+1}{}^2-1=(3a_k+4b_k)^2-1=9a_k{}^2+24a_kb_k+16b_k{}^2-1$

（右辺）$=2b_{k+1}{}^2=2(2a_k+3b_k)^2=8a_k{}^2+24a_kb_k+18b_k{}^2$

（左辺）－（右辺）$=a_k{}^2-2b_k{}^2-1=0$

より，① は成り立つ。

以上より，すべての自然数 n に対して，

$1+2+3+\cdots+\dfrac{a_n-3}{2}+\dfrac{a_n-1}{2}=1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$ が成立する。…終

参考

p，q を有理数として　$p+q\sqrt{2}$ の共役 $\overline{p+q\sqrt{2}}$ を　$\overline{p+q\sqrt{2}}=p-q\sqrt{2}$　と定義する。
(※ $p+q\sqrt{2}$ と $p-q\sqrt{2}$ は，有理数体 Q の拡大体 $Q(\sqrt{2})$ 上の共役元である。)
このとき，有理数 p，q，r，s に対して

$$\overline{(p+q\sqrt{2})(r+s\sqrt{2})}=\overline{p+q\sqrt{2}}\cdot\overline{r+s\sqrt{2}}$$

が成り立つ。

－－

証明）

$$\begin{aligned}\overline{(p+q\sqrt{2})(r+s\sqrt{2})}&=\overline{(pr+2qs)+(ps+qr)\sqrt{2}}\\&=(pr+2qs)-(ps+qr)\sqrt{2}\\&=(p-q\sqrt{2})(r-s\sqrt{2})\\&=\overline{p+q\sqrt{2}}\cdot\overline{r+s\sqrt{2}}\end{aligned}$$

これにより　$\overline{(3+2\sqrt{2})^n}=(\overline{3+2\sqrt{2}})^n=(3-2\sqrt{2})^n$　が成り立つから，

$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ の両辺の共役をとれば　$(3-2\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が得られる。

また，積 $(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})$ を計算すると

$$(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n$$
$$=\{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\}^n=1$$

すなわち $a_n{}^2-2b_n{}^2=1$ であるから，これにより問２で示したい等式　$a_n{}^2-1=2b_n{}^2$　が得られる。

参考　a_n，b_n は以下のように求められる。問１より，$a_{n+1}=3a_n+4b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ であるから，

$a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{2}=3a_n+4b_n-(2a_n+3b_n)\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})a_n+(4-3\sqrt{2})b_n=(a_n-b_n\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$

$a_1=3$，$b_1=2$ より，数列 $\{a_n-b_n\sqrt{2}\}$ は，初項 $3-2\sqrt{2}$，公比 $3-2\sqrt{2}$ の等比数列であるから

$a_n-b_n\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^n$　…①　これと，問題より，$a_n+b_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$ …②

(①＋②)÷２より，　$a_n=\dfrac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}$

(②－①)÷$2\sqrt{2}$ より，$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}$

参考　線形代数の行列の対角化を利用して，a_n，b_n は以下のように求めることができる。

問１より，$a_{n+1}=3a_n+4b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ であるから，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}a_{n-2}\\b_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

A の固有値を λ として，$|A-\lambda E|=0$ を解くと，

$\begin{vmatrix}3-\lambda&4\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-2\cdot4=\lambda^2-6\lambda+1$　より，$\lambda=3\pm2\sqrt{2}$

$\lambda_1=3+2\sqrt{2}$，$\lambda_2=3-2\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ とすると，

$(A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}&4\\2&-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を解くと，$x=\sqrt{2}\,y$ であるから，$y=c_1$ とおくと $\boldsymbol{x}_1=c_1\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&4\\2&2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を解くと，$x=-\sqrt{2}\,y$ であるから，$y=c_2$ とおくと $\boldsymbol{x}_2=c_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&1\end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}=\dfrac{1}{|P|}\begin{pmatrix}1&-(-\sqrt{2})\\-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ であり，

$P^{-1}AP=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}8+6\sqrt{2}&0\\0&-8+6\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

と対角化できた。$A=P\begin{pmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}P^{-1}$　であるから，

$$A^n=P\begin{pmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}(3+2\sqrt{2})^n&0\\0&(3-2\sqrt{2})^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(3+2\sqrt{2})^n&0\\0&(3-2\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}&2\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}\\(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n&\sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}\end{pmatrix}$$

したがって，$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}\} & 2\{(3+2\sqrt{2})^{n-1}-(3-2\sqrt{2})^{n-1}\} \\ (3+2\sqrt{2})^{n-1}-(3-2\sqrt{2})^{n-1} & \sqrt{2}\{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (3\sqrt{2}+4)(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3\sqrt{2}-4)(3-2\sqrt{2})^{n-1} \\ (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(3+2\sqrt{2})^{n}+\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^{n} \\ (3+2\sqrt{2})^{n}+(3-2\sqrt{2})^{n} \end{pmatrix}$$

以上より，　$a_n=\frac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\}$　，$b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n\}$

4 赤球が 1 個，白球が 2 個入った袋から球を 1 個取り出して，その色を見てから袋に戻すという試行を，白球が 2 回続けて出るまで行う。n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を p_n，n 回目に赤球を取り出す確率を q_n とする。次の問いに答えよ。 (50点)

問 1　p_{n+1}，q_{n+1} を，p_n，q_n を用いて表せ。

問 2　$a_n=p_n-q_n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問 3　$b_n=(-3)^n p_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問 4　$n+1$ 回目で試行が終わる確率を求めよ。

解答　問 1　p_{n+1} は，「n 回目に赤球を取り出し，$n+1$ 回目に白球を取り出す」確率なので，$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n$ …答

q_{n+1} は，「n 回目に赤球を取り出し，$n+1$ 回目に赤球を取り出す」または「n 回目に白球を取り出し，$n+1$ 回目に赤球を取り出す」確率なので，$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n=\frac{1}{3}(p_n+q_n)$ …答

問 2　問 1 より，$a_{n+1}=p_{n+1}-q_{n+1}=\frac{2}{3}q_n-\frac{1}{3}(p_n+q_n)=-\frac{1}{3}(p_n-q_n)=-\frac{1}{3}a_n$

また，$a_1=p_1-q_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ なので，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列なので

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …答

問 3　問 1，問 2 より，$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n=\frac{2}{3}(p_n-a_n)=\frac{2}{3}p_n-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

両辺に $(-3)^{n+1}$ をかけると，$(-3)^{n+1}p_{n+1}=-2\cdot(-3)^n p_n-2$

$b_n=(-3)^n p_n$ より，$b_{n+1}=-2b_n-2$　これを変形すると，$b_{n+1}+\frac{2}{3}=-2\left(b_n+\frac{2}{3}\right)$

となるので，数列 $\left\{b_n+\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $b_1+\frac{2}{3}=-3\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列なので

$b_n+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}(-2)^{n-1}=\frac{2}{3}(-2)^n$ より，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\frac{2}{3}(-2)^n-\frac{2}{3}$ …答

参考　特性方程式 $c=-2c-2$ を解くと $c=-\frac{2}{3}$ であるから，$b_{n+1}+\frac{2}{3}=-2\left(b_n+\frac{2}{3}\right)$ と変形できる。

問 4　$n+1$ 回目で試行が終わる確率は，「n 回目に白球を取り出し，$n+1$ 回目に白球を取り出す」確率なので，求める確率は，$\frac{2}{3}p_n$ である。

問 3 より，$b_n=\frac{2}{3}(-2)^n-\frac{2}{3}$ であるから，$(-3)^n p_n=\frac{2}{3}(-2)^n-\frac{2}{3}$ より，$p_n=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

以上より，求める確率は $\frac{2}{3}p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}-\frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …答