令和６年度

第４８回高校数学教育を考える会
（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

目次

令和６年度　　琉球大学入試試験問題についての感想と質問
（　高数教　　大学入試問題検討委員会　）

前期日程　甲　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１１

前期日程　乙　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１２

後期日程　　　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１３

令和６年度　　琉球大学入試問題　　解答例
（　高数教　　大学入試問題検討委員会　）

前期日程　甲　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１４～１９

前期日程　乙　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２０～２４

後期日程　　　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２５～２９

令和６年度（2024）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1 問１ 問２ 問３	 数Ⅲ 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 微分法 積分法	 標準 標準 難	・問３は、問われていることは単純であるものの計算量が多いので、答にたどり着けない受験生もいたのではないか。
2 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 微分法	 標準 標準	・入試問題として頻出の標準的な内容であり、基礎力を測れる問題だった。
3 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 複素数平面 複素数平面	 標準 標準	・授業などで見ていると、複素数の絶対値や共役などを扱う式変形を苦手とする生徒が多いと感じる。正答率はどうだったか。
4 問１ 問２ 問３	 数Ａ 数Ｂ 数Ⅲ	 確率 数列 極限	 易 標準 標準	・確率漸化式の問題であったが、誘導が丁寧だったので解きやすいと感じた。
全体 ・1の問３では、複雑な計算を最後までやり切る力を問う事を意図しているか。				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和６年度（2024）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質　問　事　項
$\boxed{1}$				
問１	数 A	整数	易	・問３は三角関数の加法定理や実数の大小評価など色々な基礎知識を複合する力が必要となるよう工夫された問題だった。授業で見ていると、特に実数の大小評価が苦手な生徒が多いが、記述はどの程度できていたか。
問２	数Ⅱ	複素数と方程式	易	
問３	数 B	ベクトル	標準	
$\boxed{2}$				
問１	数Ⅱ	図形と方程式	標準	・問１で「円と放物線の方程式から x^2 を消去して得られる y の２次方程式の判別式 D を０とする」という方針をとれる受験生はどの程度いると想定していたか。また実際、どの程度いたか。
問２	数Ⅱ	積分法	標準	

全体

・易しい問題から始まって１問ごとに難しくなっていくので、受験生の力を測りやすい構成だったと感じた。

（注 : 易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和６年度（2024）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題番号	範囲	分野	難易度	質問事項
1				
問１	数Ⅲ	微分法	標準	・問３は計算量がかなり多く、答にたどり着けない受験生もいたのではないか。
問２	数Ⅲ	微分法	標準	
問３	数Ⅲ	微分法	難	
2				
問１	数Ⅲ	積分法	標準	・誘導が丁寧で、三角関数や積分の基礎知識が互いに関連していく良問だった。
問２	数Ⅱ	三角関数	標準	
問３	数Ⅲ	積分法	標準	
3				
問１	数Ｂ	数列	標準	・隣接３項間漸化式の問題であるが、階差数列の誘導があって解きやすいと感じた。
問２	数Ｂ	数列	標準	
問３	数Ｂ	数列	標準	
4				
問１	数Ａ	確率	易	・問３は、くじの引き方を○×の順列に置き換える発想の柔軟性が求められる良問だった。 ・問３を２～８番目それぞれの確率をすべて求めて最大値を答える「総当たり」で解く受験生はいたか。
問２	数Ａ	確率	易	
問３	数Ａ	確率	標準	

全体

・全体的に誘導が丁寧で、解きやすいと感じた。

・1の問３では、複雑な計算を最後までやり切る力を問う事を意図しているか。

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

1　a を正の実数とする。曲線 $y=\log x$ の点 $(a,\ \log a)$ における接線を l_1，点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線を l_2 とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　接線 l_1 の方程式を求めよ。

問２　l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ。

問３　曲線 $y=\log x$ と直線 l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$\dfrac{S(a)}{a}$ を求めよ。

解答

問１　$y'=\dfrac{1}{x}$ より，l_1 の方程式は　$y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x-1+\log a$

問２　l_1 と同様に l_2 の方程式を求めると　$y=\dfrac{1}{2a}x-1+\log 2a$

方程式　$\dfrac{1}{a}x-1+\log a=\dfrac{1}{2a}x-1+\log 2a$　を解くと

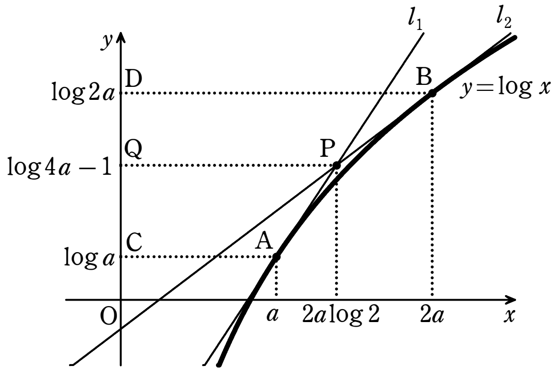
$$\frac{1}{2a}x=\log 2$$

$$x=2a\log 2$$

これを l_1 の方程式に代入して　$y=\dfrac{1}{a}\cdot 2a\log 2-1+\log a=2\log 2+\log a-1=\log 4a-1$

よって，求める交点の座標は　$(2a\log 2,\ \log 4a-1)$

問３　$\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(2a,\ \log 2a)$，
$\mathrm{C}(0,\ \log a)$，$\mathrm{D}(0,\ \log 2a)$，
$\mathrm{P}(2a\log 2,\ \log 4a-1)$，$\mathrm{Q}(0,\ \log 4a-1)$
とする。



$y=\log x$ を変形すると $x=e^y$ で，常に $x>0$ である。
よって，台形ACQP，台形PQDB の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

$$S(a)=\int_{\log a}^{\log 2a} e^y dy-S_1-S_2$$

が成り立つ。

ここで，

$$\int_{\log a}^{\log 2a} e^y dy=\Big[e^y\Big]_{\log a}^{\log 2a}=e^{\log 2a}-e^{\log a}=2a-a=a$$

$$S_1=\frac{1}{2}(a+2a\log 2)\{(\log 4a-1)-\log a\}=\frac{a}{2}(1+2\log 2)(2\log 2-1)=\frac{a}{2}\{4(\log 2)^2-1\}$$

$$S_2=\frac{1}{2}(2a\log 2+2a)\{\log 2a-(\log 4a-1)\}=\frac{a}{2}(2\log 2+2)(1-\log 2)=\frac{a}{2}\{2-2(\log 2)^2\}$$

これより　$S(a)=a-\dfrac{a}{2}\{4(\log 2)^2-1\}-\dfrac{a}{2}\{2-2(\log 2)^2\}$

よって　$\dfrac{S(a)}{a}=1-\dfrac{1}{2}\{4(\log 2)^2-1\}-\dfrac{1}{2}\{2-2(\log 2)^2\}$

$$=1-\frac{1}{2}\{4(\log 2)^2-1+2-2(\log 2)^2\}$$

$$=1-\frac{1}{2}\{2(\log 2)^2+1\}$$

$$=\frac{1}{2}-(\log 2)^2$$

$\boxed{\text{参考}}$

問３は　$S(a)=\int_a^{2a\log 2}\left\{\left(\frac{1}{a}x-1+\log a\right)-\log x\right\}dx+\int_{2a\log 2}^{2a}\left\{\left(\frac{1}{2a}x-1+\log 2a\right)-\log x\right\}dx$

$$=\int_a^{2a\log 2}\left(\frac{1}{a}x-1+\log a\right)dx+\int_{2a\log 2}^{2a}\left(\frac{1}{2a}x-1+\log 2a\right)dx-\int_a^{2a}\log x\,dx$$

を計算することによっても求められる。

$\boxed{2}$ a を実数とし，$f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+a$ とする。次の問いに答えよ。（50点）

問１　曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

問２　原点Ｏから曲線 $y=f(x)$ にちょうど２本の接線が引けるような a の値を求めよ。

解答

問１　$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ であるから，求める接線の方程式は $y-\left(t^2-\dfrac{1}{t}+a\right)=\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)(x-t)$

すなわち $y=\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)x-t^2-\dfrac{2}{t}+a$

問２　問１で求めた接線が原点Ｏを通るとき，$0=-t^2-\dfrac{2}{t}+a$

すなわち　$t^2+\dfrac{2}{t}=a$

$g(t)=t^2+\dfrac{2}{t}$ とおく。２つのグラフ $y=g(t)$，$y=a$ の異なる共有点の個数がちょうど２個となるような a の値を求めればよい。

$g'(t)=2t-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2(t^3-1)}{t^2}=\dfrac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^3}$

$t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より，

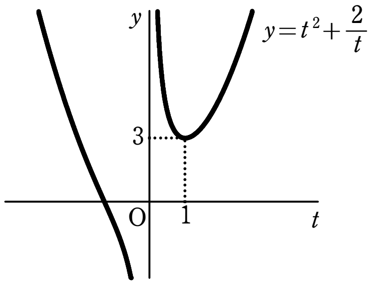
$g(t)$ の増減は右の表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	/	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	/	$\searrow$	3	$\nearrow$

また，

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}g(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-0}g(t)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$

よって，$y=g(t)$ のグラフは右の図のようになる。



このグラフと $y=a$ のグラフの異なる共有点の個数が２個となるのは

$a=3$

のときのみであるから，求める a の値は　$a=3$

3 z を複素数で $|z-1|=\sqrt{2}$ をみたすものとし，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とする。次の問いに答えよ。（50点）

問 1　$\left|\dfrac{1}{z}+1\right|^2=2$ であることを示せ。

問 2　$|w-2||w+2|=4$ であることを示せ。

解答

問 1　$z\fallingdotseq 0$ より，$|z-1|=\sqrt{2}$ の両辺を $|z|$ で割って　$\left|1-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{|z|}$

両辺を 2 乗して　$\left|1-\dfrac{1}{z}\right|^2=\dfrac{2}{|z|^2}$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\overline{\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{|z|^2}$$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{2}{|z|^2}$$

$$1-\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{|z|^2}=\frac{2}{|z|^2}$$

$$\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=1$$

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{\overline{z}}+1\right)-1=1$$

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)\overline{\left(\frac{1}{z}+1\right)}=2$$

よって　$\left|\dfrac{1}{z}+1\right|^2=2$

別解

問 1　（左辺）$=\left|\dfrac{1}{z}+1\right|^2=\left(\dfrac{1}{z}+1\right)\overline{\left(\dfrac{1}{z}+1\right)}=\left(\dfrac{1}{z}+1\right)\left(\dfrac{1}{\overline{z}}+1\right)=\dfrac{1}{|z|^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}+1$

ここで，$z\fallingdotseq 0$ より

$|z-1|=\sqrt{2}$ の両辺を $|z|$ で割って　$\left|1-\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{|z|}$

両辺を 2 乗して　$\left|1-\dfrac{1}{z}\right|^2=\dfrac{2}{|z|^2}$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\overline{\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{|z|^2}$$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{2}{|z|^2}$$

$$1-\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{|z|^2}=\frac{2}{|z|^2}$$

$$\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=1$$

したがって，

（左辺）$=\dfrac{1}{|z|^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}+1=1+1=2=$（右辺）

以上より　$\left|\dfrac{1}{z}+1\right|^2=2$

問２　$(w-2)(w+2)=w^2-4$

$$=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-4$$

$$=z^2-2+\frac{1}{z^2}=\left(z-\frac{1}{z}\right)^2$$

ここで　$(z-1)\left(\frac{1}{z}+1\right)=1+z-\frac{1}{z}-1=z-\frac{1}{z}$

よって　$(w-2)(w+2)=\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=(z-1)^2\left(\frac{1}{z}+1\right)^2$ が成り立つ。

$|z-1|^2=2$，$\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=2$ であるから

$|w-2||w+2|=|z-1|^2\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=2\cdot2=4$

参考

２点$(-a,\ 0)$，$(a,\ 0)$からの距離の積が a^2 である点の軌跡は

レムニスケート(連珠形) と呼ばれ，∞ のような形の曲線となる。

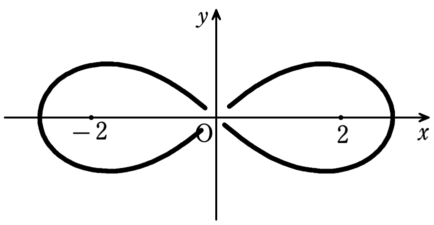
方程式は $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$

極方程式は $r^2=2a^2\cos 2\theta$

この問における点 w の軌跡は $a=2$ の場合のレムニスケート(右図) となる。

なお一般に，２定点からの距離の積が一定である点の軌跡は

カッシーニの卵形線と呼ばれる。



GeoGebraによる作図

点 z，$\frac{1}{z}$，$w=z+\frac{1}{z}$ の動きのシミュレーション

4 白玉 1 個が入った袋 A と，白玉 2 個と赤玉 2 個が入った袋 B がある。袋 B から無作為に玉を 1 個取り出し，袋 A に入っている玉と交換する。この試行を繰り返す。 n 回試行を繰り返した後に，袋 A に入っている玉が白である確率を p_n とする。次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　p_1 を求めよ。

問 2　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

問 3　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

解答

問 1　p_1 は白玉 2 個と赤玉 2 個が入った袋 B から白玉を取り出す確率なので，$p_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

問 2　p_{n+1} は，次の (i) または (ii) が起こる確率である。

(i) n 回目の試行を終了した時点で袋 A に白玉 1 個，袋 B に白玉 2 個と赤玉 2 個が入っていて，この袋 B から $n+1$ 回目の試行で白玉を取り出す。

(ii) n 回目の試行を終了した時点で袋 A に赤玉 1 個，袋 B に白玉 3 個と赤玉 1 個が入っていて，この袋 B から $n+1$ 回目の試行で白玉を取り出す。

よって　$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{4}+(1-p_n)\cdot\frac{3}{4}$

すなわち　$p_{n+1}=-\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}$

問 3　問 2 の結果を変形して　$p_{n+1}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{3}{5}\right)$

これより，数列 $\left\{p_n-\frac{3}{5}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{10}$ ，公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{3}{5}=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって　$p_n=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=0$　より，$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{3}{5}$

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。(50点)

問1　2024 の正の約数の総和を求めよ。

問2　4 乗すると 1 になる複素数をすべて求めよ。

問3　大きさ 1 のベクトルが 2 つあり，そのなす角は 75° である。このとき，この 2 つのベクトルの内積と $\dfrac{1}{4}$ はどちらが大きいか答えよ。

解答

問1　$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$

よって，2024 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23)=15\cdot 12\cdot 24=4320$

問2　$x^4=1$ を解くと

$x^4-1=0$

$(x^2+1)(x^2-1)=0$

$(x+i)(x-i)(x+1)(x-1)=0$

$x=\pm i,\ \pm 1$

よって，求める複素数は　$\pm i$，± 1

問3　与えられた 2 つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 75^\circ=1\cdot 1\cdot\cos 75^\circ=\cos 75^\circ$

ここで　$\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ と 1 の大小を比べる。2 乗の差を取って

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-1^2=(8-4\sqrt{3})-1=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0$$

よって　$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2>1^2$

$\sqrt{6}-\sqrt{2}>0$，$1>0$ だから　$\sqrt{6}-\sqrt{2}>1$

よって　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>\dfrac{1}{4}$

すなわち　$\vec{a}\cdot\vec{b}>\dfrac{1}{4}$

2 xy 平面上で，中心が点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$ で半径が１の円と，放物線 $y=x^2+a$（a は定数）が，異なる２点で接している。ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点における円の接線と放物線の接線が一致することであり，その点を接点という。次の問いに答えよ。（50点）

問１　a の値を求めよ。

問２　２つの接点をＡ，Ｂとする。ただし，Ａの x 座標はＢの x 座標より小さいとする。線分 PA，PB と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

問１　円の方程式は　$x^2+(y-2)^2=1$

放物線の方程式を変形して　$x^2=y-a$

これを円の方程式に代入すると　$(y-a)+(y-2)^2=1$

整理して　$y^2-3y+3-a=0$ …①

与えられた円と放物線が異なる２点で接するための必要十分条件は，

y の２次方程式①が重解を持つことである。……(＊)

①の判別式を D とすると　$D=(-3)^2-4(3-a)=4a-3$

$D=0$ となればよいから　$a=\dfrac{3}{4}$

(＊)について

円と放物線が異なる２点で接する状況を考えるため，$a<1$ とする。

GeoGebra リンク

$a=\dfrac{3}{4}$ で $D=0$ となり，①は重解 $\dfrac{3}{2}$ をもつ。

このときの円と放物線の共有点は２点 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ である。これをＡ，Ｂとする。

また，$\dfrac{3}{4}<a<1$ で $D>0$ となり，①は異なる２つの実数解をもつ。これを y_1，$y_2\ (y_1<y_2)$ とおく。

このとき円と放物線は異なる４点で交わる。その交点を

$\mathrm{C}(-x_1,\ y_1)$，$\mathrm{D}(-x_2,\ y_2)$，$\mathrm{E}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{F}(x_2,\ y_2)$　$(0<x_1<x_2)$

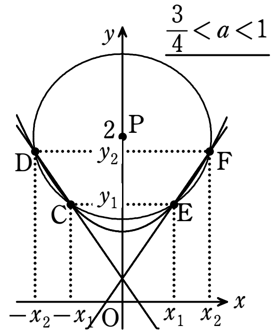
とする。これらはすべて円の下半分，曲線 $y=2-\sqrt{1-x^2}$ 上の点である。

$f(x)=x^2+a$，$g(x)=2-\sqrt{1-x^2}$ とする。

直線 EF の傾きを m とすると，平均値の定理より

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),\quad x_1<\xi<x_2$$

を満たす ξ が存在する。



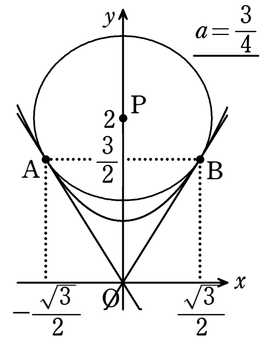
ここで $a\to\dfrac{3}{4}+0$ とすると，$x_1\to\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_2\to\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\xi\to\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$m\to f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が成り立つ。

さらに，Ｅ，Ｆは放物線と円の交点だから，$\dfrac{3}{4}<a<1$ で常に

$$f(x_1)=g(x_1),\quad f(x_2)=g(x_2)$$

が成り立つ。よって同様の議論により　$m\to g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が成り立つ。



$f'(x)$，$g'(x)$ は連続だから，$a=\dfrac{3}{4}$ のとき $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が成り立ち，

点Ｂにおける放物線と円の接線は一致するといえる。点Ａにおける接線についても同様。

参考　一般に，2 曲線 $x^2=f(y)$，$x^2=g(y)$ について

$x^2=f(y)$ の両辺を y で微分すると　$2x\cdot\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$

よって $x\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{f'(y)}{2x}$

同様に $x^2=g(y)$ について $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{g'(y)}{2x}$ であるから

2 曲線 $x^2=f(y)$，$x^2=g(y)$ が点 $(p,\ q)$ $(p\fallingdotseq 0)$ で接することと

$$f(q)=g(q)=p^2 \text{ かつ } \frac{f'(q)}{2p}=\frac{g'(q)}{2p}$$

すなわち　$f(q)=g(q)$　かつ　$f'(q)=g'(q)$

であることは同値である。

さらに，$h(y)=f(y)-g(y)$ とおいて $h(y)$ が 2 次以上の多項式であるとき

$f(q)=g(q)$　かつ　$f'(q)=g'(q)$　$\Longleftrightarrow$　y の方程式 $h(y)=0$ は二重解 q をもつ

が成り立つ。

証明

$(\Longrightarrow)$ $h(y)=(y-q)^2Q(y)+ay+b$ とすると，

$f(q)=g(q)$ より $h(q)=0$ だから　$aq+b=0$ …①

また $h'(y)=2(y-q)Q(y)+(y-q)^2Q'(y)+a$

$f'(q)=g'(q)$ より $h'(q)=0$ だから　$a=0$ …②

①，②より $a=b=0$

よって $h(y)=(y-q)^2Q(y)$ だから，方程式 $h(y)=0$ は二重解 q をもつ。

$(\Longleftarrow)$ $h(y)=0$ が二重解 q をもつとき，$h(y)=(y-q)^2Q(y)$ と表せる。

このとき　$h(q)=0$ より　$f(q)=g(q)$

また，$h'(y)=2(y-q)Q(y)+(y-q)Q'(y)$ より $h'(q)=0$ だから　$f'(q)=g'(q)$

別解　（条件「接線が一致する」から求める）

円の方程式は　$x^2+(y-2)^2=1$

円と放物線の接点の座標を $(p,\ q)$ とする。$p=0$ のとき 2 曲線は異なる 2 点で接しないから　$p\fallingdotseq 0$

この点における円の接線の方程式は　$px+(q-2)(y-2)=1$

すなわち　$px+(q-2)y-2q+3=0$ …①

また放物線について，$y'=2x$ だから点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$y-q=2p(x-p)$$

すなわち　$px-\dfrac{1}{2}y-p^2+\dfrac{1}{2}q=0$ …②

①と②が一致するときを考える。$p\fallingdotseq 0$ だから y の係数と定数項をそれぞれ比較して

$$q-2=-\frac{1}{2},\quad -2q+3=-p^2+\frac{1}{2}q$$

これを解いて　$p=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$q=\dfrac{3}{2}$ …③

また，点 $(p,\ q)$ は放物線 $y=x^2+a$ 上の点であるから　$q=p^2+a$

この式に③の p，q の値を代入して整理すると　$a=\dfrac{3}{4}$

別解　（条件「接線の傾きが一致する」から求める）

円と放物線の接点の座標を $(p,\ q)$ とする。

この点における円の接線の方程式は　$px+(q-2)(y-2)=1$

すなわち　$px+(q-2)y-2q+3=0$

$q=2$ のとき 2 曲線は異なる 2 点で接しないから $q\neq 2$

よって，点 $(p,\ q)$ における円の接線のこの直線の傾きは $-\dfrac{p}{q-2}$ …③

また，放物線について $y'=2x$ だから点 $(p,\ q)$ における接線の傾きは $2p$ …④

円の接線の傾きと放物線の接線の傾きが一致するときを考えると，③，④より，

$$-\frac{p}{q-2}=2p$$

$p=0$ のとき 2 曲線は異なる 2 点で接しないから $p\neq 0$

$$-\frac{1}{q-2}=2 \text{ より } q=\frac{3}{2}$$

また，点 $(p,\ q)$ は円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上の点であるから，$p^2+(q-2)^2=1$ より，　$p=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

点 $(p,\ q)$ は放物線 $y=x^2+a$ 上の点であるから，　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}+a$ より，　$a=\dfrac{3}{4}$

問２　$a=\dfrac{3}{4}$ のとき，連立方程式 $\begin{cases} y=x^2+\dfrac{3}{4} \\ x^2+(y-2)^2=1 \end{cases}$ を解いて　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$y=\dfrac{3}{2}$

よって，接点 A，B の座標は $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，　$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

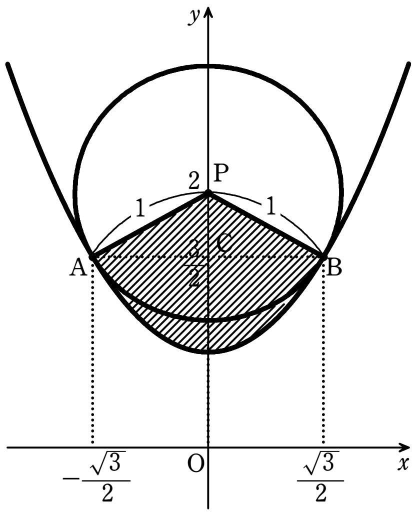
求める面積を S とする。

$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を S_1，直線 $y=\dfrac{3}{2}$ と放物線 $y=x^2+\dfrac{3}{4}$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると　$S=S_1+S_2$

ここで，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ とすると $\mathrm{CP}:\mathrm{AP}:\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}:1:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1:2:\sqrt{3}$　より，$\angle\mathrm{APC}=60^\circ$

同様に $\angle\mathrm{BPC}=60^\circ$ だから，$\angle\mathrm{APB}=120^\circ$

よって　$S_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$



また　$S_2=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{3}{2}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right\}dx$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-x^2+\frac{3}{2}\right)dx$$

$$=-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

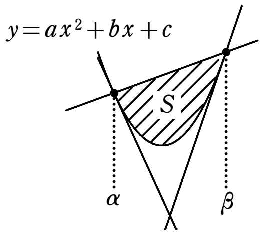
以上により，求める面積 S は　$S=S_1+S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

参考　右図において，放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求める公式

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を S_2 で利用すると，

$$S_2=\frac{|1|}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



1 $0<a<1$ とし， $f(x)=x^a\log x$ $(x>0)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

問2　曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求めよ。

問3　曲線 $y=f(x)$ の変曲点における接線の y 切片を $g(a)$ とする。 $g(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

解答

問1　$f'(x)=ax^{a-1}\log x+x^a\cdot\dfrac{1}{x}=x^{a-1}(a\log x+1)$

$f'(x)=0$ とすると　$a\log x+1=0$ より　$x=e^{-\frac{1}{a}}$

また，$f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^a\log e^{-\frac{1}{a}}=e^{-1}\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{ea}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{1}{ea}$	$\nearrow$

増減表により， $f(x)$ は $x=e^{-\frac{1}{a}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{ea}$ をとり，極大値はない。

問2　$f''(x)=(a-1)x^{a-2}(a\log x+1)+x^{a-1}\cdot\dfrac{a}{x}=x^{a-2}\{(a-1)(a\log x+1)+a\}=x^{a-2}\{a(a-1)\log x+2a-1\}$

$f''(x)=0$ とすると　$a(a-1)\log x+2a-1=0$　より　$x=e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}$

また，$f\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right)=\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right)^a\log e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}=\dfrac{1-2a}{a(a-1)}e^{\frac{1-2a}{a-1}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}$	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$			$\dfrac{1-2a}{a(a-1)}e^{\frac{1-2a}{a-1}}$	

よって，変曲点は$\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}},\ \dfrac{1-2a}{a(a-1)}e^{\frac{1-2a}{a-1}}\right)$ である。

問3　$e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}=c$ とする。変曲点における接線の方程式は $y=f'(c)(x-c)+f(c)$ だから，

その y 切片 $g(a)$ は　$g(a)=-cf'(c)+f(c)$

$$
\begin{aligned}
&=-c\cdot c^{a-1}(a\log c+1)+c^a\log c\\
&=c^a\{-(a\log c+1)+\log c\}\\
&=c^a\{(1-a)\log c-1\}\\
&=\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right)^a\left\{(1-a)\cdot\frac{1-2a}{a(a-1)}-1\right\}\\
&=\left(\frac{2a-1}{a}-1\right)e^{\frac{1-2a}{a-1}}\\
&=\frac{a-1}{a}e^{\frac{1-2a}{a-1}}=\left(1-\frac{1}{a}\right)e^{-2-\frac{1}{a-1}}
\end{aligned}
$$

$$g'(a)=\left\{\frac{1}{a^2}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(a-1)^2}\right\}e^{-2-\frac{1}{a-1}}=\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{a-1}{a}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}\right\}e^{-2-\frac{1}{a-1}}=\frac{2a-1}{a^2(a-1)}e^{-2-\frac{1}{a-1}}$$

$g'(a)=0$ とすると， $a=\dfrac{1}{2}$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=(1-2)e^0=-1$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗	-1	↘	

右の増減表により， $g(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最大値 -1 をとる。

参考

検討会において， $g'(a)$ の求め方について以下のような意見があった。

$g(a)=-cf'(c)+f(c)$

合成関数の微分を用いて　$\dfrac{d}{da}g(a)=\dfrac{d}{dc}\{-cf'(c)+f(c)\}\cdot\dfrac{dc}{da}$

$$=\{-f'(c)-cf''(c)+f'(c)\}\cdot\frac{dc}{da}$$

$$=-cf''(c)\cdot\frac{dc}{da}$$

c は曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標だから $f''(c)=0$

よって常に $\dfrac{d}{da}g(a)=0$ となるが，これは明らかにおかしい。誤った点はどこか？

これに対し，以下のように考察した。

以下，偏微分記号に倣い $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を $f_x(x)$ などのようにかく。

$f(x)=x^a\log x$

↓ x で微分　a は定数扱い

$f_x(x)=x^{a-1}(a\log x+1)$

↓ $x=c$ を代入

$f_x(c)=\underline{c^{a-1}(a\log c+1)}$

$f(x)=x^a\log x$

↓ $x=c$ を代入

$f(c)=c^a\log c$

↓ c で微分。c は a の関数なので a を定数扱いできない。対数微分法を用いる。

$\log|f(c)|=a\log c+\log|\log c|$

$$\frac{f_c(c)}{f(c)}=\frac{da}{dc}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c\log c}$$

$$f_c(c)=\left(\frac{da}{dc}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c\log c}\right)c^a\log c$$

$$=\underline{c^{a-1}\left(\frac{da}{dc}\cdot\log c+1\right)}$$

$\dfrac{da}{dc}=\dfrac{1}{\frac{dc}{da}}=\dfrac{1}{\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right)'}$　なので明らかに $a\fallingdotseq\dfrac{da}{dc}$　よって $\underline{f_x(c)\fallingdotseq f_c(c)}$

$g(a)=-cf'(c)+f(c)=-cf_x(c)+f(c)$ について，

$\dfrac{d}{da}g(a)=\dfrac{d}{dc}\{-cf_x(c)+f(c)\}\cdot\dfrac{dc}{da}$　← $\boxed{\text{ここまでは正しい}}$

$$=\{\underline{-f_x(c)}-c\underline{f_{xc}(c)}\underline{+f_c(c)}\}\cdot\frac{dc}{da}$$

$f_x(c)\fallingdotseq f_c(c)$ だから
ここはキャンセルされない

同様に $f_{xx}(c)\fallingdotseq f_{xc}(c)$ だから，
$f_{xx}(c)=0$ であるが $f_{xc}(c)=0$ とは限らない

$\boxed{2}$ $a>0$とする。曲線 $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を D とする。次の問いに答えよ。

（50点）

問１　D の面積を求めよ。

問２　曲線 $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点の x 座標を t とする。$\cos t$ および $\sin t$ を a を用いて表せ。

問３　D は曲線 $y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって図形 D_1，D_2 に分割されるとする。D_1 と D_2 の面積が等しいとき，a の値を求めよ。

解答

問１　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)=1$

問２　$\sin t=a\cos t$ より　$\dfrac{\sin t}{\cos t}=a$　すなわち　$\tan t=a$

$1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ より　$\cos^2 t=\dfrac{1}{1+\tan^2 t}=\dfrac{1}{1+a^2}$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t\geqq 0$ だから　$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

また，$\sin t=\tan t\cos t=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

問３　D_1 と D_2 の面積が等しいとき，D_2 の面積は D の面積 1 の半分 $\dfrac{1}{2}$ である。

D_2 の面積は　$\displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\left(-\cos\frac{\pi}{2}-a\sin\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos t-a\sin t)$$

$$=-a+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+a\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

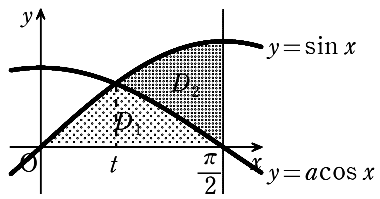
$$=-a+\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$=-a+\sqrt{1+a^2}$$

よって，$-a+\sqrt{1+a^2}=\dfrac{1}{2}$　より　$\sqrt{1+a^2}=\dfrac{1}{2}+a$

$$1+a^2=\left(\frac{1}{2}+a\right)^2$$

$$a=\frac{3}{4}$$



3 数列 $\{a_n\}$ を数直線上の点列とし，$a_1=1$，$a_2=2$，a_n と a_{n+1} を $1:2$ に内分する点を a_{n+2} $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。次の問いに答えよ。（50点）

問１　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくことにより数列 $\{b_n\}$ を定める。b_{n+1} を b_n の式で表せ。

問２　一般項 b_n を n の式で表せ。

問３　一般項 a_n を n の式で表せ。

解答

問１　$a_{n+2}=\dfrac{2a_n+1\cdot a_{n+1}}{1+2}$ より，$a_{n+2}=\dfrac{1}{3}a_{n+1}+\dfrac{2}{3}a_n$

これを変形して　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

よって　$b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n$

問２　$b_1=a_2-a_1=2-1=1$

よって，$\{b_n\}$ は初項１，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから　$b_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

問３　$n\geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\
&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}\\
&=1+\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\\
&=1+\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ のときも成り立つから，$a_n=\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\boxed{4}$ 当たり 3 本を含む 9 本のくじがある。9 人が順にこのくじを 1 本ずつ引く。引いたくじは，もとに戻さないものとする。次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　2 番目の人が当たりを引く確率を求めよ。

問 2　3 番目の人が，2 本目の当たりを引く確率を求めよ。

問 3　2 本目の当たりを引く確率が最も大きいのは何番目にくじを引く人か答え，そのときの確率を求めよ。

解答

問 1　1 番目の人が当たりを引いて 2 番目の人が当たりを引くか，

または 1 番目の人がはずれを引いて 2 番目の人が当たりを引く確率だから

$$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$$

問 2　1 番目が当たり，2 番目がはずれ，3 番目が当たりを引くか，

または 1 番目がはずれ，2 番目が当たり，3 番目が当たりを引く確率だから

$$\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{7}$$

問 3　k 番目の人が 2 本目の当たりを引く確率を P_k とする。

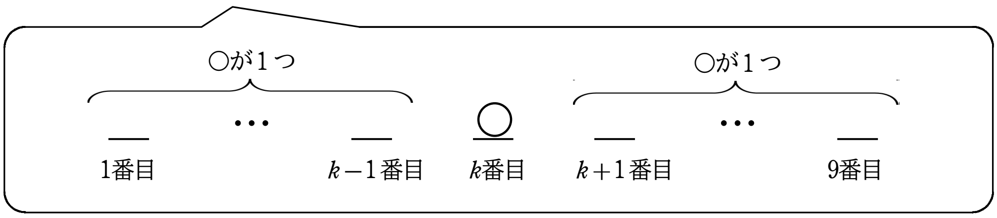
1 番目と 9 番目は 2 本目の当たりを引くことはできないので，$2\leqq k\leqq 8$ とする。

当たりを○，はずれを × を書くと，9 人のくじの引き方は 3 個の ○ と 6 個の × を 1 列に並べる順列に対応する。その総数は　${}_9C_3$

このうち，「k 番目の人が 2 本目の当たりを引く」くじの引き方に対応するのは

　　$1\sim(k-1)$ 番目までに○が 1 つ並び，k 番目に○が並び，$(k+1)\sim 9$ 番目に○が 1 つ並ぶ

順列で，その総数は　$(k-1)(9-k)$



よって，$P_k=\dfrac{(k-1)(9-k)}{{}_9C_3}=\dfrac{1}{84}(-k^2+10k-9)=\dfrac{1}{84}\{-(k-5)^2+16\}=-\dfrac{1}{84}(k-5)^2+\dfrac{4}{21}$

P_k は $k=5$ で最大値 $\dfrac{4}{21}$ をとる。

よって，2 本目のあたりを引く確率が最も大きいのは 5 番目にくじを引く人で，その確率は $\dfrac{4}{21}$