令和７年度

第４９回高校数学教育を考える会
（沖縄県高等学校数学教育会・琉球大学）

目次

令和７年度（2025）琉球大学入試問題（前期・甲）に関する質問事項

<table>
<tr><th>問題</th><th>範囲</th><th>分野</th><th>難易度</th><th>質問事項</th></tr>
<tr><td>$\boxed{1}$</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5">・数学的帰納法の方針を立てられていたか。また、論述はできていたか。</td></tr>
<tr><td>問１</td><td>数Ⅲ</td><td>微分法</td><td>易</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>数Ⅲ</td><td>微分法</td><td>標準</td></tr>
<tr><td>問３</td><td>数Ⅲ</td><td>微分法</td><td>難</td></tr>
<tr><td>問４</td><td>数Ⅲ</td><td>微分法</td><td>難</td></tr>
<tr><td>$\boxed{2}$</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">・問３の最後、最小値の項をまとめる計算ができていたか。</td></tr>
<tr><td>問１</td><td>数Ⅲ</td><td>積分法</td><td>標準</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>数Ⅲ</td><td>積分法</td><td>標準</td></tr>
<tr><td>問３</td><td>数Ⅲ</td><td>微分法</td><td>難</td></tr>
<tr><td>$\boxed{3}$</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">・計算量が多い印象だが、最後まで解き切れていたか。
・問３「空間における２直線が交わる条件」を理解できていたか。</td></tr>
<tr><td>問１</td><td>数 C</td><td>空間ﾍﾞｸﾄﾙ</td><td>標準</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>数 C</td><td>空間ﾍﾞｸﾄﾙ</td><td>やや難</td></tr>
<tr><td>問３</td><td>数 C</td><td>空間ﾍﾞｸﾄﾙ</td><td>難</td></tr>
<tr><td>$\boxed{4}$</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">・$\boxed{1}$～$\boxed{3}$と比較して易しい印象だが、正答率は高かったか。</td></tr>
<tr><td>問１</td><td>数 A</td><td>確率</td><td>易</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>数 A</td><td>確率</td><td>標準</td></tr>
<tr><td>問３</td><td>数 A</td><td>確率</td><td>標準</td></tr>
<tr><td colspan="5">全体
証明を論述する力や、複雑な計算をやり切る計算力が必要な内容だった。
特に正答率の高い問題や低い問題はあったか。</td></tr>
</table>

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和７年度（2025）琉球大学入試問題（前期・乙）に関する質問事項

問題	範囲	分野	難易度	質　問　事　項
$\boxed{1}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅰ 数Ⅰ 数Ⅱ	 数と式 数と式 複素数と方程式	 標準 易 標準	・問１　1/37＋32/22 を表す循環小数をどのように求めていたか。 ・問２　21!の素因数分解をどのように求めていたか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２	 数Ⅱ 数Ⅱ	 微分法 微分法	 標準 標準	・問１「3 次関数の導関数は 2 次関数なので，異なる a，b で f’(a)=f’(b)=0 であればその前後で f’(x)の符号が変わるのは自明であり，増減表による十分性の確認は不要」という意見があるが、どのような基準で採点したか。
全体 ・例年に比べ易しい印象があるが、正答率は高かったか。				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

令和７年度（2025）琉球大学入試問題（後期）に関する質問事項

問題	範囲	分野	難易度	質問事項
$\boxed{1}$ 問１ 問２	 数Ⅲ 数Ⅲ	 微分法 微分法	 標準 標準	・標準的な微分法の問題であったが、正答率は高かったか。
$\boxed{2}$ 問１ 問２ 問３	 数Ⅱ 数Ⅱ 数Ⅲ	 三角関数 三角関数 積分法	 標準 やや難 難	・三角関数の対称性 sin(3π/5)=sin(2π/5)は理解できていたか。
$\boxed{3}$ 問１ 問２ 問３	 数 B 数 B 数 B	 数列 数列 数列	 易 難 標準	・余りの性質は新課程で取り扱われる機会が少なくなっているが、生徒はどれくらいできていたか。 ・問２の証明の論述はできていたか。
$\boxed{4}$ 問１ 問２ 問３	 数 A 数 A 数 B	 確率 確率 数列	 易 標準 標準	・標準的な確率漸化式の問題で比較的易しいと感じたが、正答率は高かったか。
全体 今後も整数分野（余りの性質や不定方程式など）の出題はあるか。				

（注：易・標準・難は教科書レベルにおいて）

$\boxed{1}$　n を自然数，$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$f_2(x)$ の導関数を求めよ。

問２　$x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq f_1(x)$ を示せ。

問３　$x \geqq 0$ のとき，すべての自然数 $n \geqq 1$ に対して不等式 $e^x \geqq f_n(x)$ を示せ。

問４　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，すべての自然数 $n \geqq 1$ に対して不等式 $e^x \leqq f_n(x)+\frac{x^n}{n!}$ を示せ。

解説

問１　$f_2(x)=1+\sum_{k=1}^{2}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}=1+x+\frac{x^2}{2}$ より，$f_2{}'(x)=1+x$

問２　$g_1(x)=e^x-f_1(x)$ とおく。

$g_1(x)=e^x-(1+x)$ より，$g_1{}'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき $e^x>1$ だから，$g_1{}'(x)>0$

よって，$x \geqq 0$ において $g_1(x)$ は単調に増加する。

また $g_1(0)=e^0-1=0$ より，$x \geqq 0$ のとき $g_1(x) \geqq 0$　すなわち $e^x \geqq f_1(x)$ となる。

問３　$g_n(x)=e^x-f_n(x)$ $(x \geqq 0)$ とおいて，すべての自然数 n に対して$g_n(x) \geqq 0$ となることを数学的帰納法により示す。

[1]　$n=1$ のときは，問２により示されている。

[2]　ある自然数 l に対して，$g_l(x) \geqq 0$ であると仮定する。

ここで，$f'_{l+1}(x)=\left\{1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{l+1}}{(l+1)!}\right\}'=1+x+\cdots+\frac{x^l}{l!}=f_l(x)$

であることに注意すると，

$$g_{l+1}{}'(x)=\{e^x-f_{l+1}(x)\}'=e^x-f_l(x)=g_l(x)$$

仮定により $g_l(x) \geqq 0$ だから，$g_{l+1}{}'(x) \geqq 0$

よって $x \geqq 0$ において $g_{l+1}(x)$ は単調に増加する。

また $g_{l+1}(0)=e^0-f_{l+1}(0)=1-1=0$ より，$x \geqq 0$ のとき $g_{l+1}(x) \geqq 0$

[1], [2] により，すべての自然数 n に対して $g_n(x) \geqq 0$　すなわち $e^x \geqq f_n(x)$ となる。

問４　$h_n(x)=\left\{f_n(x)+\frac{x^n}{n!}\right\}-e^x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおいて，すべての自然数 n に対して$h_n(x) \geqq 0$ となることを数学的帰納法により示す。

[1]　$n=1$ のとき

$h_1(x)=\left\{f_1(x)+\frac{x^1}{1!}\right\}-e^x=1+2x-e^x$

$h_1{}'(x)=2-e^x$

$0<x<1$ で $h_1{}'(x)=0$ とすると，$e^x=2$ より $x=\log 2$

よって $h_1(x)$ の増減表は右のようになり，
$h_1(1)=3-e>0$ から，$h_1(x)$ は $x=0$ で
最小値 0 をとる。
よって $h_1(x)\geqq 0$

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	1
$h_1{}'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_1(x)$	0	↗	極大	↘	$3-e$

[2]　ある自然数 l に対して，$h_l(x)\geqq 0$ であると仮定する。

$$h_{l+1}{}'(x)=\left[\left\{f_{n+1}(x)+\frac{x^{l+1}}{(l+1)}\right\}-e^x\right]'=f_l(x)+\frac{x^l}{l\,!}-e^x=h_l(x)$$

仮定により $h_l(x)\geqq 0$ だから，$h_{l+1}{}'(x)\geqq 0$

よって $x\geqq 0$ において $h_{l+1}(x)$ は単調に増加する。

また $h_{l+1}(0)=f_{l+1}(0)+0-e^0=1-1=0$ より，$x\geqq 0$ において $h_{l+1}(x)\geqq 0$

[1]，[2] により，すべての自然数 n に対して $h_n(x)\geqq 0$　すなわち $e^x\leqq f_n(x)+\dfrac{x^n}{n\,!}$ となる。

参考

問４の不等式は $e^x-\dfrac{x^n}{n\,!}\leqq f_n(x)$ と変形できるから，問３の不等式と合わせて

$$0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}\quad e^x-\frac{x^n}{n\,!}\leqq f_n(x)\leqq e^x$$

が成り立つ。ここで，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq\dfrac{x^n}{n\,!}\leqq\dfrac{1}{n\,!}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,!}=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n\,!}=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(e^x-\frac{x^n}{n\,!}\right)=e^x$ だから，はさみうちの原理により

$$0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^x$$

すなわち　$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\,!}+\cdots$　$\cdots(\ast)$

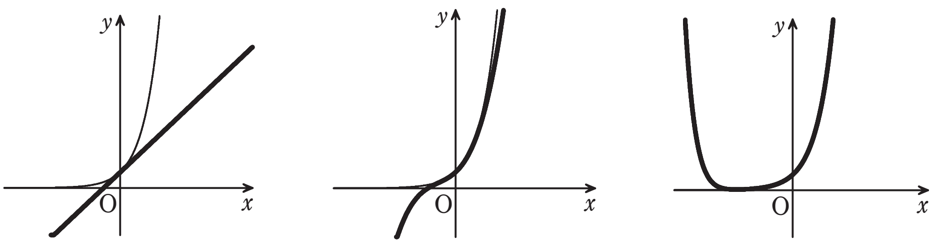
が成り立つ。

発展

マクローリン展開により，任意の実数 x に対し，e^x は次のように表せる。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)}+R_n,\quad R_n=\frac{x^n}{n\,!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1)$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$ (※ 証明は下記) だから，等式 $(\ast)$ は $0\leqq x\leqq 1$ だけでなく，すべての実数 x に対して成り立つ。



$n=1$　　$n=3$　　$n=10$

※ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ の証明

$x=0$ のときは明らかなので，$x \fallingdotseq 0$ の場合を考える。

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ が言えればよい。$m = [2|x|] + 1$ ([ ] はガウス記号) とおくと

$n > m$ のとき

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^n}{n!}\right| &= \left|\frac{x^{n-m}}{n(n-1)(n-2)\cdots(m+1)} \cdot \frac{x^m}{m!}\right| \\
&= \frac{|x|^{n-m}}{n(n-1)(n-2)\cdots(m+1)} \cdot \left|\frac{x^m}{m!}\right| \\
&\leqq \frac{|x|^{n-m}}{\underbrace{m \cdot m \cdot \cdots \cdot m}_{(n-m)個}} \cdot \left|\frac{x^m}{m!}\right| \\
&= \left(\frac{|x|}{m}\right)^{n-m} \cdot \left|\frac{x^m}{m!}\right| \\
&\leqq \left(\frac{|x|}{2|x|}\right)^{n-m} \left|\frac{x^m}{m!}\right| \quad (\because\ m = [2|x|] + 1 \geqq 2|x| > 0) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \left|\frac{x^m}{m!}\right|
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m} \left|\dfrac{x^m}{m!}\right| = 0$ だから　$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^n}{n!}\right| = 0$　よって $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$

$\boxed{2}$　$a>0$ として，$g(a)=\int_a^{a+1}(x-\log x)dx$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　不定積分 $\int \log x\,dx$ を求めよ。

問２　$g(a)$ を求めよ。

問３　$g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(解説)

問１　$\int \log x\,dx=\int (x)'\log x\,dx$

$$=x\log x-\int x(\log x)'dx$$

$$=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\log x-x+C$$　ただし，C は積分定数

問２　$g(a)=\left[\frac{x^2}{2}-(x\log x-x)\right]_a^{a+1}$

$$=\left\{\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right\}-\{(a+1)\log(a+1)-a\log a\}+\{(a+1)-a\}$$

$$=a+\frac{3}{2}-(a+1)\log(a+1)+a\log a$$

問３　$g'(a)=1-\left\{1\cdot\log(a+1)+(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}\right\}+\left(1\cdot\log a+a\cdot\frac{1}{a}\right)$

$$=1-\log(a+1)-1+\log a+1$$

$$=1-\log\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$a>0$ で $g'(a)=0$とおくと，$\log\left(1+\frac{1}{a}\right)=1$ より　$1+\frac{1}{a}=e$

すなわち　$a=\frac{1}{e-1}$

よって，$a>0$ における $g(a)$ の増減表は右のようになるから，$g(a)$ は $a=\frac{1}{e-1}$ で最小となる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

また，　$g(a)=a+\frac{3}{2}-a\log(a+1)-\log(a+1)+a\log a$

$$=\frac{3}{2}-\log(a+1)-a\left\{1-\log\left(1+\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\log(a+1)-ag'(a)$$

であり，$g'\left(\frac{1}{e-1}\right)=0$ だから

$$g\left(\frac{1}{e-1}\right)=\frac{3}{2}-\log\left(\frac{1}{e-1}+1\right)=\frac{3}{2}-\log\frac{e}{e-1}=\frac{3}{2}-\{1-\log(e-1)\}=\frac{1}{2}+\log(e-1)$$

以上により，$g(a)$ は $a=\frac{1}{e-1}$ で最小値 $\frac{1}{2}+\log(e-1)$ をとる。

3　四面体 OABC の辺の長さを $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OC}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，$\vec{a}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

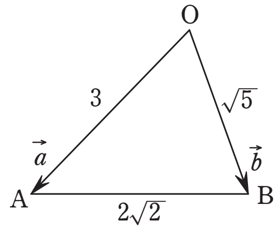
問２　点 O から平面 ABC に垂線を下ろしその交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

問３　点 A から平面 OBC に垂線を下ろしその交点を K とする。このとき，直線 OH と直線 AK は交わることを示せ。また，その交点を M とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解説

問１　$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2)$$
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{OB}^2+\mathrm{OA}^2-\mathrm{AB}^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{5})^2+3^2-(2\sqrt{2})^2\}=\frac{6}{2}=3$$

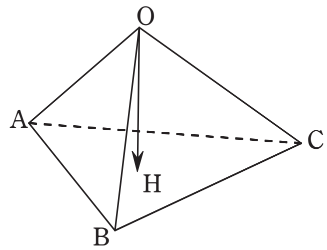


別解　△OAB で余弦定理により　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3^2+(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{6}{6\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=3$

問２　H は平面ABC 上にあるから，実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表せる。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ だから　$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$(1-s-t)\cdot3-(1-s-t)\cdot3^2+s(\sqrt{5})^2-s\cdot3+t\cdot3-t\cdot3=0$$

整理すると　$4s+3t=3$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ だから　$\{(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$$(1-s-t)\vec{a}\cdot\vec{c}-(1-s-t)|\vec{a}|^2+s\vec{b}\cdot\vec{c}-s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{c}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$(1-s-t)\cdot3-(1-s-t)\cdot3^2+s\cdot3-s\cdot3+t(\sqrt{6})^2-t\cdot3=0$$

整理すると　$2s+3t=2$ …②

①，②を解くと　$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

問３　点 K は平面 OBC 上にあるから，実数 u， v を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=u\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ だから，$(-\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$$-\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{b}|^2+v\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$-3+u(\sqrt{5})^2+v\cdot 3=0$$

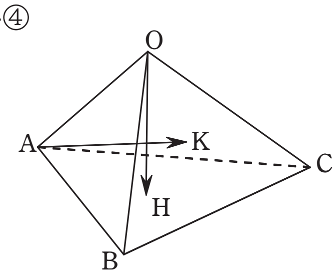
$$5u+3v=3 \ \cdots③$$

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$　だから，$(-\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

$$-\vec{a}\cdot\vec{c}+u\vec{b}\cdot\vec{c}+v|\vec{c}|^2=0$$

$$-3+u\cdot 3+v(\sqrt{6})^2=0$$

$$3u+6v=3 \ \cdots④$$



③，④を解いて　$u=\dfrac{3}{7}$，$v=\dfrac{2}{7}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=-\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}$

直線 OH 上の点を P，直線 AK 上の点を Q とすると，実数 k， l を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{AK}}$$

と表せる。すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{a}+l\left(-\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}\right)=(1-l)\vec{a}+\frac{3}{7}l\vec{b}+\frac{2}{7}l\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が成り立つような実数 k， l が存在すれば，2直線 OH，AK は交わるといえる。

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから， $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるのは

$$\begin{cases} \dfrac{k}{6}=1-l \\ \dfrac{k}{2}=\dfrac{3}{7}l \\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{2}{7}l \end{cases}$$

が成り立つことと同値である。

この連立方程式はただ１組の解 $k=\dfrac{3}{4}$， $l=\dfrac{7}{8}$ をもつ。

よって２直線 OH，AK はただ１点で交わる。その交点 M については

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

$\boxed{4}$　赤玉３個と白玉３個が入っている袋がある。まず３枚のコインを投げ，表が k 枚出たとき，この袋に赤玉を k^2 個追加し，次のその袋から玉を２個同時に取り出すという試行を行う。例えば，コイン投げで表が２枚，裏が１枚出たときは，赤玉４個を追加して，赤玉７個と白玉３個が入っている袋から玉を２個同時に取り出す。コイン投げで３枚とも裏が出たときは，赤玉の追加はなく，赤玉３個と白玉３個が入っている袋から玉を２個同時に取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

問１　コイン投げで３枚とも表でありかつ袋から取り出した玉が２個とも赤玉である確率を求めよ。

問２　袋から取り出した玉が２個とも赤玉である確率を求めよ。

問３　袋から取り出した玉が２個とも赤玉であったとき，コイン投げで３枚とも表であったという条件付き確率を求めよ。

解説

問１　コイン投げで３枚とも表である確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

このとき袋には $3^2=9$ 個の赤玉は追加され，赤玉 12 個，白玉３個となる。

ここから赤玉２個を取り出す確率は　$\dfrac{{}_{12}C_2}{{}_{15}C_2}$

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{{}_{12}C_2}{{}_{15}C_2}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}\times\dfrac{2\cdot 1}{15\cdot 14}=\dfrac{11}{140}$

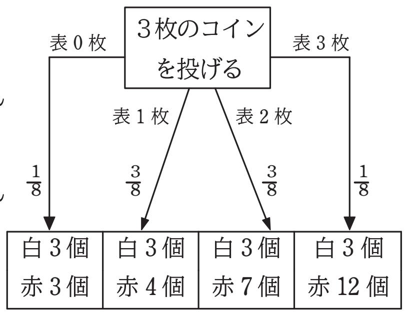
問２　コイン投げで出る表の枚数は０枚，１枚，２枚，３枚のいずれかである。それぞれの事象を順に X_0，X_1，X_2，X_3 とする。このとき，袋の中の様子は

X_0 が起こった場合　赤玉３個，白玉３個のまま

X_1 が起こった場合　袋には $1^2=1$ 個の赤玉が追加され
赤玉４個，白玉３個

X_2 が起こった場合　袋には $2^2=4$ 個の赤玉が追加され
赤玉７個，白玉３個

X_3 については問１で既に求めている。



また，袋から取り出した玉が２個とも赤玉である事象を Y とすると

$$P(X_0\cap Y)=P(X_0)\times P_{X_0}(Y)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{40}$$

$$P(X_1\cap Y)=P(X_1)\times P_{X_1}(Y)={}_3C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{28}$$

$$P(X_2\cap Y)=P(X_2)\times P_{X_2}(Y)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}\times\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{40}$$

問１より　$P(X_3\cap Y)=\dfrac{11}{140}$

よって，求める確率は

$$P(Y)=P(X_0\cap Y)+P(X_1\cap Y)+P(X_2\cap Y)+P(X_3\cap Y)$$

$$=\frac{1}{40}+\frac{3}{28}+\frac{7}{40}+\frac{11}{140}=\frac{7+30+49+22}{280}=\frac{108}{280}=\frac{27}{70}$$

問３　求める条件付き確率は　$P_Y(X_3)=\dfrac{P(X_3\cap Y)}{P(Y)}=\dfrac{11}{140}\times\dfrac{70}{27}=\dfrac{11}{54}$

1　次の問いに答えよ。(50点)

問１　$\dfrac{1}{37}$ を小数で表したとき，小数第100位の数字を求めよ。また $\dfrac{1}{37}+\dfrac{32}{33}$ を小数で表したとき，小数第100位の数字を求めよ。

問２　21 の階乗 21! を素因数分解せよ。

問３　多項式 $P(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りが $2x$，x^2-x-6 で割ったときの余りが $3x+2$ である。このとき，$P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの余りを求めよ。

（解説）

問１　$\dfrac{1}{37}=0.\dot{0}2\dot{7}$ より，$\dfrac{1}{37}$ は０，２，７の３個の数が循環する循環小数で表される。

100 を３で割った余りは１だから，小数第100位の数は循環節の１番目である０

また，$\dfrac{32}{33}=0.\dot{9}\dot{6}$ だから，右のように計算して

$$\frac{1}{37}+\frac{32}{33}=0.\dot{9}9672\dot{3}$$

$$\begin{array}{rr} & \dfrac{1}{37}=0.027027027027\cdots \\ +) & \dfrac{32}{33}=0.969696969696\cdots \\ \hline & 0.996723996723\cdots \end{array}$$

よって $\dfrac{1}{37}+\dfrac{32}{33}$ は９，９，６，７，２，３の６個の数が循環する循環小数で表される。

100 を６で割った余りは４だから，小数第100位の数は循環節の４番目である７

別解　$\dfrac{1}{37}+\dfrac{32}{33}=\dfrac{27027}{999999}+\dfrac{969696}{999999}=\dfrac{996723}{999999}=0.\dot{9}9672\dot{3}$　としても求められる。

問２　$21!=21\times20\times19\times18\times17\times16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$=3\cdot7\times2^2\cdot5\times19\times2\cdot3^2\times17\times2^4\times3\cdot5\times2\cdot7\times13\times2^2\cdot3\times11\times3^2\times2^3\times7\times2\cdot3\times5\times2^2\times3\times2$

$=2^{18}\cdot3^9\cdot5^4\cdot7^3\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$

別解　$21\div2=10\cdots1$，$21\div4=5\cdots1$，$21\div8=2\cdots5$，$21\div16=1\cdots5$

となるから、21! は２で最大 $10+5+2+1=18$ 回割れる。

$21\div3=7$，$21\div9=2\cdots3$

となるから、21! は３で最大 $7+2=9$ 回割れる。

$21\div5=4\cdots1$　となるから、21! は５で最大４回割れる。

$21\div7=3$　となるから、21! は７で最大３回割れる。

11, 13, 17, 19 はそれぞれ最大で１回しか割れないため、$21!=2^{18}\cdot3^9\cdot5^4\cdot7^3\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19$

問３　$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q_1(x)$，x^2-x-6 で割ったときの商を $Q_2(x)$ とおくと

$$P(x)=(x^2-1)Q_1(x)+2x=(x+1)(x-1)Q_1(x)+2x\ \cdots①$$

$$P(x)=(x^2-x-6)Q_2(x)+3x+2=(x+2)(x-3)Q_2(x)+3x+2\ \cdots②$$

また，$P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b\ \cdots③$$

③で $x=1$ として　$P(1)=a+b$，$x=3$ として　$P(3)=3a+b$

また，①で $x=1$ として　$P(1)=2\cdot1=2$

②で $x=3$ として　$P(3)=3\cdot3+2=11$

よって　$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=11 \end{cases}$　これを解くと　$a=\dfrac{9}{2}$，$b=-\dfrac{5}{2}$

よって，求める余りは　$\dfrac{9}{2}x-\dfrac{5}{2}$

2 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$f(x)$ が $x=1$ と $x=2$ で極値をとるとき，a と b の値を求めよ。

問２　a と b を問１で求めた値とする。さらに曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=6x-2$ に接するとき，c の値を求めよ。

解説

問１　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=1$ と $x=2$ で極値を取るとき，$f'(1)=f'(2)=0$ が成り立つから

$$\begin{cases}3+2a+b=0\\12+4a+b=0\end{cases}$$

これを解くと　$a=-\dfrac{9}{2}$，$b=6$

このとき，$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x^2-3x+2)=3(x-1)(x-2)$

となり，右の増減表から $f(x)$ は $x=1$ と $x=2$ で極値をとる。

以上により，$a=-\dfrac{9}{2}$，$b=6$

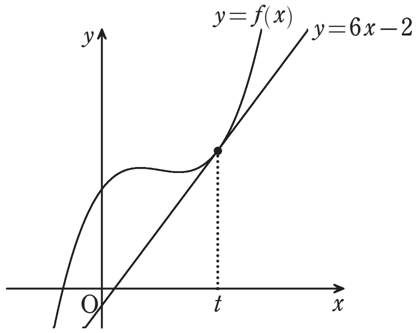
	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

問２　問１の結果により　$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+c$

$g(x)=6x-2$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が接するとき，接点の x 座標を t とすると

$f(t)=g(t)\ \cdots$①　，　$f'(t)=g'(t)\ \cdots$②

が成り立つ。



①より　$t^3-\dfrac{9}{2}t^2+6t+c=6t-2\ \cdots$③

②より　$3t^2-9t+6=6$

$3t^2-9t=0$

$3t(t-3)=0$

$t=0,\ 3$

$t=0$ のとき　③より　$c=-2$

$t=3$ のとき　③より　$27-\dfrac{81}{2}+18+c=18-2$

$$c=\frac{23}{2}$$

以上により，求める c の値は $c=-2,\ \dfrac{23}{2}$

$\boxed{1}$　関数 $f(x)$ は，$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{2}-\cos x+\sin x+1$ を満たすとする。ただし $0<x<2\pi$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　$f(x)$ の極値を求めよ。

問２　曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求めよ。

(解説)

問１　与えられた等式の両辺を微分して　$f(x)=x+\sin x+\cos x$

よって　$f'(x)=1+\cos x-\sin x=1-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<x<2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}<x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7}{4}\pi$ だから　$x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

すなわち　$x=\dfrac{\pi}{2}$，π

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになるから，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{2}$ で極大値 $\dfrac{\pi}{2}+1$

$x=\pi$　で極小値 $\pi-1$

をとる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}+1$	$\searrow$	$\pi-1$	$\nearrow$	

問２　$f''(x)=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=0$ とすると　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ より　$x+\dfrac{\pi}{4}=\pi$，2π

すなわち　$x=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって，$f''(x)$ の符号と $f(x)$ の凹凸は右の表のようになるから，曲線 $y=f(x)$ の変曲点は

$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$，$\left(\dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi\right)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		上に凸	$\dfrac{3}{4}\pi$	下に凸	$\dfrac{7}{4}\pi$	上に凸	

2　次の問いに答えよ。(50点)

問１　$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ。

問２　等式 $\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$ を利用して，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

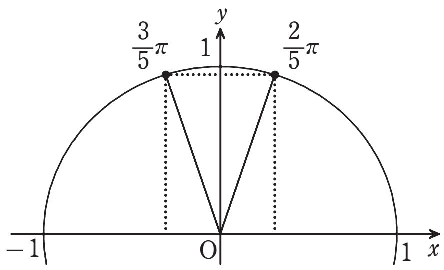
問３　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\sin 2x$ ， $y=\sin 3x$ ， 直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

解説

問１

$$
\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(\theta+2\theta)\\
&= \sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta\\
&= \sin\theta(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\
&= \sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos^2\theta\\
&= \sin\theta(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\\
&= 3\sin\theta-4\sin^3\theta
\end{aligned}
$$

問２　問１の結果により　$\sin\dfrac{3\pi}{5}=3\sin\dfrac{\pi}{5}-4\sin^3\dfrac{\pi}{5}$



$\sin\dfrac{3}{5}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{2}{5}\pi\right)=\sin\dfrac{2}{5}\pi$

$\cos\dfrac{3}{5}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{2}{5}\pi\right)=-\cos\dfrac{3}{5}\pi$

また，$\sin\dfrac{2\pi}{5}=2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$

よって，$\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より

$$3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

$\sin\dfrac{\pi}{5}>0$ であるから，両辺を $\sin\dfrac{\pi}{5}$ で割って

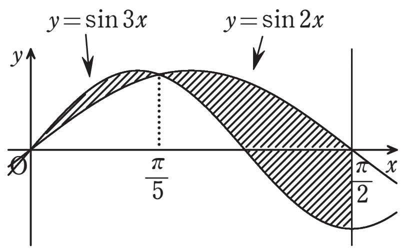
$$3-4\sin^2\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$3-4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$0<\cos\dfrac{\pi}{5}<1$ より，$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

問３　$y=\sin 2x$ ， $y=\sin 3x$ のグラフは右の図のようになり，$\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より，２つのグラフの $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における交点の x 座標は $\dfrac{\pi}{5}$ である。



よって，求める面積を S とおくと

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{5}}(\sin 3x-\sin 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sin 3x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{5}}+\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{5}\pi-1\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{5}\pi-1\right)-\frac{1}{2}\left(-1-\cos\frac{2}{5}\pi\right)+\frac{1}{3}\left(0-\cos\frac{3}{5}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{5}\pi+\cos\frac{2}{5}\pi$$

ここで，$\cos\frac{3}{5}\pi=\cos\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)=-\cos\frac{2}{5}\pi$ であるから

$$S=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(-\cos\frac{2}{5}\pi\right)+\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\cos\frac{2}{5}\pi$$

$\cos\frac{2}{5}\pi=2\cos^2\frac{\pi}{5}-1=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから

$$S=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

3　数列 $\{a_n\}$ を，条件 $a_1=2$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定める。次の問いに答えよ。(50点)

問１　a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8 を５で割った余りを求めよ。

問２　すべての $n \geqq 1$ に対して，a_n を５で割った余りと a_{n+k} を５で割った余りが等しくなるような最小の自然数 k を求めよ。

問３　a_{2025} を５で割った余りを求めよ。

解説

問１　$a_3=a_2+a_1=1+2=3$　　$a_4=a_3+a_2=3+1=4$

$a_5=a_4+a_3=4+3=7$　　$a_6=a_5+a_4=7+4=11$

$a_7=a_6+a_5=11+7=18$　　$a_8=a_7+a_6=18+11=29$

より，これらを５で割った余りは順に３，４，２，１，３，４

問２　問１の結果では，a_n を５で割った余りは２，１，３，４の４個の数が繰り返し現れているので，

$k \geqq 4$

一般に，$a_{n+4}=a_n$ が成り立つことが予想される。これを数学的帰納法により示す。

以下，５を法とする合同式で考える。

[1]　問１より　$a_5 \equiv a_1$，$a_6 \equiv a_2$ だから，$n=1$，２のとき予想は成り立つ。

[2]　ある自然数 l に対して $n=l$，$l+1$ のとき予想が成り立つ，すなわち

$a_{l+4} \equiv a_l$，$a_{(l+1)+4} \equiv a_{l+1}$ が成り立つと仮定する。

このとき，$a_{l+6} \equiv a_{l+5}+a_{l+4}$

$\equiv a_{l+1}+a_l$

$\equiv a_{l+2}$

よって　$a_{(l+2)+4} \equiv a_{l+2}$ だから $n=l+2$ のときも予想は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての n に対して $a_{n+4}=a_n$ が成り立つから，求める k の値は　$k=4$

別解　一般に a_{4n-3}，a_{4n-2}，a_{4n-1}，a_{4n} を５で割った余りが順に２，１，３，４となることを数学的帰納法により示す。

[1]　$n=1$ のとき　問１より成り立つ。

[2]　ある自然数 l に対して $a_{4l-3} \equiv 2$，$a_{4l-2} \equiv 1$，$a_{4l-1} \equiv 3$，$a_{4l} \equiv 4$　と仮定すると

$a_{4(l+1)-3} \equiv a_{4l+1} \equiv a_{4l}+a_{4l-1} \equiv 4+3 \equiv 7 \equiv 2$

$a_{4(l+1)-2} \equiv a_{4l+2} \equiv a_{4l+1}+a_{4l} \equiv 2+4 \equiv 6 \equiv 1$

$a_{4(l+1)-1} \equiv a_{4l+3} \equiv a_{4l+2}+a_{4l+1} \equiv 1+2 \equiv 3$

$a_{4(l+1)} \equiv a_{4l+4} \equiv a_{4l+3}+a_{4l+2} \equiv 3+1 \equiv 4$

よって，$n=l+1$ のときも予想は成り立つ。

[1]，[2] よりすべての n に対して予想が成り立つから，求める k の値は　$k=4$

問３　$2025=4 \cdot 506+1$ より　$a_{2025} \equiv a_1 \equiv 2 \ (mod\ 5)$

よって，求める余りは２

4　数直線上の４点１，２，３，４を動く点Ｐが１の位置にある。サイコロを投げて，１，２，３，４の目が出たらその目が表す数字の位置に移動し，５，６の目が出たら移動はせず，現在の位置にとどまる。例えば，１回目に３の目，２回目に５の目が出たとき，その２回の試行の後，点Ｐは３の位置にある。この試行を繰り返し，n 回目の試行の後に，点Ｐが１の位置にある確率を p_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問１　p_1 および p_2 を求めよ。

問２　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

問３　p_n の一般項を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{n} p_k$ を求めよ。

解説

問１　p_1 はサイコロを１回投げて１，５，６の目が出る確率だから $p_1=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

p_2 は，サイコロを２回投げて

「２回とも１，５，６の目が出る」

または

「１回目は２，３，４の目が出て，２回目は１の目が出る」

確率だから　$p_2=\left(\frac{3}{6}\right)^2+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

問２　p_{n+1} は，サイコロを $(n+1)$ 回投げて

「n 回目の移動後に点Ｐが１の位置にあり，$(n+1)$ 回目で１，５，６の目が出る」

または

「n 回目の移動後に点Ｐが１以外の位置にあり，$(n+1)$ 回目で１の目が出る」

確率だから　$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{3}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}$

すなわち　$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}$

問３　問２の結果の式を変形して　$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$

よって数列 $\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$，初項 $p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ の等比数列だから

$$p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって　$p_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

また　$\sum_{k=1}^{n} p_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$

$$=\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}n+\frac{3}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$