平成７年度　第２回数学診断テスト（１年生）Ｃ問題　解答解説とねらい

＜共通問題＞

① 次の問いに答えなさい。
(1) $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ を展開しなさい。
(2) $(a-b)(a-b-2)-8$ を因数分解しなさい。
(3) $a(x+1)+b(x-3)=3x-5$ がxについて恒等式となるように定数a, bの値を定めなさい。
(4) 次の2つの不等式を同時に満たすxの値の範囲を求めなさい。
$$\begin{cases} x^2-2x\leqq 0 \\ -2x^2-x+1<0 \end{cases}$$
(5) $x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}$ と $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ の値を求めなさい。
(6) 2次方程式 $kx^2-2(2-k)x+k+1=0$ が重解をもつように定数kの値を定めなさい。

【出題のねらい】
・因数分解や式の展開ができるか．
・恒等式の性質を用いて係数を求めることができるか．
・連立２次不等式を解くことができるか．
・効率よく式の値を求めることができるか．
・２次方程式の重解をもつ条件が分かるか．

＜解答＞

(1)与式$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=x^6-y^6$

(2)与式$=(a-b)\{(a-b)-2\}-8$
$=(a-b)^2-2(a-b)-8$
$=\{(a-b)+2\}\{(a-b)-4\}$
$=(a-b+2)(a-b-4)$

(3)左辺$=ax+a+bx-3b$
$=(a+b)x+(a-3b)$
右辺の係数と比べて　$a+b=3$,　$a-3b=-5$
これを解いて　$a=1$,　$b=2$

(4)$x^2-2x\leqq 0$　より　$x(x-2)\leqq 0$　$\therefore 0\leqq x\leqq 2$ ……………①
$-2x^2-x+1<0$　より　$2x^2+x-1>0$　$(2x-1)(x+1)>0$
$\therefore x<-1,\ \dfrac{1}{2}<x$ ……②
①，②より　$\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$

(5)$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(6+4\sqrt{3}+2)+(6-4\sqrt{3}+2)}{4}=\dfrac{16}{4}$
$=4$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}(x+\dfrac{1}{x})=4^3-3\cdot 1\cdot 4=64-12=52$

(6)$a=k$, $b=2-k$, $c=k+1$とするとき，$b^2-ac=0$であればよい．
つまり　$(2-k)^2-k(k+1)=0$　整理して　$-5k+4=0$
$\therefore\ k=\dfrac{4}{5}$

② $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分をa，小数部分をbとするとき，次の問いに答えなさい。

(1) a, bの値を求めなさい。

(2) $(ab+a-b-1)(b+1)$ の値を求めなさい。

【出題のねらい】
・分母の有理化ができるか．
・式を簡単にしてから代入して式の値を求めることができるか．

＜解答＞

(1) 与式 $=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$

ここで　$1<\sqrt{2}<2$　より　$3<2+\sqrt{2}<4$　　$\therefore a=3$

また　$a+b=2+\sqrt{2}$　より　$3+b=2+\sqrt{2}$　　$\therefore b=\sqrt{2}-1$

(2) 与式 $=\{a(b+1)-(b+1)\}(b+1)=(a-1)(b+1)(b+1)$
$=(a-1)(b+1)^2=(3-1)(\sqrt{2})^2$
$=4$

③ $y=(x^2+2x+3)^2-2(x^2+2x+3)+2$ について次の問いに答えなさい。

(1) $t=x^2+2x+3$ とするとき，tの値の範囲を求めなさい。

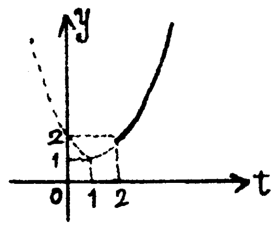
(2) yの最小値，およびそのときのxの値を求めなさい。

【出題のねらい】
・yの変域(値域)を求めることができるか．
・定義域が限定されている場合の最小値を求めることができるか．

＜解答＞

(1) $t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqq 2$　　$\therefore t\geqq 2$

(2) tで置き換えると
$y=t^2-2t+2$
$=(t-1)^2+1$　　$(t\geqq 2)$
右図のグラフになるので最小値は2，
このとき$t=2$であるから
$x^2+2x+3=2$　を解いて　$x=-1$
$\therefore$　$x=-1$　のとき　最小値　2



④ xの2次方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件をみたすように定数pの値の範囲を定めなさい。

(1) 2つの解が異符号

(2) 異なる2つの解が1より大きい

【出題のねらい】
・2次方程式の解の存在範囲を限定する条件を，2次関数のグラフを用いて求めることができるか．

＜解答＞

$f(x)=x^2-2px+p+2$　とする．

(1) $y=f(x)$のグラフのy切片が負であればよい．
$f(0)<0$　つまり　$p+2<0$　　　$\therefore$　$p<-2$

(2) $y=f(x)$のグラフが次の条件をみたせばよい．
「x軸と異なる2点で交わる」つまり　$p^2-1\cdot(p+2)>0$　であればよい．
整理して　$p^2-p-2>0$，　$(p-2)(p+1)>0$　$\therefore$　$p<-1,\ 2<p$…①
「軸が$x=1$より右側にある」軸の方程式が$x=p$より　$\therefore$　$p>1$…………②
「$f(1)$の値が正」$f(0)=-p+3$より　$-p+3>0$　$\therefore$　$p<3$…………③
①②③より　　$2<p<3$

＜選択問題＞

＜三角比＞

① 次の問いに答えなさい。

(1) $0° \leqq \theta \leqq 90°$ で $\cos\theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\tan\theta$ の値を求めなさい。
(2) △ABCでAB=3, BC=7, CA=8のとき△ABCの面積を求めなさい。

【出題のねらい】
・三角比の相互関係を用いることができるか
・三角比の性質を用いて三角形の面積を求めることができるか.

＜解答＞

(1) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{16}{9}$

よって $\tan^2\theta = 1 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{7}{9}$ $\therefore \tan\theta > 0$ より $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(2)余弦定理より $\cos\theta = \dfrac{64+9-49}{2\cdot3\cdot8} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \theta = 60°$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\sin60° = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

② AB=3, BC=$3\sqrt{5}$, CA=6である△ABCにおいてBCの中点をMとするとき, AMの長さを求めなさい。

【出題のねらい】
・図形の特徴をとらえ余弦定理を用いることができるか

＜解答＞

$\triangle ABC$において余弦定理より $\cos\theta = \dfrac{3^2+(3\sqrt{5})^2-6^2}{2\cdot3\cdot3\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\triangle ABM$において余弦定理より $AM^2 = 3^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\cdot3\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{45}{4}$

$\therefore \quad AM = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

＜数列＞

① 次の問いに答えなさい。
(1) 初項が-5, 第10項が22である等差数列の一般項を求めなさい。

(2) 第2項が-6, 第5項が48である等比数列において, 初項から第n項までの和を求めなさい。

【出題のねらい】
・等差数列の一般項を求めることができるか.
・等比数列の一般項, 数列の和を求めることができるか.

＜解答＞
(1)公差をdとすると第10項が22であることより $-5+(10-1)d=22$ が成り立つ
これを解いて $d=3$
よって一般項は $-5+(n-1)3=3n-8$
(2)初項をa, 公比をrとすると $ar=-6$ と $ar^4=48$ が成り立つ.
これより $r^3=-8$ つまり $r=-2$ となり $a=3$ を得る.

求める等比数列の和は $\dfrac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = 1-(-2)^n$

② 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ・・・・・・という数列について, 初項から第100項までの和を求めなさい。

【出題のねらい】
・群数列の規則性を理解し, 和を求めることができるか.

＜解答＞
数列の規則性より自然数nは第$\frac{1}{2}n(n-1)+1$項から第$\frac{1}{2}n(n+1)$項までに出てくる
このことから 13 は第79項から第91項までに出てくる. つまり第100項は14で

あり，これは１４が続く列の中で９番目にある．
よって求める和は

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+13^2)+(14\times 9)=\frac{1}{6}13(13+1)(2\times 13+1)+126=945$$

＜個数の処理＞

① 次の問いに答えなさい．
(1) 0, 1, 2, 3, 4 の5個の数字のうち，相異なる数字を用いて3桁の整数をつくる．何通りの整数ができますか．

(2) 9人のうちから3人の委員を選び出すとき，aとbのうち1人だけが選ばれる場合は何通りありますか．

【出題のねらい】
・条件のついたものを考慮に入れて順列や組み合わせの数を求めることができるか．

＜解答＞
(1)千の位の数は０以外の４通り．十，一の位は残り４個の数字から２個選ぶ順列の数 ${}_4P_2$通りである．よって　$4\times{}_4P_2=48$通り
(2)aだけが選ばれる場合は，a，b以外の７人から残り２人を選べばよい．つまり ${}_7C_2=21$通りある．
同様に b だけが選ばれる場合も２１通りある．　$\therefore 21+21=42$通り

② 11人生徒を3人，4人，4人の組に分けるのは何通りありますか．

【出題のねらい】
・同人数の組分けができるか．

＜解答＞
11人を３人と，４人の組A，Bに分けるのは　${}_{11}C_3\times{}_8C_4\times{}_4C_4=11550$通り

これのA，Bの区別をなくしたとき分け方は　$\dfrac{11550}{2!}=5775$通り

＜確率＞

① 次の問いに答えなさい．
(1) 2個のさいころを同時に投げるとき，目の数の和が7である確率を求めなさい．

(2) 白球3個，赤球7個が入っている袋から，同時に2個の球を取り出すとき，少なくとも1球は白である確率を求めなさい．

【出題のねらい】
・確率の基本的な計算ができるか．
・余事象の確率を用いることができるか．

＜解答＞
(1)起こりうるすべての場合は$6^2=36$通り．和が７となるのは(1,6)，(2,5)，(3,4)，(4,3)，(5,2)，(6,1)の６通り．　$\therefore\ \dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(2)２個とも赤球である確率は　$\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{7}{15}$　，

少なくとも１個白球が出るのはこれの余事象であるから　$1-\dfrac{7}{15}=\dfrac{8}{15}$

② 1個のさいころを投げて，1の目が出れば100円もらい，それ以外の目が出れば20円を渡すものとする．6回投げて所持金が最初と変わらない確率を求めなさい

【出題のねらい】
．反復試行の確率を求めることができるか．

＜解答＞
１の目が出た回数をx，それ以外の目が出た回数をyとすると
　$x+y=6$，　$100x=20y$　が成り立つ．
これより　$x=1$，$y=5$　である．
つまり６回さいころを投げる独立な試行のなかで１回のみ１の目が出ればよい．よって求める確率は　${}_6C_1\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{5}{6}\right)^5=\left(\dfrac{5}{6}\right)^5=\dfrac{3125}{7776}$