

〈共通問題〉

1 次の各問に答えなさい。

- (1) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ を展開しなさい。
- (2) $(a^2-b^2)x^2+2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)$ を因数分解しなさい。
- (3) 次の方程式を解きなさい。 $|2x+1| - |x-1| = 10$
- (4) 次の2つの不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めなさい。

$$\begin{cases} 3x^2-2x-8 < 0 \\ -x^2-x+3 < 0 \end{cases}$$
- (5) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが $y=-x^2+2x+1$ のグラフと原点に関して対称のとき、 a, b, c の値を求めなさい。
- (6) $6-2\sqrt{2}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $b+1/b-a$ の値を求めなさい。
- (7) $x=1+\sqrt{2}$ のとき x^3-3x^2+x の値を求めなさい。
- (8) 2次方程式 $x^2-(a+2)x+3a=0$ が -1 より小さい解と 1 より大きい解をもつように定数 a の値の範囲を定めなさい。

【出題のねらい】

- (1)(2) 式の展開、因数分解ができるか。
- (3) 絶対値符号を含む方程式を解くことができるか。
- (4) 連立2次不等式を解くことができるか。
- (5) 関数のグラフを対称移動したグラフの方程式を求めることができるか。
- (6) 無理数の計算ができるか。
- (7) 式を変形して計算ができるか。
- (8) 2次不等式の解の存在範囲を限定する条件を、2次関数のグラフを用いて求めることができるか。

〈解答〉

$$(1) \text{ 与式 } = (x^2+x-2)(x^2+x-12) = (x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24 \\ = x^4 + 2x^3 + x^2 - 14x^2 - 14x + 24 = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$$

$$(2) \text{ 与式 } = (a+b)(a-b)x^2 + 2(a^2+b^2)x + (a+b)(a-b) \\ = \{(a+b)x + (a-b)\}\{(a-b)x + (a+b)\} \\ = (ax+bx+a-b)(ax-bx+a+b)$$

$$(3) (i) x \geq 1 \text{ のとき } 2x+1 \geq 0 \text{ かつ } x-1 \geq 0 \text{ だから} \\ (2x+1) - (x-1) = 10 \text{ を解いて } x=8$$

$$(ii) -\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ のとき } 2x+1 \geq 0 \text{ かつ } x-1 < 0 \text{ だから} \\ (2x+1) - \{-(x-1)\} = 10 \text{ を解いて } x = \frac{10}{3} \quad \text{不適}$$

$$(iii) x < -\frac{1}{2} \text{ のとき } 2x+1 < 0 \text{ かつ } x-1 < 0 \text{ だから} \\ -(2x+1) - \{-(x-1)\} = 10 \text{ を解いて } x = -12$$

$$(i), (ii), (iii) \text{ より、解は } x = -12, 8$$

$$(4) 3x^2-2x-8 < 0 \text{ より } -\frac{4}{3} < x < 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$-x^2-x+3 < 0 \text{ より } x < \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \quad \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < x \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < x < 2$$

$$(5) y = -x^2 + 2x + 1 \text{ を } x \text{ 軸に関して対象移動すると } -y = -x^2 + 2x + 1 \text{ すなわち } y = x^2 - 2x - 1 \\ \text{が得られる。これを } y \text{ 軸に関して対称移動すると } y = (-x)^2 - 2(-x) - 1 \text{ すなわち } y = x^2 + 2x - 1 \\ \text{が得られる。これが } y = ax^2 + bx + c \text{ となるのであるから } a=1, b=2, c=-1$$

$$(6) 1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \text{ より } 2 < 2\sqrt{2} < 3, -3 < -2\sqrt{2} < -2, 3 < 6 - 2\sqrt{2} < 4 \quad \therefore a = 3$$

$$\text{また, } a + b = 6 - 2\sqrt{2} \text{ より } b = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \frac{1}{b} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{与式} = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 3 = 3$$

$$(7) x = 1 + \sqrt{2} \text{ より } x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \therefore \text{与式} = (x^2 - 2x - 1)(x - 1) - 1 = -1$$

$$(8) f(x) = x^2 - (a + 2)x + 3a \text{ とする}$$

$$f(-1) < 0 \text{ かつ } f(1) < 0 \text{ より } a < -\frac{3}{4} \text{ かつ } a < \frac{1}{2} \quad \therefore a < -\frac{3}{4}$$

2 $a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 2, abc = 3$ のとき、次の値を求めなさい

(1) $ab + bc + ca$

(2) $(a + b)(b + c)(c + a)$

【出題のねらい】展開公式を利用し、効率よく式の値を求めることができるか。

〈解答〉

$$(1) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \cdots \textcircled{1}$$

$$a + b + c = 1, a^2 + b^2 + c^2 = 2 \text{ を } \textcircled{1} \text{ の両辺に代入し、} 1 = 2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$(2) a + b + c = 1 \text{ より、} a + b = 1 - c, b + c = 1 - a, c + a = 1 - b$$

$$\therefore \text{与式} = (1 - c)(1 - a)(1 - b) \\ = 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc \\ = 1 - 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{7}{2}$$

3 関数 $f(x) = -x^2 - 2ax + a$ の最大値を M , $g(x) = 2x^2 - ax + 2a$ の最小値を m とするとき、次の各問いに答えなさい。

(1) $m < M$ となる a の値の範囲を求めなさい。

(2) $f(x) < g(x)$ がすべての x に対して成り立つための a の値の範囲をもとめなさい。

【出題のねらい】

- ・ 2 次関数を標準形になおすことができるか。
- ・ 2 次不等式を解くことができるか。
- ・ 2 次不等式がすべての x に対して成り立つ条件を用いて、定数の値の範囲を求めることができるか。

〈解答〉

$$f(x) = -(x + a)^2 + a^2 + a, g(x) = 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + 2a \text{ より } M = a^2 + a, m = -\frac{a^2}{8} + 2a$$

$$(1) m < M \text{ より } -\frac{a^2}{8} + 2a < a^2 + a \text{ これを整理して } 9a^2 - 8a > 0 \quad \therefore a < 0, \frac{8}{9} < a$$

$$(2) f(x) < g(x) \text{ より } -x^2 - 2ax + a < 2x^2 - ax + 2a$$

これを整理して $3x^2 + ax + a > 0$ この 2 次不等式がすべての x に対して成り立つための条件は

$$D = a^2 - 4 \cdot 3 \cdot a = a^2 - 12a < 0 \quad \therefore 0 < a < 12$$

〈C問題〉
(三角比)

選択問題

解答 解説

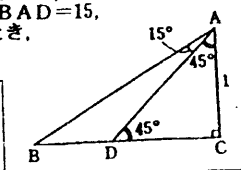
- 1 次の各問いに答えなさい。
 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、
 (1) $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めなさい。
 (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めなさい。

【出題のねらい】

- 三角比の相互関係、と
 $(a+b)^2$ の展開式及び a^3+b^3 の因数分解
 を利用することができるか。

- 1 〈解答〉
 (1). $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を平方すると、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ から
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$, $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$ $\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$
 (2). $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1 - (-\frac{1}{4})\}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4\sqrt{2}}$

- 2 右の図のような直角三角形ABCにおいて、
 Dは辺BC上の点で、 $AC=1$, $\angle BAD=15^\circ$,
 $\angle ADC=\angle DAC=45^\circ$ とするとき、
 $\sin 15^\circ$ の値を求めなさい。



【出題のねらい】

- 図の中で三辺の長さ $1, 1, \sqrt{2}$ と $1, 2, \sqrt{3}$ が
 わかり、正弦定理が利用できるか。

- 2 〈解答〉
 $\triangle ACD$ は直角二等辺三角形だから、 $AC=CD=1$ から $AD=\sqrt{2}$ となる。
 一方、 $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$ から、
 $\angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ となり、各辺が $1, 2, \sqrt{3}$ の直角三角形となるから、 $AB=2$,
 $BC=\sqrt{3}$ となる。よって、 $BD=BC-CD=\sqrt{3}-1$ となる。 $\triangle ABD$ において、
 正弦定理により、 $\frac{BD}{\sin 15^\circ} = \frac{AD}{\sin 30^\circ}$ から、 $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

〈数列〉

- 1 次の各問いに答えなさい。
 (1) 第14項が52、第27項が91である等差数列の一般項 a_n を求めなさい。
 (2) 第3項が12、第6項が96である等比数列の第10項を求めなさい。

【出題のねらい】

- 等差数列の一般項を求めることができるか。
- 等比数列の一般項を求め、さらにこれが利用
 できるか。

- 1 〈解答〉
 (1). 等差数列の一般項は $a_n = a + (n-1)d$ だから、 $a + (14-1)d = 52$, $a + (27-1)d = 91$ より、 $a + 13d = 52$, $a + 26d = 91$ を解いて、 $13d = 39$ から、 $d = 3$,
 $a = 52 - 13 \times 3 = 52 - 39 = 13$ $\therefore a_n = 13 + 3(n-1) = 3n + 10$
 (2). 等比数列の一般項は $a_n = ar^{n-1}$ だから、 $ar^{3-1} = 12$, $ar^{6-1} = 96$ より
 $ar^2 = 12$, $ar^5 = 96$, $ar^5 = ar^2 r^3 = 12r^3 = 96$, $r^3 = 8 = 2^3$
 $\therefore r = 2$, $2^2 a = 12$, $\therefore a = 3$ $\therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 よって、第10項は $a^{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$

- 2 数列 $1, 1+3, 1+3+9, 1+3+9+27, \dots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

【出題のねらい】

- 各項が等比数列の第 n 項までの和である
 ことを知っているか。
- さらにその和を S_n の意味を理解して活用
 できるか。

- 2 〈解答〉
 $1, 1+3, 1+3+9, 1+3+9+27, \dots$ この数列の4項は初項1で公比3の等比数列の4項までの和に
 なっている。よって、この数列の一般項は初項が1で公比3の n 項までの和であるから、

$$1+3+9+27+\cdots+3^{n-1} = \frac{1(3^n-1)}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}, 1, 1+3, 1+3+9, \dots, \frac{3^n-1}{2} \text{ となる.}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, 第 } n \text{ 項までの和 } S_n \text{ は } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (3^k-1) = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n 3^k - \sum_{k=1}^n 1) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3(3^n-1)}{3-1} - n \right\} = \frac{1}{4} (3^{n+1} - 2n - 3) \end{aligned}$$

〈個数の処理〉

① 次の各問に答えなさい。

- (1) 675 の正の約数の個数は全部で何個ありますか。
 (2) 0, 1, 2, 3, 4 の5種類の数字がある。同じ数字をくり返し使ってもよいことにして、4桁の奇数はいくつできますか。

【出題のねらい】

自然数の素数を理解し素因数分解が出来るか
 約数の個数の総和を直積の考えを利用し活用できるか。

① 〈解答〉

(1) 675を素因数分解すると、 $675=3^3 \cdot 5^2$ 。0と奇数の意味及び重複順列を理解し、活用できるか。

だから、正の約数の個数は、直積の考えにより、 $(3+1)(2+1)=4 \times 3=12$ 従って、12個となる。

(2) 4桁の奇数になるには、1の位の数が1と3のどれかである時だから2通り、また千の位には、0が使えないから4通り、その各々に対して百と十の位には、0も使えるから、それぞれ5通り、
 従って、 $4 \times 5 \times 5 \times 2=200$ (個)

② 12Aの生徒を3人ずつ4組に分ける方法は何通りありますか。

【出題のねらい】

組分けの場合の同数の組で組に区別がつかないことを理解し、組合せにより求めることができるか。

② 〈解答〉

12人の生徒を3人ずつ4組に分けるが4組をA, B, C, Dとすると、まずA組に3人入れて、 ${}_{12}C_3$ 、B組は残りの9人から3人入れて、 ${}_9C_3$ 、C組は残りの6人から3人入れて、 ${}_6C_3$ 、D組は残り3人入れて、 ${}_3C_3$ 、よって、 ${}_{12}C_3 \cdot {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3$ となりこれらは単に4つの組に分ける場合(すなわち組に区別がない時)であるから、4組とも同数ですので、 $({}_{12}C_3 \cdot {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3) \div 4! = 11 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 15,400$ (通り)

〈確率〉

① 次の各問に答えなさい。

- (1) 赤球4個、白球2個の入った袋から、2個を同時にとり出した時、赤球と白球である確率を求めなさい。
 (2) 3本の当たりくじを含む15本のくじがある。この中から同時に5本引くとき、少なくとも1本当たりくじを引く確率を求めなさい。

【出題のねらい】

確率の定義を理解し基本的計算ができるか。

余事象の確率を理解し活用できるか。

① 〈解答〉

(1) 起こり得るすべての場合の数は、 ${}_6C_2$ である。取り出した2個が赤球と白球であるのは、1個は赤球で他の1個は白だから、起こり得る場合の数は、 ${}_4C_1 \times {}_2C_1$ となる。

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

(2) 「少なくとも、1本当たりくじを引く」の余事象は「すべてはずれるくじを引く」事象だから、起こり得るすべての場合の数は、 ${}_{15}C_5$ となる。

また、その時に起こる場合の数は ${}_{15-3}C_5 = {}_{12}C_5$ だから、求める確率は

$$1 - \frac{{}_{12}C_5}{{}_{15}C_5} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

② さいころを投げて素数の目が出れば10円、その他の目が出れば50円もらえるというさいころを10回投げてもらった金額が300円になる確率を求めなさい。

【出題のねらい】

反復試行の確率を理解し活用できるか。

② 〈解答〉

素数の目が出る回数を x 、それ以外の目が出る回数を y とする。 $x+y=10$ 、 $10x+50y=300$ 、を解いて、 $x=y=5$ 、従って、反復試行の確率だから

$${}_{10}C_5 \left(\frac{1}{6} \right)^5 = \frac{63}{256}$$