平成１１年度　第２回数学診断テスト《解答解説》Ｃ問題（50分）

＜必須問題＞

1 次の問いに答えなさい。

(1) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$ を展開しなさい。

(2) $2x^2+xy-y^2-3x+3y-2$ を因数分解しなさい。

(3) $x=1+\sqrt{3}$ のとき，x^3-3x^2+x-2 の値を求めなさい。

(4) $\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-2a+1}$ を次の場合に分けて簡単にしなさい。

① $a<-2$　② $-2\leqq a<1$　③ $a\geqq 1$

(5) 放物線 $y=-x^2+3x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めなさい。

(6) 不等式 $ax^2+bx+2<0$ の解が $x<-2$，$\frac{1}{3}<x$ となるような定数 a，b の値を求めなさい。

《出題のねらい》

(1),(2) 式の展開，因数分解ができるか。

(3) 式の変形を利用して，計算ができるか。

(4) $\sqrt{a^2}=|a|$ が分かるか。

(5) 関数のグラフを平行移動したグラフの方程式を求めることができるか。

(6) 与えられた解をもつ２次不等式を求めることができるか。

《解答解説》

(1) (与式) $=(x+1)(x-3)\times(x+2)(x-4)=\{(x^2-2x)-3\}\{(x^2-2x)-8\}$
$=(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24=x^4-4x^3-7x^2+22x+24$

(2) (与式) $=2x^2+(y-3)x-(y^2-3y+2)=2x^2+(y-3)x-(y-1)(y-2)$
$=\{2x-(y-1)\}\{x+(y-2)\}=(2x-y+1)(x+y-2)$

(3) $x=1+\sqrt{3}$ のとき，$x-1=\sqrt{3}$　両辺を２乗すると $x^2-2x+1=3$
$\therefore x^2-2x-2=0$　よって，(与式) $=(x^2-2x-2)(x-1)+x-4$
$=0+(1+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}-3$

(4) $\sqrt{a^2+4a+4}-\sqrt{a^2-2a+1}=\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{(a-1)^2}=|a+2|-|a-1|$

① $a<-2$ のとき，$|a+2|=-(a+2)$，$|a-1|=-(a-1)$ だから，(与式) $=-3$

② $-2\leqq a<1$ のとき，$|a+2|=a+2$，$|a-1|=-(a-1)$ だから，
(与式) $=2a+1$

③ $a\geqq 1$ のとき，$|a+2|=a+2$，$|a-1|=a-1$ だから，(与式) $=3$

(5) 関数 $y=-x^2+3x$ において，$x\to x+1$，$y\to y-3$ でおきかえると，求める関数は，
$y-3=-(x+1)^2+3(x+1)$ すなわち，$y=-x^2+x+5$

(6) $x<-2$，$\frac{1}{3}<x$ を解にもつ２次不等式の１つは，$(x+2)(3x-1)>0$ すなわち，
$3x^2+5x-2>0$　両辺に -1 をかけて，$-3x^2-5x+2<0 \Leftrightarrow ax^2+bx+2<0$，
係数を比較して　$a=-3$，$b=-5$

2 ２次方程式 $x^2-(p+2)x+4=0$ が次の条件を満たすように定数 p の値の範囲を定めなさい。

(1) 異なる 2 つの解がともに正

(2) 1 より大きい解と 1 より小さい解

《出題のねらい》

・２次関数と２次方程式の関係がわかるか。

・２次方程式の問題を２次関数のグラフを利用して解くことができるか。

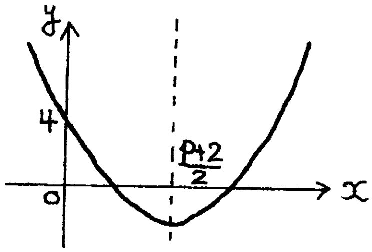
・２次不等式を解くことができるか。

《解答解説》 $f(x)=x^2-(p+2)x+4$ とおき変形すると

$$f(x)=\left(x-\frac{p+2}{2}\right)^2-\frac{p^2+4p-12}{2}$$ となる

(1)y = $f(x)$ のグラフが右図のようになればよいから

$$\begin{cases} (p+2)^2-16>0 \cdots\cdots ① \\ \text{軸 } x=\dfrac{p+2}{2} \text{ について，} \dfrac{p+2}{2}>0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$



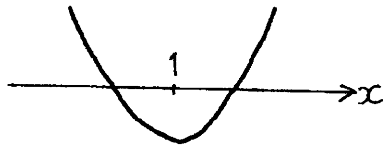
①より $p^2+4p-12>0$，$(p+6)(p-2)>0$

$\therefore p<-6$，$2<p$

②より　$p>-2$　　　　　よって　$p>2$

(2)y = $f(x)$ のグラフが右図のようになればよいから

$f(1)=1-(p+6)+4<0$　よって　$p>3$



$\boxed{3}$ 関数 $y=-(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+1$　について，次の問いに答えなさい。

(1) $t=x^2+2x$　とするとき，t の値の範囲を求めなさい。

(2) y の最大値，およびそのときの　x　の値を求めなさい。

《出題のねらい》

・２次関数の最大値，最小値を求めることができるか。

・４次式の各項に共通している２次式を１つの文字で置き換えることで，特別な形の４次関数を２次関数の問題として扱うことができるか。

《解答解説》

(1) $t=(x+1)^2-1$ より，$t \geqq -1$

(2) $y=-t^2+4t+1$　$(t \geqq -1)$ の最大値を求める。

$y=-(t-2)^2+5$　$(t \geqq -1)$ だから y は $t=2$ のとき最大値５をとる。

そのときの x の値は $x^2+2x=2$ を解くと $x=-1\pm\sqrt{3}$　となる。よって，

$x=-1\pm\sqrt{3}$　のとき最大値５をとる。

<三角比>

円に内接する四角形 ABCD において，AB = 7，BC = 5，CD = 2，∠B = 60° であるとき次の問いに答えなさい。

(1) AC の長さを求めなさい。

(2) 円の半径を求めなさい。

(3) 四角形 ABCD の面積を求めなさい。

《出題のねらい》

・余弦定理を利用して，２辺と余弦から対辺が導き出せるか。

・円に内接する四角形の対角の性質が、利用できるか

・正弦定理を利用して外接円の半径を求めることができるか。

・２つの三角形の面積を求めて，四角形の面積を求めることができるか

《解答解説》

(1) 余弦定理より $AC^2=7^2+5^2-2\times7\times5\times\cos60^\circ=39$　$\therefore AC=\sqrt{39}$

(2) 外接円の半径を R とおくと正弦定理より $\dfrac{AC}{\sin60^\circ}=2R$　$\therefore R=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{39}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{13}$

(3)　円に内接する四角形の性質より $\angle D=180^\circ-\angle B=120^\circ$

よって、AD = x とおくと、余弦定理より　$39=x^2+2^2-2\times2\times x\times\cos120^\circ$

これを整理して　$x^2+2x-35=0$，$(x-5)(x+7)=0$　$x>0$ より $x=5$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times7\times5\times\sin60^\circ=\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$，$\triangle ADC=\dfrac{1}{2}\times5\times2\times\sin120^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ より

四角形ＡＢＣＤの面積Ｓは

$S=\triangle ABC+\triangle ADC=\dfrac{45\sqrt{3}}{4}$

<数列>

等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある。次の問いに答えなさい。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が初項2，公差3であるとき $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(2) $c_n=a_n+b_n$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ とおくとき，$c_2=11$，$c_3=20$ であるとする。$\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

(3) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第n項までの和を求めなさい。

《出題のねらい》

・等差数列の初項と公差から一般項を求めることができるか。
・等比数列の一般項を求めることができるか。
・等差数列と等比数列の第n項までの和を求めることができるか。

《解答解説》

(1) $a_n=a+(n-1)d$ より $a_n=2+(n-1)3=3n-1$

(2) $\{b_n\}$ の初項 a，公比 r とおくと $b_n=ar^{n-1}$

$c_2=11$ より $c_2=a_2+b_2=5+ar=11$ $\therefore ar=6\cdots$①

$c_3=20$ より $c_3=a_3+b_3=8+ar^2=20$ $\therefore ar^2=12\cdots$②

①，②より $r=2$，$a=3$ よって $b_n=3\cdot2^{n-1}$

(3) $\{a_n\}$ の初項から第n項までの和は $\frac{1}{2}n\{4+(n-1)\times3\}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

$\{b_n\}$ の初項から第n項までの和は $\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^n-3$

よって、数列 $\{c_n\}$ の初項から第n項までの和は $S_n=3\cdot2^n+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-3$

<個数の処理>

5個の数字 0，1，2，3，4 を用いて整数をつくるとき，次の問いに答えなさい。

(1) 異なる3個を用いて3桁の整数をつくるとき，奇数はいくつできるか。

(2) 異なる4個を用いて4桁の整数をつくるとき，2100以上の整数はいくつできるか。

(3) 重複を許して4桁の整数をつくるとき，同じ数字は3回まで用いてよいことに すると，整数はいくつできるか。

《出題のねらい》

・条件にあった順列による数え上げができるか。
・余事象の考え方を用いて数え上げることができるか。

《解答解説》

(1) 一の位の選び方は「1」と「3」の2通り
百の位の選び方は0と一の位の数字を除く3通り。十の位は残りの3つの数字のどれを選んでもよいから、求める場合の数は
$2\times3\times3=18$（通り）

(2) 2100以上の整数をつくるには、
①千の位を3，4のどれかにする　$2\times4\times3\times2=48$（通り）
②千の位2，百の位が0以外である　$1\times3\times3\times2=18$（通り）
①＋②より求める場合の数は　66（通り）

(3) 全ての重複を許して4桁の整数を作ると　$4\times5\times5\times5=500$（通り）
そのうち0以外の4つの数字で4回の重複をする場合は4通り
したがって，求める場合の数は　$500-4=496$（通り）

<確率>

1個のサイコロを投げ，3の倍数の目が3回出たら終了するゲームを行うとき，次の問いに答えなさい。

(1) サイコロをちょうど3回投げてゲームが終了する確率を求めなさい。

(2) サイコロをちょうど5回投げてゲームが終了する確率を求めなさい。

(3) サイコロを投げて5回までに終了する確率を求めなさい。

《出題のねらい》

・反復試行についての確率が計算できるか。
・(1),(2),(3)のそれぞれにおいて，的確に場合分けして計算ができるか。

《解答解説》

(1) 3の倍数の出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，ちょうど3回で終了するということは，3回連続で3の倍数の目が出るということであるから $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$

(2) サイコロをちょうど5回投げてゲームが終了するのであるから次の状況で終了しなければならない。

①4回投げた時点で3の倍数の目が2回，3の倍数以外の目が2回出る。

②5回目に投げたサイコロが3の倍数の目である。

①の確率は $_4C_2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$，②の確率は $\dfrac{1}{3}$，よって求める確率は $\dfrac{8}{27}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{81}$

(3) (1)でちょうど3回，(2)でちょうど5回で終了する確率を求めたので，ちょうど4回で終了する確率を求める。

①3回投げた時点で3の倍数の目が2回，3の倍数以外の目が1回出る。

②4回目に投げたサイコロが3の倍数の目である。

①の確率は $_3C_2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$，②の確率は $\dfrac{1}{3}$，よって求める確率は $\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$

ゆえに，5回までに終了する確率は(1)，(2)より $\dfrac{1}{27}+\dfrac{8}{81}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{17}{81}$