

必須問題

1

- (1) $A = 2x^2 - x + 1$, $B = -x^2 - x + 2$, $C = 3x - 2$ のとき, $2(A + B) - (A + B + C)$ を計算しなさい.
- (2) $(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$ を展開しなさい.
- (3) $(a + b)^3 + 8$ を因数分解しなさい.
- (4) 等式 $|x - 1| + |x - 2| = x + 3$ を満たす実数 x の値を求めなさい. (計算過程も記述しなさい.)
- (5) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, b の値を求めなさい.
- (6) 1枚100円のDVDと1枚80円のCDをあわせて200枚購入するとき, 合計金額を17,000円以上18,000円以下にしたい. DVDの購入枚数を何枚以上何枚以下にすればよいか答えなさい.
- (7) 2次方程式 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0$ を解きなさい.
- (8) x の2次方程式 $3x^2 - 4x - m = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき, 定数 m の値の範囲を求めなさい.
- (9) x 軸方向に -2 , y 軸方向に 3 だけ平行移動すると, 放物線 $y = 3x^2 - 6x + 10$ に重なるような放物線をグラフとする2次関数を求めなさい.
- (10) グラフの軸が直線 $x = -2$ で, 2点 $(0, 3)$, $(-5, -7)$ を通る2次関数を求めなさい.

【出題のねらい】

- (1) 整式の計算の工夫・代入ができるか.
- (2) 展開の工夫ができるか. $(a + b + c)^2$ の展開公式を利用できるか.
- (3) $x^3 + y^3$ の因数分解の公式を利用できるか.
- (4) 絶対値をはずすために適切な場合分けができるか. 解として適するか判断できるか.
- (5) 分母の有理化ができるか. $\sqrt{3}$ の値を理解し, 求める整数・小数部分を求めることができるか.
- (6) 文章問題から1次不等式を導き, 解くことができるか.
- (7) 係数が有理数の場合の2次方程式を解くことができるか.
- (8) 2次方程式が異なる2つの実数解をもつための条件を理解しているか. 1次不等式を解くことができるか.
- (9) 放物線の頂点を求めることができるか. どのように平行移動すれば, 求める2次関数のグラフに重なるか理解できるか.
- (10) 求める2次関数を標準形 $(y = a(x - p)^2 + q)$ の形で考えることができるか. 条件から未知数 a , p , q を求めることができるか.

【解答・解説】

- (1) $2(A + B) - (A + B + C) = A + B - C = (2x^2 - x + 1) + (-x^2 - x + 2) - (3x - 2) = \underline{x^2 - 5x + 5}$.
- (2) $(x^2 + x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2 = \{(x^2 + 1) + x\}^2\{(x^2 + 1) - x\}^2 = \{(x^2 + 1)^2 - x^2\}^2 = (x^4 + x^2 + 1)^2 = \underline{x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1}$.
- (3) $(a + b)^3 + 8 = (a + b)^3 + 2^3 = \{(a + b) + 2\}\{(a + b)^2 - (a + b) \cdot 2 + 2^2\} = \underline{(a + b + 2)(a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 4)}$.
- (4) 等式 $|x - 1| + |x - 2| = x + 3$ を満たす実数 x の値を求めなさい. (計算過程も記述しなさい.)

- ① $x < 1$ のとき $(1 - x) + (2 - x) = x + 3$ となるから, これを解いて $\underline{x = 0}$.
- ② $1 \leq x < 2$ のとき $(x - 1) + (2 - x) = x + 3$ となるから, これを解いて $x = -2$ となるが, 不適. ゆえに, 解なし.
- ③ $2 \leq x$ のとき $(x - 1) + (x - 2) = x + 3$ となるから, これを解いて $\underline{x = 6}$.
- ①～③より, 求める実数 x の値は $\underline{x = 0, 6}$.

- (5) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \doteq \frac{1.73 + 1}{2} = \frac{2.73}{2} = 1.365$ であるから $a = 1$.
ゆえに, $b = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - a = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - 1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1 = \underline{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$.
- (6) DVDの購入枚数を x とすると, CDの購入枚数は $200 - x$ であるから,
 $17000 \leq 100x + 80(200 - x) \leq 18000$. これを解いて, $50 \leq x \leq 100$.
ゆえに, 50枚以上100枚以下.
- (7) 2次方程式 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0$ の両辺を3倍して $x^2 - 4x - 3 = 0$. ゆえに, $\underline{x = 2 \pm \sqrt{7}}$.
- (8) $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m) > 0$ であればよいので, $\underline{m > -\frac{4}{3}}$.
- (9) 放物線 $y = 3x^2 - 6x + 10 = 3(x - 1)^2 + 7$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -3 だけ平行移動すればよいので, $y = 3(x - 3)^2 + 4$, つまり, $\underline{y = 3x^2 - 18x + 31}$.
- (10) グラフの軸が直線 $x = -2$ なので, 求める2次関数を $y = a(x + 2)^2 + q$ とおくと,
点 $(0, 3)$ を通るので, $3 = 4a + q$, 点 $(-5, -7)$ を通るので, $-7 = 9a + q$.
これらを解いて, $a = -2$, $q = 11$. ゆえに, 求める2次関数は $\underline{y = -2(x + 2)^2 + 11}$.

選択問題

2 < 図形と計量 >

- 半径 5 の円に内接する $\triangle ABC$ において、 $\angle C = 60^\circ$ のとき、辺 AB の長さを求めなさい。
- 円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB = 3$ 、 $CD = DA = 2$ 、 $\angle BAD = 120^\circ$ のとき、辺 BC の長さを求めなさい。
- $\triangle ABC$ において、 $a = 5$ 、 $b = 7$ 、 $c = 10$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい。

【出題のねらい】

- 正弦定理を適用できるか。 $\triangle ABC$ の外接円の半径 R を求めることができるか。
- 円に内接する四角形の性質および余弦定理を利用して、 BC の長さを求めることができるか。
- 余弦定理を利用して、 $\cos A$ の値を求めることができるか。
 $\cos A$ の値から $\sin A$ の値を求め、面積の公式を利用することができるか。

【解答・解説】

- 正弦定理より、 $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ であるから、 $AB = 2 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{5\sqrt{3}}$ 。
- 四角形 $ABCD$ は円に内接するので、 $\angle BCD = 60^\circ$ 。 $BC = x$ とおくと、
 $\triangle ABD$ において、余弦定理より、 $BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 4 + 9 + 6 = 19$ 、
また、 $\triangle CBD$ において、余弦定理より、 $BD^2 = x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = x^2 - 2x + 4$ 。
ゆえに、 $x^2 - 2x + 4 = 19$ を解いて、 $x = -3$ 、 5 。ここで $x > 0$ より、 $x = 5$ 。 よって、 $\underline{BC = 5}$ 。
- 余弦定理より、 $\cos A = \frac{7^2 + 10^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 10} = \frac{31}{35}$ なので、 $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{31}{35}\right)^2} = \frac{2\sqrt{66}}{35}$ 。
よって、求める面積は $S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{2\sqrt{66}}{35} = \underline{2\sqrt{66}}$ 。

3 < 場合の数 >

- 男子 3 人女子 3 人が 1 列に並ぶとき、男女が交互に並ぶ並び方は何通りあるか求めなさい。
- 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字のうち、異なる 4 個の数字を並べて 4 桁の数を作る。
小さい順に並べるとき、3251 は何番目の数が答えなさい。
- 正八角形の対角線の本数を求めなさい。

【出題のねらい】

- 男女が同数の場合の、交互に並ぶ並び方の総数を求めることができるか。
- 3251 より小さい数の総数を求めることができるか。
- 2 つの頂点を結ぶ線分の本数および対角線の本数を求めることができるか。

【解答・解説】

- ${}_3P_3 \times {}_3P_3 \times 2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$ 。 よって、72 通り。
- 3251 より小さい数を数えると、次のようになる。
1□□□ の形 $\rightarrow 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$ 個。 2□□□ の形 $\rightarrow 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$ 個。
30□□ の形 $\rightarrow 1 \times 1 \times 4 \times 3 = 12$ 個。 31□□ の形 $\rightarrow 1 \times 1 \times 4 \times 3 = 12$ 個。
320□ の形 $\rightarrow 1 \times 1 \times 1 \times 3 = 3$ 個。 321□ の形 $\rightarrow 1 \times 1 \times 1 \times 3 = 3$ 個。
324□ の形 $\rightarrow 1 \times 1 \times 1 \times 3 = 3$ 個。 3250 $\rightarrow 1$ 個。
3251 はこれらの次の数だから、 $60 + 60 + 12 + 12 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = \underline{155}$ 番目
- 8 個の頂点から 2 点を選び線分を引き、それから正八角形の辺の本数を引けばよいから、
求める対角線の本数は、 ${}_8C_2 - 8 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} - 8 = 28 - 8 = 20$ よって、20 本。

4 < 確率 >

- 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、目の和が奇数となる確率を求めなさい。
- 1 から 10 までの数字の書かれた 10 枚のカードから同時に 3 枚のカードを引くとき、
最大値が 5 である確率を求めなさい。
- 2 枚の 100 円硬貨と 2 枚の 500 円硬貨の計 4 枚を同時に投げ、表と裏の枚数が異なる場合にのみ表が出た硬貨をもらえとする。もらえる金額 X の期待値を求めなさい。

【出題のねらい】

- 目の和が奇数となる条件を理解し、その確率を求めることができるか。
- 最大値が 5 になるためのカードの引き方を考えることができるか。
- もらえる金額とそのときの確率を求めることができるか。 期待値を理解しているか。

【解答・解説】

- 目の和が奇数となるのは、1 回目、2 回目、3 回目の目がそれぞれ、次の場合である。
① (奇, 奇, 奇), ② (奇, 偶, 偶), ③ (偶, 奇, 偶), ④ (偶, 偶, 奇)。
よって、求める確率は、 $\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{6^3} \times 4 = \frac{1}{2}$ 。
- 最大値が 5 であるから、5 のカードと、1 から 4 のカードのうち 2 枚を引けばよいから、
求める確率は、 $\frac{1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{20}$ 。
- 表と裏の枚数が異なる場合にももらえる金額は、100 円、500 円、700 円、1100 円、1200 円 の
いずれかであるから、もらえる金額 X の期待値は
 $100 \times \frac{2}{16} + 500 \times \frac{2}{16} + 700 \times \frac{2}{16} + 1100 \times \frac{2}{16} + 1200 \times \frac{1}{16} = \frac{6000}{16} = \underline{375}$ 円。