平成１９年度　第２回　数学診断テストＢ問題　【解答・解説】

1　次の各問いに答えなさい。

（1）$2x^3\times\left(-3xy^2\right)^2$　を計算しなさい。

（2）$(x+y)^3$　を展開しなさい。

（3）x^3+1　を因数分解しなさい。

（4）$\dfrac{1}{\sqrt{7}-1}$　の分母を有理化しなさい。

（5）$|x|=5$　を満たす実数 x の値を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　指数の計算ができるか。

(2)　高次式の展開ができるか。（展開公式の確認。）

(3)　x^3+y^3 のパターンの因数分解ができるか。

(4)　分母の有理化ができるか。

(5)　絶対値の意味を理解しているか。

＜解答＞

（1）$2x^3\times\left(-3xy^2\right)^2=2x^3\times9x^2y^4=18x^5y^4$

（2）$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$　（展開公式）

（3）$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)$
$=(x+1)(x^2-x+1)$

（4）$\dfrac{1}{\sqrt{7}-1}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\dfrac{\sqrt{7}+1}{6}$

（5）$x=\pm5$

2　次の各問いに答えなさい。

（1）1次不等式 $6x+3<8x-7$ を解きなさい。

（2）2次方程式 $(x-1)^2=2$ を解きなさい。

（3）x の2次方程式 $x^2-3mx+2m^2=0$ が 1 を解にもつとき，定数 m の値を求めなさい。

（4）x の2次方程式 $2x^2+4x-k=0$ が異なる２つの実数の解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めなさい。

（5）不等式 $4x<3x+5<6x+5$ を解きなさい。

【出題のねらい】

(1)　1次不等式が解くことができるか。

(2)　2次方程式が解くことができるか。

(3)　方程式の解の意味を理解しているか。

(4)　判別式と2次方程式の解の関係が分かるか。

(5)　A＜B＜C のパターンの不等式を解くことができるか。

＜解答＞

(1)　$6x+3<8x-7 \rightarrow -2x<-10 \rightarrow x>5$

(2)　$(x-1)^2=2 \rightarrow x-1=\pm\sqrt{2} \rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

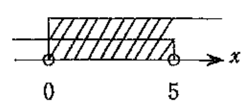
(3)　方程式 $x^2-3mx+2m^2=0$ が $x=1$ を解に持つから，
$2m^2-3m+1=0$ が成り立つ。

$(m-1)(2m-1)=0$ より，$m=1,\dfrac{1}{2}$

(4)　異なる２つの実数の解をもつので，判別式 $D>0$ が成り立つ。
$D=4^2-4\cdot2\cdot(-k)>0$
$\rightarrow 8k+16>0 \rightarrow 8k>-16 \rightarrow k>-2$

(5) $4x<3x+5<6x+5$ より $\begin{cases}4x<3x+5 & \cdots① \\ 3x+5<6x+5 & \cdots②\end{cases}$ を解けばよい。

①より，$x<5$　，　②より，$0<x$



よって，$0<x<5$

3　次の各問いに答えなさい。

（1）2次関数 $y=3x^2-6x+5$ を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形しなさい。

（2）2次関数 $y=-2(x-3)^2$ のグラフの頂点と軸を求めなさい。

（3）2次関数 $y=2(x-1)^2+3$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの x の値を求めなさい。

（4）頂点が点 $(-2,3)$ で，点 $(1,-6)$ を通る放物線をグラフにもつ2次関数を求めなさい。

（5）2次不等式 $x^2-9<0$ を解きなさい。

【出題のねらい】

(1)　2次関数の式変形ができるか。（平方完成）

(2)　2次関数の頂点，軸を求めることができるか。

(3)　2次関数の最大値，最小値を求めることができるか。

(4)　2次関数を決定することができるか。

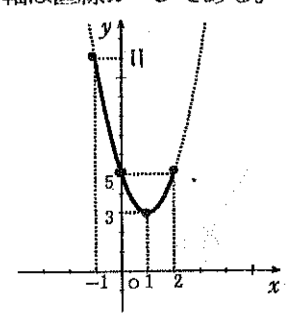
(5)　2次不等式が解くことができるか。

＜解答＞

(1)　$y=3x^2-6x+5=3(x^2-2x)+5$
$=3\{(x-1)^2-1^2\}+5=3(x-1)^2-3+5$
$=3(x-1)^2+2$

(2)　$y=a(x-p)^2+q$ の頂点は点 (p,q)，軸は直線 $x=p$ より，
$y=-2(x-3)^2$ を $y=-2(x-3)^2+0$ と考えれば，
頂点は点 $(3,0)$ で，軸は直線 $x=3$ である。

(3)　グラフより
$x=-1$ のとき，
最大値 11 をとり，
$x=1$ のとき，
最小値 3 をとる。



(4)　頂点が点 $(-2,3)$ であるから，求める2次関数は
$y=a(x+2)^2+3$ と表される。これが点 $(1,-6)$ を通るから
$-6=a(1+3)^2+3 \rightarrow a=-1$。よって，求める2次関数は
$y=-(x+2)^2+3=-x^2-4x-1$

(5)　$x^2-9=(x+3)(x-3)<0$ より，$-3<x<3$

4 【図形と計量】(選択問題) 次の各問いに答えなさい。

(1) $\sin 135°$ の値を求めなさい。

(2) θ が鋭角で $\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(3) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めなさい。

(4) $\angle A = 60°$，$BC = \sqrt{3}$ である△ＡＢＣの外接円の半径 R を求めなさい。

(5) △ＡＢＣと△ＰＱＲは相似で，その相似比が $1:2$ である。△ＡＢＣの面積が 4 のとき，△ＰＱＲの面積を求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 三角比の値を求めることができるか。

(2) 三角比の相互関係等を利用して $\cos\theta$ の値を求めることができるか。

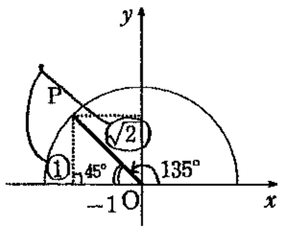
(3) 三角比の値から θ を求めることができるか。

(4) 正弦定理を利用して，三角形の外接円の半径を求めることができるか。

(5) 相似な図形の面積の比の性質を利用し、面積を求めることができるか。

<解答>

(1)



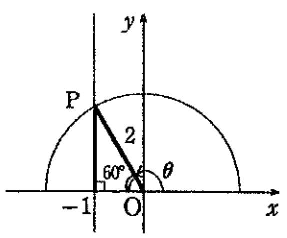
図より，$\sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) 三角比の相互関係　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+2^2} = \dfrac{1}{5}$　で

θ は鋭角より　$\cos\theta > 0$　よって，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(3)



図より，$\theta = 120°$

(4) $2R = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2$　　よって，$R = 1$

(5) △ＡＢＣと△ＰＱＲの相似比が 1：2 より，面積の比は $1^2 : 2^2$ である。
△ＰＱＲの面積を Ｓ とすると，　$4 : S = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$　より，Ｓ＝16

5 【場合の数】(選択問題) 次の各問いに答えなさい。

(1) ５人が１列に並ぶとき，並び方は全部で何通りありますか。

(2) ７人が円形のテーブルを囲んで座る方法は全部で何通りありますか。

(3) ８人の生徒から３人の委員を選ぶ方法は全部で何通りありますか。

(4) a,a,a,a,b,b,c の７個を１列に並べる方法は全部で何通りありますか。

(5) 72 の正の約数は全部で何個ありますか。

【出題のねらい】

(1) 順列の総数を求めることができるか。

(2) 円順列の総数を求めることができるか。

(3) 組合せの総数を求めることができるか。

(4) 同じものを含む順列の総数を求めることができるか。

(5) 約数の個数を求めることができるか。

<解答>

(1) ${}_5P_5 = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$（通り）

(2) $(7-1)! = 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$（通り）

(3) ${}_8C_3 = \dfrac{{}_8P_3}{3!} = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$（通り）

(4) $\dfrac{7!}{4!\,2!\,1!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5}{2} = 105$（通り）

(5) $72 = 2^3 \times 3^2$ より，72 の正の約数の個数は
$(3+1)(2+1) = 4\times3 = 12$（個）

6 【確率】(選択問題) 次の各問いに答えなさい。

(1) ジョーカーを除く１組のトランプのカード 52 枚からカードを１枚引くとき，ハートが出る確率を求めなさい。

(2) ３枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも１枚裏が出る確率を求めなさい。

(3) 赤玉３個，白玉２個の入った袋から，同時に２個の玉を取り出すとき，２個とも赤玉が出る確率を求めなさい。

(4) １から 50 までの番号札から１枚引くとき，その番号が２の倍数または３の倍数である確率を求めなさい。

(5)1個のさいころを4回投げるとき,1の目がちょうど2回出る確率を求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 簡単な事象の確率を求めることができるか。

(2) 余事象の確率を求めることができるか。

(3) 組合せの総数を用いた確率を求めることができるか。

(4) 和事象の確率を求めることができるか。

(5) 独立な試行の確率を求めることができるか。

<解答>

(1) $\dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

(2) 「少なくとも１枚裏が出る」という事象をＡとすると，余事象 $\overline{A}$「３枚とも表が出る」となる。よって，　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

(3) 全部の５個から２個取る組み合わせは，${}_5C_2$ 通りある。
赤玉３個から２個取る組み合わせは，${}_3C_2$ 通りある。
よって，求める確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \dfrac{3}{10}$

(4) ２の倍数の番号札は 25 枚，３の倍数の番号札は 16枚，２の倍数かつ３の倍数つまり，６の倍数の番号札は８枚あるので，２の倍数または３の倍数の番号札を引く確率は，$\dfrac{25+16-8}{50} = \dfrac{33}{50}$

(5) さいころを１回投げるとき，１の目が出る確率は，$\dfrac{1}{6}$。

よって，４回投げて１の目がちょうど２回出る確率は，

$${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = 6\times\frac{1}{6^2}\times\frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{216}$$