平成１９年度　第２回　数学診断テスト　Ｃ問題　解説

1 次の各問いに答えなさい。

(1) $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$ を展開しなさい。

(2) $x^2+2xy+y^2+3x+3y-4$ を因数分解しなさい。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 4x-5>2x-3 \\ 3x-1\leqq 9x-19 \end{cases}$ を解きなさい。

(4) ２次方程式 $8x^2-14x+3=0$ を解きなさい。

(5) x の２次方程式 $x^2-(k-1)x+k-1=0$ が異なる２つの実数解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めなさい。

(6) 直線 $x=-1$ を軸とし，２点 $(1,3),(-2,-3)$ を通る放物線をグラフにもつ２次関数を求めなさい。

(7) ２次関数 $y=-x^2+6x-5$ の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値および最小値を求めなさい。また，そのときの x の値を求めなさい。

(8) $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$ とする。

① $x^2-2x=t$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めなさい。

② y の最小値とそのときの x の値を求めなさい。

(9) 関数 $y=|2-x|$ について答えなさい。

① $x>2$ のとき，$y=\boxed{}$ である。

② $y=|2-x|$ のグラフをかきなさい。

(1) $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)=(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)$

$=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

$=x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$

$=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

(2) $x^2+2xy+y^2+3x+3y-4=x^2+(2y+3)x+y^2+3y-4$

$=x^2+(2y+3)x+(y-1)(y+4)$

1	$y-1$	→	$y-1$
1	$y+4$	→	$y+4$
			$2y+3$

$=(x+y-1)(x+y+4)$

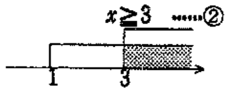
(3) $4x-5>2x-3$　　　$3x-1\leqq 9x-19$

$2x>2$　　　$-6x\leqq -18$

$x>1$ ……①　　　$x\geqq 3$ ……②

①，②より

$x\geqq 3$



(4) $8x^2-14x+3=0$

2	-3	→	-12
4	-1	→	-2
			-14

$(2x-3)(4x-1)=0$　　よって，　$x=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}$

(5) 異なる２つの実数解をもつ条件は，判別式 $D>0$ である。

$\{-(k-1)\}^2-4\cdot 1\cdot(k-1)=k^2-6k+5>0$

$(k-1)(k-5)>0$

よって，　$k<1,\ 5<k$

(6) $x=-1$ を軸とするので，$y=a(x+1)^2+q$ とおける。

$(1,3)$ を通るので，$3=a(1+1)^2+q$ より

$4a+q=3$ ……①

$(-2,-3)$ を通るので，$-3=a(-2+1)^2+q$ より

$a+q=-3$ ……②

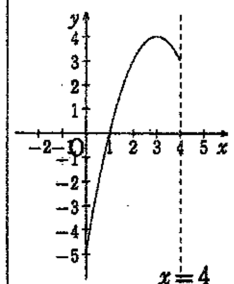
①，②より　　$a=2,\ q=-5$

よって求める２次関数は，　$y=2(x+1)^2-5$

(7) $y=-x^2+6x-5$　，$0\leqq x\leqq 4$

$=-(x^2-6x)-5$

$=-(x-3)^2+4$



図のようにグラフがかける。

よって，

$x=3$　のとき，最大値４

$x=0$　のとき，最小値 -5

(8) $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

① $x^2-2x=t$ より

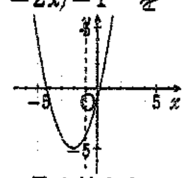
$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

よって，$t\geqq -1$

② $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$ を t を用いて表すと，

$y=t^2+4t-1$

$=(t+2)^2-5$



①の　$t\geqq -1$　より

$t=-1$　のとき，最小値をとる。

最小値は，$y=(-1+2)^2-5=-4$

また，　$t=x^2-2x=-1$　より

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$　よって，$x=1$

(9) $y=|2-x|$ について，

$2-x\geqq 0$ ，すなわち　$x\leqq 2$ のとき

$y=2-x$

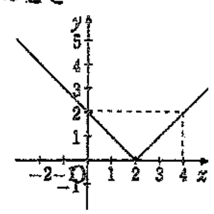
$2-x<0$ ，すなわち　$x>2$ のとき

$y=x-2$

よって，

①……$x>2$ のとき，$y=x-2$

②……グラフは，右図。



2 次の各問いに答えなさい。

(1) θ が鋭角で，$\tan\theta=2$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(2) $\triangle ABC$ において，$CA=4,\ A=45^\circ,\ C=105^\circ$ であるとき，BC の長さを求めなさい。

(3) 円に内接する四角形ABCDにおいて，$AB=3,\ CD=DA=2,\ \angle BAD=120^\circ$ のとき，

① BD の長さを求めなさい。

② 四角形ABCD の面積を求めなさい。

(1) 三角比の相互関係

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$

ここで，θ は鋭角より　$\cos\theta>0$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2) $B=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

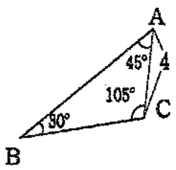
正弦定理より

$\dfrac{4}{\sin 30^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 45^\circ}$

$\sin 30^\circ\times BC=4\times\sin 45^\circ$

$\dfrac{1}{2}\times BC=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$BC=4\sqrt{2}$



(3) 余弦定理より

①$BD^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ$

$=13-12\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=19$

よって，$BD=\sqrt{19}$

②$BC=x$ とおくと，

$19=2^2+x^2-2\times 2\times x\times\cos 60^\circ$

$19=4+x^2-4\times x\times\dfrac{1}{2}$

$x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$

$x>0$ より，$x=5$

$\triangle ABD$ の面積を S_1 とおくと，

$S_1=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\triangle BCD$ の面積を S_2 とくと

$S_2=\dfrac{1}{2}\times 2\times 5\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 2\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

よって，四角形ABCD の面積を S とおくと，

$S=S_1+S_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

【1出題のねらい】

(1)展開の工夫ができるか。

(2)たすきがけを使った因数分解ができるか。

(3)連立不等式を解くことができるか。

(4)２次方程式を解くことができるか。

(5)２次方程式が異なる実数解を求める条件を理解しているか。

(6)２次関数を決定することができるか。

(7)定義域が与えられているときの２次関数の最大値，最小値　を求めることができるか。

(8)条件から２次関数の定義域を求め，最小値を求めることができるか。

(9)絶対値の意味を理解することができているか。

【2出題のねらい】

(1)三角比の相互関係を用いて，値を求めることができるか。

(2)と(3)①

三角形において，正弦定理や余弦定理を使うことができるか。

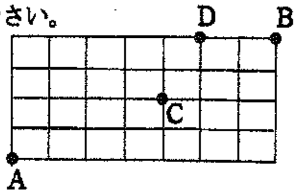
(3)②

余弦定理を利用し，四角形の面積を求めることができるか。

3 次の各問いに答えなさい。

(1) 男子5人，女子2人が1列に並ぶとき，女子が両端にくる並び方は，何通りあるか求めなさい。

(2) 地点AからBまで最短経路で行くとき，地点C, Dの両方を通る行き方は何通りあるか求めなさい。



(3) 正九角形について，

① 頂点を結んでできる三角形はいくつありますか。

② ①の三角形の中で，正九角形と辺を共有しないものはいくつありますか。

【3出題のねらい】

(1) 両端を先に考えてから残りの順列を考えることができるか。

(2) 特定の地点を通って，最短経路を求めることができるか。

(3) ①組合せの考えを用いて三角形の総数を求めることができるか。

②余事象の考えを用いる事ができるか。

(1) 両端に特定の2人が並ぶ方法は，${}_2P_2$ 通り。
それぞれについて，間に残りの5人が並ぶ方法は，${}_5P_5$ 通り。
よって，${}_2P_2 \times {}_5P_5 = 240$ （通り）

(2) AからCへの行き方
$\frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1} = 15$ （通り）
CからDへの行き方
$\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2!}{2!\cdot 1!} = 3$ （通り）
DからBへの行き方は，1（通り）
したがって，地点C, Dを通る行き方は，
$15 \times 3 \times 1 = 45$ （通り）

(3) ①三角形をつくるには，9個の頂点から3個の頂点を選べばよい。
${}_9C_3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$
よって，84個ある。
②三角形の一辺を正九角形の辺と共有する。
5個×9辺＝45
三角形の二辺を正九角形の辺と共有する。
9個
よって，辺を共有しない三角形は，
$84 - (45 + 9) = 30$
30個ある。

4 次の各問いに答えなさい。

(1) 3枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも1枚裏が出る確率を求めなさい。

(2) 赤玉3個，白玉2個入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，2個とも同じ色の玉が出る確率を求めなさい。

(3) 6枚のカードに1から6までの数字が1つずつ記入されている。この中から同時に2枚のカードを引き，カードの数字のうち大きい方をXとする。

① $X=3$となる確率を求めなさい。

② Xの期待値を求めなさい。

【4出題のねらい】

(1) 余事象の確率を求めることができるか。

(2) 組合せの総数を用いた確率を求めることができるか。

(3) 独立な試行の確率と期待値を求めることができるか。

(1) 3枚の硬貨を同時に投げるのは8通り。
すべて表が出るのは1通り。その確率は$\frac{1}{8}$
よって，少なくとも1枚裏の出る確率は，$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

(2) 赤玉3個，白玉2個入った袋から，同時に2個取り出すのは，${}_5C_2 = 10$通り
①2個とも赤玉が出るのは，${}_3C_2 = 3$通り
②2個とも白玉が出るのは，${}_2C_2 = 1$通り
①，②より2個とも同じ色が出るのは，
$3 + 1 = 4$通り
よって求める確率は，$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(3) 6枚のカードから2枚引くのは，${}_6C_2 = 15$ 通り
$X=1$ のとき，なし　　$X=2$ のとき，1通り
$X=3$ のとき，2通り　　$X=4$ のとき，3通り
$X=5$ のとき，4通り　　$X=6$ のとき，5通り

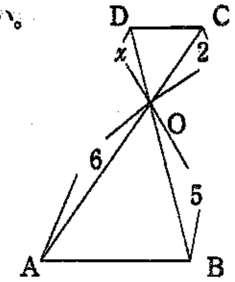
従って，

X	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

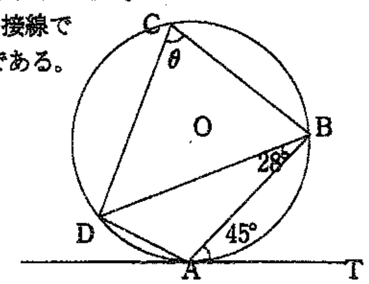
①$X=3$となる確率は，$\frac{2}{15}$
②Xの期待値$E(X)$は，
$E(X) = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$

5 次の各問いに答えなさい。

(1) 次の図において，xを求めなさい。
ただし，
ABとCDは平行である。

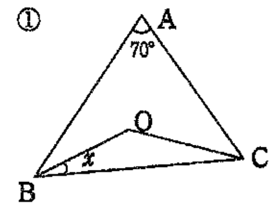


(2) 次の図においてθを求めなさい。
ただし，ATは円Oの接線であり，Aはその接点である。

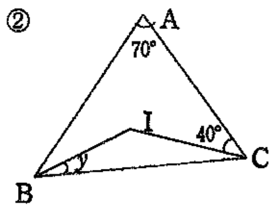


(3) 次の図において，x，yを求めなさい。
ただし，点O，点Iは，それぞれ△ABCの外心，内心である。

①



②



【5出題のねらい】

(1) 平行条件を用いて長さを求めることができるか。

(2) 接線と弦のつくる角の定理（接弦定理）を用いて角度を求めることができるか。

(3) 外心や内心の性質より，角度を求めることができるか。

(1) △OABと△OCDは相似だから
OA : OC ＝ OB : OD
$6 : 2 = 5 : x$
$6x = 10$
$x = \frac{5}{3}$

(2) 接線と弦のつくる角より
$\angle BAT = \angle ADB = 45°$
△ABDの内角の和より
$\angle ADB + \angle DAB + 28° = 180°$
$45° + \angle DAB + 28° = 180°$
$\angle DAB = 107°$
ここで，四角形ABCDは，円Oに内接しているので，
$\theta + \angle DAB = 180°$
$\theta = 180° - \angle DAB = 73°$

(3) ①点Oは△ABCの外接円の中心だから，OA＝OB＝OC
よって，△OAB，△OCAは，二等辺三角形。
だから，$\angle OCB = x$
$\angle OBA + \angle OCA = 70°$
三角形の内角の和
$\angle A + (\angle OBA + \angle OCA) + 2x = 180°$
$70° + 70° + 2x = 180°$
$x = 20°$
②点Iは△ABCの内接円の中心だから，$\angle ICA = \angle ICB = 40°$
$\angle IBA = \angle IBC = y$
三角形の内角の和を考えると，
$\angle A + (\angle ICA + \angle ICB) + 2y = 180°$
$70° + (40° + 40°) + 2y = 180°$
$y = 15°$

別解

(3) ①点Oは△ABCの外接円の中心だから，中心角は円周角の2倍である。
$\angle BOC = 2 \times \angle BAC = 140°$
また，$\angle OBC = \angle OCB = x$ である。
△OBCにおいて，三角形の内角の和
$140° + x + x = 180°$
よって $x = 20°$

※ 選択問題3および5については解答に単位がついていなくても許容するものとするが，注意喚起が必要。