平成21年度　第２回　数学診断テストＢ問題　【解答・解説】

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えなさい。

(1) 多項式 $x^2+2xy+3y^2-x+4y+1$ について，
x の文字に着目するときの定数項を求めなさい。

(2) $\left(-7a^3b^4\right)\times 5ab^2$ を計算しなさい。

(3) $(x+1)^3$ を展開しなさい。

(4) $6x^2+13x-8$ を因数分解しなさい。

(5) x^3+8 を因数分解しなさい。

(6) $\left|1-\sqrt{2}\right|$ の値を求めなさい。

(7) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ の分母を有理化しなさい。

【出題のねらい】

(1) ２種類以上の文字を含む整式において，１つの文字に着目して整理することができるか。
(2) 指数の計算ができるか。
(3) 多項式の展開ができるか。
(4) たすきがけを用いて，因数分解ができるか。
(5) ３次式の因数分解ができるか。
(6) 絶対値の定義を用いた解法ができるか。
(7) 分母の有理化ができるか。

【解答】

(1) $x^2+2xy+3y^2-x+4y+1=x^2+(2y-1)x\underline{+3y^2+4y+1}$　　よって求める定数項は $3y^2+4y+1$ 答

(2) $\left(-7a^3b^4\right)\times 5ab^2=(-7)\times5\cdot a^{3+1}\cdot b^{4+2}=-35a^4b^6$ 答

(3) $(x+1)^3=x^3+3\times x^2\times1+3\times x\times1^2+1^3=x^3+3x^2+3x+1$ 答

(4) $6x^2+13x-8\quad=\quad(2x-1)(3x+8)$ 答

$$
\begin{array}{ccc}
2 & -1 & \to -3 \\
3 & 8 & \to 16 \\
\hline
6 & -8 & 13
\end{array}
$$

(5) $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$ 答

(6) $1<\sqrt{2}$ より $1-\sqrt{2}<0$ よって $\left|1-\sqrt{2}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)=-1+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$ 答

(7) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 答

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えなさい。

(1) 次の文章を不等式で表しなさい。
「ある数 x の３倍に50を足した数は100以上である。」

(2) 連立不等式 $\begin{cases}3x+2>5x-4\\-x+4>2(x+5)\end{cases}$ を解きなさい。

(3) 絶対値を含む方程式 $|x-4|=3$ を解きなさい。

(4) ２次方程式 $3x^2-5x-1=0$ を解きなさい。

(5) ２次方程式 $x^2-4x+k=0$ が異なる２つの実数解をもつとき，
定数 k の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 大小関係を不等式で表現できるか。
(2) １次連立不等式が解けるか。
(3) 絶対値を含む方程式が解けるか。
(4) ２次方程式を解の公式を用いて，解くことができるか。
(5) ２次方程式の判別式の意味を理解しているか。

【解答】

(1) 「ある数 x の３倍に50を足した数は100以上である。」

$3x+50\geqq100$ 答

(2) $3x+2>5x-4$ から $-2x>-6$ よって $x<3$ ・・・①

$-x+4>2(x+5)$ から $-3x>6$ よって $x<-2$ ・・・②

①と②の共通範囲を求めて $x<-2$ 答

(3) $c>0$ のとき，方程式 $|x|=c$ の解は $x=\pm c$

$|x-4|=3 \Leftrightarrow x-4=\pm3 \quad\Leftrightarrow\quad x=4\pm3$

よって $x=1,7$ 答

(4) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$ 答

(5) $x^2-4x+k=0$ が異なる２つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow (-4)^2-4\times1\times k>0$

$\Leftrightarrow 16-4k>0$

$\Leftrightarrow -4k>-16$

$\Leftrightarrow k<4$ 答

③ 次の各問いに答えなさい。

(1) 2次関数 $y=-2(x-1)^2+3$ のグラフの頂点を求めなさい。

(2) 2次関数 $y=x^2-6x+8$ を $y=(x-p)^2+q$ の形に変形しなさい。

(3) 2次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフをかきなさい。

(4) 2次関数 $y=(x-3)^2-1$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の最大値と，そのときのxの値を求めなさい。

(5) 2次関数 $y=(x-3)^2-1$ $(0 \leqq x \leqq 4)$ の最小値と，そのときのxの値を求めなさい。

(6) 点$(2,3)$ を頂点とし，点$(0,-5)$ を通る放物線をグラフにもつ2次関数を求めなさい。

(7) 2次不等式 $x^2-6x+8<0$ を解きなさい。

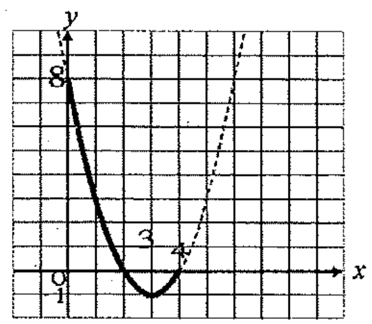
【出題のねらい】
(1) 2次関数のグラフの頂点を求められるか。
(2) $y=(x-p)^2+q$ の形に変形できるか。
(3) 2次関数のグラフがかけるか。
(4) 定義域が与えられているときの2次関数の最大値を求めることができるか。
(5) 定義域が与えられているときの2次関数の最小値を求めることができるか。
(6) 頂点と，頂点以外の１点を通る2次関数を決定できるか。
(7) 2次不等式が解けるか。

【解答】

(1) 頂点$(1,3)$

(2) $y=x^2-6x+8=(x-3)^2-3^2+8=(x-3)^2-1$ 答

(3) (2)より頂点が$(3,-1)$で，下に凸なので，
正答表のようなグラフになる（略）。



(4) 定義域が$0 \leqq x \leqq 4$ のときは，右図より
$x=0$ のとき，最大値8をとる。答

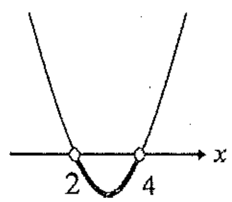
(5) 定義域が$0 \leqq x \leqq 4$ のときは，右図より
$x=3$ のとき，最小値-1をとる。答

(6) 頂点が点$(2,3)$ であるので，求める2次関数は$y=a(x-2)^2+3$ ・・・・① と表される。

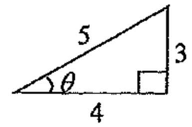
また，グラフが点$(0,-5)$を通るので，$-5=a(0-2)^2+3$ 　よって$a=-2$

ゆえに求める2次関数は $y=-2(x-2)^2+3$ 答

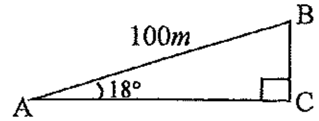
(7) $x^2-6x+8<0$ 　よって $(x-2)(x-4)<0$
ここで $(x-2)(x-4)=0$ を解くと，$x=2,4$
$y=(x-2)(x-4)$ のグラフとx軸の位置関係より
$y<0$ となるxの値の範囲は $2<x<4$ 答



④ 【図形と計量】（選択問題）次の各問いに答えなさい。



(1) 右図の直角三角形において，$\cos\theta$ の値を求めなさい。
(2) 傾き10°の坂道ABを100m進むとき，
標高差BCは何mになるか小数第１位を四捨五入して答えなさい。ただし，
$\sin 18^\circ=0.3090$，$\cos 18^\circ=0.9511$，
$\tan 18^\circ=0.3249$ とします。



(3) θ が鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$の値を求めなさい。

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす角θを求めなさい。

(5) △ABCにおいて，∠A＝45°，∠B＝60°，AC$=\sqrt{6}$のとき，辺BCの長さを求めなさい。

(6) ∠A＝150°，AB＝5，AC＝6のとき，△ABCの面積を求めなさい。

【出題のねらい】
(1) 三角比の定義を覚えているか。
(2) 三角比を利用して，辺の長さを求めることができるか。
(3) 三角比の相互関係等を利用して，$\sin\theta$の値を求めることができる。
(4) 三角比の値からθを求めることができるか
(5) 正弦定理を利用することができるか。
(6) 三角形の面積を求めることができるか。

【解答】

(1) 図より考えて $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ 答

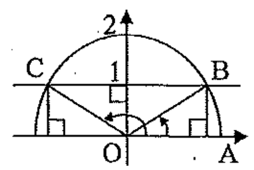
(2) $BC=AB\sin 18^\circ=100\times 0.3090=30.90$ よって31m高くなる。答

(3) 三角比の相互関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ よって $\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

ゆえに $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 　ここでθは鋭角より$\sin\theta>0$ 　よって $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 答

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{r}$

半径2の半円上で，y座標が1である点
は2つある。求めるθは右図より∠AOB，
∠AOCである。よって　$\theta=30^\circ, 150^\circ$ 答



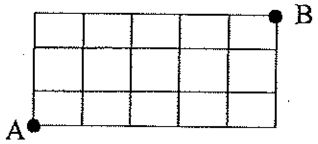
(5) 正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 　したがって $\dfrac{BC}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$

$BC=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}\div\sin 60^\circ\times\sin 45^\circ=\sqrt{6}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2$ 答

(6) 求める面積をSとおくと，$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$ 答

5 【場合の数】(選択問題) 次の各問いに答えなさい。

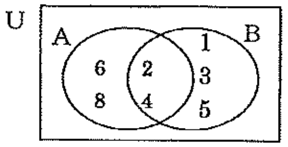
(1) $A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$ とするとき，$A\cap B$ を求めなさい。
(2) 大中小の3個のさいころを投げるとき，目の和が5になる場合は何通りあるか答えなさい。
(3) 1から5までの数字が1つずつかかれた5枚のカードがある。この中から3枚のカードを選んで，1列に並べてできる3けたの奇数は何通りあるか答えなさい。
(4) 男子4人と女子2人が，横1列に並ぶとき，女子が隣り合うような並び方は何通りあるか答えなさい。
(5) 6人が丸いテーブルの周りの6個の席に着席するとき，並び方は何通りあるか答えなさい。
(6) ある町には，右の図のような道がある。地点Aから地点Bまでの，遠回りをしない道順は何通りあるか答えなさい。



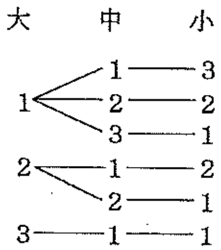
【出題のねらい】
(1) 2つの集合の共通部分を求めることができるか。
(2) 条件にそって樹形図を描くことができるか。
(3) 順列を理解しているか。
(4) 円順列の場合の数において，条件にあう場合の数を求めることができるか。
(5) 積の法則と組み合わせの考え方を理解しているか。

【解答】

(1) $A\cap B=\{2,4\}$ 答



(2) 右の樹形図により6通り 答



(3) 奇数になるのは，一の位が1, 3, 5の場合で3通りある。どちらの場合も，百の位，十の位には，残りの4枚のカードの中から2枚を選んで並べるので，その並べ方は ${}_4P_2=4\times3=12$

したがって，求める奇数の総数は，積の法則より $3\times{}_4P_2=3\times12=36$　　36通り 答

(4) 女子2人をひとまとめにして1人と考えたとき，男子4人と女子ひとまとめの並び方は，5! 通りある。ひとまとめにした女子2人の並び方は2! 通りある。

よって並び方の総数は積の法則より　$5!\times2!=240$　　240通り 答

(5) 並ぶ順は6人の円順列であるから，その総数は $(6-1)!=120$　　120通り 答

(6) 右へ1区画進むことを→で，上へ1区画進むことを↑で表す。
AからBまで行く最短の道順は，→5個と↑3個の順列で表される。

よって，求める最短の順列の総数は　$\dfrac{8!}{5!3!}=\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1}=56$　　56通り 答

6 【確率】(選択問題) 次の各問いに答えなさい。

※ただし，約分できる数は約分をして答えなさい。
(1) 赤球3個，白球2個が入っている袋から，球を1個取り出すとき，赤球の出る確率を求めなさい。
(2) 大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が6になる確率を求めなさい。
(3) 赤球3個，白球2個が入っている袋から，3個の球を同時に取り出すとき，赤球2個，白球1個を取り出す確率を求めなさい。
(4) 1から50までの数を1つずつ書いた50枚のカードの中から1枚を取り出すとき，取り出したカードの数が3の倍数または5の倍数である確率を求めなさい。
(5) 3枚の硬貨を同時に投げるとき，少なくとも1枚は裏が出る確率を求めなさい。
(6) 1枚の硬貨を5回続けて投げるとき，表がちょうど2回出る確率を求めなさい。

【出題のねらい】
(1) 簡単な事象の確率を求めることができるか。
(2) 簡単な事象の確率を求めることができるか。
(3) 組合せの総数を用いた確率を求めることができるか。
(4) 和事象の確率を求めることができるか。
(5) 余事象の確率を求めることができるか。
(6) 独立な試行の確率を求めることができるか。

【解答】

(1) 袋の中に球は全部で5個入っている。そのうち赤球は3個入っている。よって求める確率は，$\dfrac{3}{5}$ 答

(2) 大小2個のさいころを投げるとき，起こりうるすべての場合の数は6×6=36通りで，また，目の和が6となる場合は次の通りである。

(大, 小) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)　　の5通りである。求める確率は $\dfrac{5}{36}$ 答

(3) 全部の5個から3個取る組合せは，${}_5C_3$ 通りある。

赤球3個から2個，白球2個から1個取る組合せは，${}_3C_2\times{}_2C_1$ 通りある。

よって，求める確率は $\dfrac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\dfrac{3\times2}{2\times1}\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3\times2\times1}{5\times4\times3}=\dfrac{3}{5}$ 答

(4) 取り出したカードの数が「3の倍数である」という事象をA,「5の倍数である」事象をBとすると，「3の倍数または5の倍数である」という事象は $A\cup B$ である。$A\cap B$ は「15の倍数である」という事象である。
$n(A)=16$, $n(B)=10$, $n(A\cap B)=3$ より　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{16}{50}+\dfrac{10}{50}-\dfrac{3}{50}=\dfrac{23}{50}$ 答

(5)「少なくとも1枚は裏」という事象は，「3枚とも表になる」という事象Aの余事象 $\overline{A}$ である。

よって，少なくとも1枚は裏である確率 $P(\overline{A})$ は　　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{7}{8}$ 答

(6) 硬貨を1枚投げるとき，表がでる確率は $\dfrac{1}{2}$

よって，求める確率は ${}_5C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{5-2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$ 答