

1 【出題のねらい】

- (1)式の計算を工夫しておこなえるか。
- (2)公式を活用して因数分解ができるか。
- (3)循環小数を分数に表すことができるか。
- (4) $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ であることを利用して有理化ができるか。
- (5)絶対値の性質を理解しているか。
- (6)解の意味を理解しているか。
- (7)放物線の平行移動について理解しているか。
- (8)放物線の対称移動，平行移動について理解しているか。
- (9)2 次不等式の性質を理解しているか。
- (10)2 次方程式が実数解をもつことを判別式を用いて計算することができるか。
- (11)題意のグラフをイメージし，条件を作ることができるか。
- (12)条件の a の値より，題意のグラフをイメージすることができるか。

(1) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$ を展開しなさい。

(与式) $=\{(x+4)(x-2)\}\{(x+3)(x-1)\}$
 $=\{(x^2+2x)-8\}\{(x^2+2x)-3\}$
 $=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$
 $=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

(2) $x^4-7x^2y^2+y^4$ を因数分解しなさい。

(与式) $=(x^4+2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$
 $=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$
 $=\{(x^2+y^2)+3xy\}\{(x^2+y^2)-3xy\}$
 $=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

(3) 循環小数 $0.\dot{1}\dot{2}$ を分数で表しなさい。

$x=0.\dot{1}\dot{2}$ とおくと
 $100x=12.1212\cdots$
 $-) \quad x=0.1212\cdots$
 $\hline 99x=12$
よって $x=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}$
 $=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{4-2\sqrt{10}}{-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$

(5) 不等式 $|2x+1|>1$ を解きなさい。

$|2x+1|>1$ から $2x+1<-1$ または $1<2x+1$
よって $x<-1, 0<x$

(6) 2 次方程式 $15x^2-2x-1=0$ の 2 つの解の逆数が，
2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるように，定数 a, b の値を求めよ。

$15x^2-2x-1=0$ の左辺を因数分解して $(3x-1)(5x+1)=0$
よって，解は $x=-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ これらの逆数は $x=-5, 3$ である
から，条件より $(-5)^2+a\cdot(-5)+b=0, 3^2+a\cdot3+b=0$
ゆえに $5a-b=25 \cdots \textcircled{1}, 3a+b=-9 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ から $8a=16$ よって $a=2$ このとき， $\textcircled{1}$ から $b=-15$

(7) 放物線 $y=x^2$ を平行移動したものは，点 $(1, -5)$ を通り，頂点が放物線 $y=-x^2$ 上にある。この放物線の方程式を求めなさい。

x^2 の係数は 1 である。また，頂点が $y=-x^2$ 上にあるから，頂点の座標を $(p, -p^2)$ とすると，
求める 2 次関数は $y=(x-p)^2-p^2$ とおくことができる。
点 $(1, -5)$ を通ることから $-5=(1-p)^2-p^2$
すなわち $-5=1-2p$ よって $p=3$ したがって，求める 2 次関数は $y=(x-3)^2-9$ ($y=x^2-6x$ を答えとしてもよい)

(8) ある放物線を， y 軸に関して対称移動し，更に， x 軸方向に -2 ， y 軸方向に 1 だけ平行移動したら，放物線 $y=x^2+6x+10$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

放物線 $y=x^2+6x+10$ を x 軸方向に 2， y 軸方向に -1 だけ平行移動すると $y-(-1)=(x-2)^2+6(x-2)+10$
よって $y=x^2+2x+1$
この放物線を y 軸に関して対称移動したものがもとの放物線である。
ゆえに，求める方程式は $y=(-x)^2+2(-x)+1$
すなわち $y=x^2-2x+1$

(9) 2 次不等式 $x^2-mx+2m-3>0$ がすべての実数 x で成り立つように，定数 m の値の範囲を定めよ。

2 次不等式 $x^2-mx+2m-3>0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ の係数について
 $D=(-m)^2-4\cdot1\cdot(2m-3)=m^2-8m+12$ とする。 $\textcircled{1}$ の x^2 の係数が正であるから， $\textcircled{1}$ がすべての実数 x で成り立つための条件は $D<0$ である。よって $m^2-8m+12<0$
ゆえに $2<m<6$

(10) $a\neq0$ とする。2 つの方程式 $ax^2-3x+a=0$ ，
 $x^2-ax+a^2-3a=0$ について，少なくとも一方が実数解をもつように定数 a の値の範囲を定めよ。

[1] $a\neq0$ のとき，方程式 $ax^2-3x+a=0$ が実数解をもつ条件は
 $D_1=(-3)^2-4a\cdot a=9-4a^2=-(2a+3)(2a-3)$ とすると，
 $D_1\geq0$ である。すなわち $-(2a+3)(2a-3)\geq0$

よって $-\frac{3}{2}\leq a\leq \frac{3}{2}$

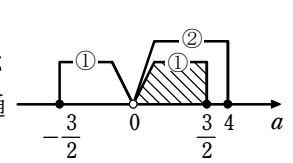
$a\neq0$ であるから $-\frac{3}{2}\leq a<0, 0<a\leq \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}$

[2] $a\neq0$ のとき，方程式 $x^2-ax+a^2-3a=0$ が実数解をもつ条件は $D_2=(-a)^2-4(a^2-3a)=-3a^2+12a=-3a(a-4)$ とすると，
 $D_2\geq0$ である。すなわち $-3a(a-4)\geq0$

よって $0\leq a\leq 4, a\neq0$ であるから $0<a\leq 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$

2 つの方程式がともに実数解をもつためには， a について $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の両方が満たされればよいから， $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて

$0<a\leq \frac{3}{2}$



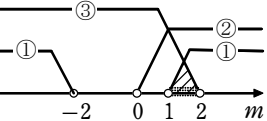
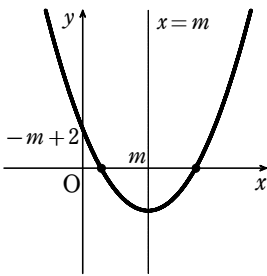
(11) 2 次関数 $y = x^2 - 2mx - m + 2$ のグラフと x 軸の正の部分異なる 2 点で交わるように、定数 m の値の範囲を定めよ。

与えられた 2 次関数のグラフと x 軸の正の部分異なる 2 点で交わるための条件は、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つことである。

- [1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

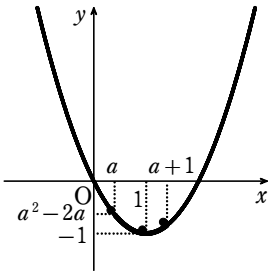
$D = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 2)$
 $= 4m^2 + 4m - 8$
とすると $D > 0$
すなわち $4m^2 + 4m - 8 > 0$
よって $m < -2, 1 < m$ ……①
- [2] グラフの軸は直線 $x = m$ で、この軸について $m > 0$ ……②
- [3] グラフは下に凸の放物線であるから、 y 軸との交点の y 座標 $-m + 2$ について $-m + 2 > 0$
よって $m < 2$ ……③

①, ②, ③の共通範囲を求めて
 $1 < m < 2$



(12) 定数 a は $0 < a < \frac{1}{2}$ を満たす。関数 $y = x^2 - 2x$ ($a \leq x \leq a + 1$) の最大値を求めなさい。

与えられた関数は $y = (x - 1)^2 - 1$ と変形され、
 $x = 1$ のとき $y = -1$
また、 $x = a$ のとき $y = a^2 - 2a$ 、 $x = a + 1$ のとき $y = a^2 - 1$
 $0 < a < \frac{1}{2}$ であるから $1 < a + 1 < \frac{3}{2}$
よって、関数は $a \leq x \leq 1$ で減少し、 $1 \leq x \leq a + 1$ で増加する。
 $x = a$ 、 $a + 1$ における y の値を比較して
 $x = a$ で最大値 $a^2 - 2a$
 $x = 1$ で最小値 -1



2 【出題のねらい】

- (1) 余弦定理、正弦定理を用いて計算できるか。

(2) ①四角形を 2 つの三角形に分け、それぞれの三角形において余弦定理を用いて計算できるか。

②余弦定理を用いて計算できるか。

③三角形の面積を求める公式を使って計算できるか。
- (1) $\triangle ABC$ において、 $b = 2, c = 1 + \sqrt{3}, A = 30^\circ$ のとき、 B の値を求めなさい。

余弦定理より、 $a^2 = 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cos 30^\circ$
 $a > 0$ であるから $a = \sqrt{2}$

正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

よって $\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin B}$ より、 $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ここで、 $b < c \Leftrightarrow B < C$ となり、 $B = 45^\circ$
- (2) 円に内接する四角形 ABCD において、
 $AB = 3, BC = 1, CD = 3, DA = 4$ とするとき、次の値を求めよ。

- ① A
- ② 対角線 BD の長さ
- ③ 四角形 ABCD の面積

- ① $BD = x$ とする。 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用して
 $x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos A$ ……ア
- 四角形 ABCD は円に内接するから $C = 180^\circ - A$
 $\triangle BCD$ に余弦定理を適用して
 $x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos(180^\circ - A)$
 $= 1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos A$ ……イ
- ア、イから $25 - 24 \cos A = 10 + 6 \cos A$
よって $\cos A = \frac{1}{2}$ したがって $A = 60^\circ$
- ② アより $x^2 = 9 + 16 - 24 \cos 60^\circ = 13$
 $x > 0$ であるから $x = \sqrt{13}$ よって $BD = \sqrt{13}$
- ③ $A = 60^\circ$ より $C = 120^\circ$
四角形 ABCD の面積を S とすると
 $S = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \sin 120^\circ$
 $= \frac{12\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

3 【出題のねらい】

- (1) 各位が奇数のときと偶数のときで場合分けすることができるか。

(2) 千の位の数、百の位の数で場合分けすることができるか。

(3) ①条件通りに、板を敷き詰めるイメージを持つことができるか。

②①をもとに、場合分けすることができるか。
- (1) 2 桁の自然数のうち、各位の数字の和が奇数になる自然数はいくつあるか求めなさい。

各位の数字の和が奇数になるのは、次の [1], [2] のいずれかの場合であり、この 2 つの場合は同時には起こらない。

[1] 十の位が奇数、一の位が偶数 その場合の数は、積の法則により $5 \times 5 = 25$

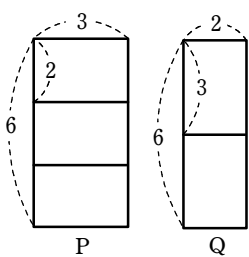
[2] 十の位が 0 以外の偶数、一の位が奇数
その場合の数は、積の法則により $4 \times 5 = 20$
よって、求める場合の数は、和の法則により
 $25 + 20 = 45$ 図 45 個
- (2) 5 個の数字 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 4 個の数字を使って 4 桁の整数を作るとき、2400 より大きい整数はいくつあるか求めなさい。

[1] $3\square\square\square$ または $4\square\square\square$ または $5\square\square\square$ の場合
 $\square$ の中に、千の位に使っていない残りの 4 個の数字から 3 個を取って並べるから $3 \times {}_4P_3 = 3 \times 24 = 72$ (個)

[2] $24\square\square$ または $25\square\square$ の場合
 $\square$ の中に、千の位と百の位に使っていない残りの 3 個の数字から 2 個を取って並べるから $2 \times {}_3P_2 = 2 \times 6 = 12$ (個)
よって、求める個数は $72 + 12 = 84$ (個)
- (3) 右図のような縦 a m、横 b m の長方形の部屋 ABCD に 2 辺が 2 m、3 m の長方形の板をすき間なく、また、板が互いに重なり合うことのないように敷き詰めたい。次の各場合の、板の敷き詰め方の総数を求めなさい。

① $a = 6, b = 7$ のとき ② $a = 6, b = 18$ のとき
-

① $a=6$ であるから、右図の P、Q 2 つのパターンを組み合わせで敷き詰めればよい。東西方向の長さについて考えると $b=7$ であるから、 x, y の方程式 $3x+2y=7$ を満たす 0 以上の整数の解 $(x, y)=(1, 2)$ を求めて、板の敷き詰め方の総数は $\frac{3!}{2!}=3$ (通り)



② ①と同様に考えると、 $b=18$ であるから、 x, y の方程式 $3x+2y=18$ を満たす 0 以上の整数の解は $(x, y)=(6, 0), (4, 3), (2, 6), (0, 9)$ である。よって、板の敷き詰め方は $(x, y)=(6, 0)$ のとき 1 通り $(x, y)=(4, 3)$ のとき $\frac{7!}{4!3!}=35$ (通り) $(x, y)=(2, 6)$ のとき $\frac{8!}{2!6!}=28$ (通り) $(x, y)=(0, 9)$ のとき 1 通り
ゆえに、板の敷き詰め方の総数は $1+35+28+1=65$ (通り)

4 【出題のねらい】

- (1)① 3 人でじゃんけんをするときに、特定の 1 人が勝つ確率を求めることができるか。
② 3 人でじゃんけんをするときに、あいこになる確率を求めることができるか。
(2) 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、出る目の最大値が 4 である確率を求めることができるか。
(3) 与えられた条件から、指定された通りに立式できるか。

- (1) A、B、C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき、次の確率を求めなさい。
① A だけが勝つ確率
② だれも勝たない確率

手の出し方の総数は 3^3 通りである。

① A がグーを出して勝つのは、B、C がともにチョキを出す 1 通り。A がチョキ、パーを出して勝つのも、それぞれ 1 通りで、A だけが勝つのは 3 通り。よって、求める確率は $\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}$

② あいこになる場合は、3 人が同じ手を出す 3 通りと、3 人の手がすべて異なる場合の 6 通りの合計で、9 通りある。
よって、求める確率は $\frac{9}{3^3}=\frac{1}{3}$

- (2) 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、出る目の最大値が 4 である確率を求めなさい。

出る目の最大値が 4 以下である確率は、

出る目がすべて 4 以下である確率で $\left(\frac{4}{6}\right)^3$

出る目の最大値が 3 以下である確率は、

出る目がすべて 3 以下である確率で $\left(\frac{3}{6}\right)^3$

よって、出る目の最大値が 4 である確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$

- (3) 赤玉と白玉が合わせて 10 個入った袋がある。この袋の中から玉を 3 個同時に取り出すとき、赤玉が出ない確率が $\frac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか求めなさい。

白玉が n 個入っているとする。 ($1 \leq n \leq 10$)

起こりうる場合の総数は ${}_{10}C_3$ 通り

赤玉が出ない場合は、白玉を 3 個取り出す場合であるから、その総数は ${}_nC_3$ 通り

よって $\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{10}$

ゆえに $\frac{n(n-1)(n-2)}{10 \cdot 9 \cdot 8}=\frac{7}{10}$

したがって $n(n-1)(n-2)=9 \cdot 8 \cdot 7$

$1 \leq n \leq 10$ である自然数のうち、この等式を満たすものは $n=9$ によって、白玉は 9 個入っている。