

1 次の各問いに答えなさい。

(1) $(x^2-3xy-2y^2)(x-y)(x-2y)$ を展開しなさい。

(2) $2x^2+xy-y^2+5x+2y+3$ を因数分解しなさい。

$x=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$y=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

のとき、次の式の値を求めなさい。

$(ア) x^2+y^2$

$(イ) x^3+y^3$

(4) 方程式 $|2x-3|=5$ を解きなさい。

(5) t を定数とする。2次方程式 $x^2+4x+t-5=0$ の実数解の個数は t の値によってどのように変わるか調べなさい。

(6) 2次方程式 $x^2+(m+1)x+2(m-1)=0$ の1つの解が m であるとき、定数 m の値を求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 因数を適当に組み合わせて展開するなど、工夫して式の計算を行うことができるか。

(2) x (または y) の2次3項式とみて、たすき掛けによる因数分解ができるか。

(3) 分母を有理化し、根号を含む式の計算ができるか。
また、基本対称式 $x+y$ 、 xy の値を求め、 x^2+y^2 、 x^3+y^3 が対称式であることに着目し、これらの対称式を $x+y$ 、 xy で表す変形
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 、 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
によって値を求めることができるか。

(4) 絶対値を含む方程式を解くことができるか。

(5) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と判別式 $D=b^2-4ac=0$ の符号の関係を理解しているか。

(6) 2次方程式の解が与えられたときに、係数を決定できるか。

<解答・解説>

(1) (与式)
$$\begin{aligned}&=(x^2-3xy-2y^2)(x^2-3x+2y^2)\\&=(x^2-3xy)^2-(2y^2)^2\\&=x^4-6x^3y+9x^2y^2-4y^4\end{aligned}$$

(2) (与式)
$$\begin{aligned}&=2x^2+(y+5)x-(y^2-2y-3)\\&=2x^2+(y+5)x-(y-3)(y+1)\\&=\{2x-(y-3)\}\{x+(y+1)\}\\&=(2x-y+3)(x+y+1)\end{aligned}$$

(3) $x+y=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})+2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$
$$=\frac{4\sqrt{7}}{2}=2\sqrt{7}$$

$$xy=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{4}{2}=2$$

(ア) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{7})^2-2\cdot 2=24$

(イ) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$$=(2\sqrt{7})^3-3\cdot 2\cdot 2\sqrt{7}$$
$$=56\sqrt{7}-12\sqrt{7}=44\sqrt{7}$$

(4) $|2x-3|=5$ から $2x-3=\pm 5$
これを解いて、 $x=-1, 4$

別解
[1] $2x-3\geq 0$ すなわち $x\geq \frac{3}{2}$ のとき
$$2x-3=5 \quad \text{これを解いて} \quad x=4 \quad (x\geq \frac{3}{2} \text{ を満たす})$$

[2] $2x-3<0$ すなわち $x<\frac{3}{2}$ のとき
$$-(2x-3)=5 \quad \text{これを解いて} \quad x=-1 \quad (x<\frac{3}{2} \text{ を満たす})$$

[1], [2] より $x=-1, 4$

(5) 2次方程式 $x^2+4x+t-5=0$ の判別式を D とすると
$$D=4^2-4(t-5)=36-4t$$
$$\begin{aligned}D>0 \quad &\text{となるのは} \quad t<9 \\D=0 \quad &\text{となるのは} \quad t=9 \\D<0 \quad &\text{となるのは} \quad t>9\end{aligned}$$
よって、2次方程式の解の個数は
$$\begin{cases} t<9 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ t=9 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ t>9 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(6) m が与えられた方程式の解であるから
$$m^2+(m+1)m+2(m-1)=0$$

整理して $2m^2+3m-2=0$
すなわち $(2m-1)(m+2)=0$
これを解いて $m=-2, \frac{1}{2}$

2 ある売店でコンサートのチケットを売り始めたとき、すでに300人の行列があり、毎分8人の割合で人数が増えるものとする。発売窓口が1つのときは15分で行列がなくなるとき、次の問いに答えなさい。
(1) 1つの窓口で1分間に処理できる人数は何人が求めなさい。
(2) 3分以内に行列をなくそうとすると、最小限窓口はいくつ必要か求めなさい。

【出題のねらい】

(1) (2) 求めるものを文字で置き、数量関係を不等式で表すことができるか。

(2) (求める解は自然数であるという条件から) 解を検討することができるか。

<解答・解説>

(1) 1つの窓口で1分間に処理できる人数を x 人とする。
毎分8人の割合で人数が増え、窓口が1つのとき15分で行列はなくなるから
$$300+8\cdot 15=x\cdot 15$$
よって $x=28$ (人)

(2) 窓口の数を y とする。(1)の結果から1つの窓口では1分間に28人処理できるから
$$300+8\cdot 3\leq y\cdot 28\cdot 3$$
よって $y\geq \frac{27}{7}=3.8\cdots$
したがって、最小限窓口は4つ必要。

-1-

3 放物線 $C: y=2x^2+4kx-3k-1$ (k は定数) について、次の問いに答えなさい。

- (1) $k=2$ のとき、次のものを求めなさい。
 (ア) 頂点の座標
 (イ) $-3 < x < 1$ における値域
- (2) C を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動すると点 $(0, 5)$ を通るような定数 k の値を求めなさい。
- (3) 最小値が -10 となるような定数 k の値を求めなさい。
- (4) C が x 軸の正の部分と、異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) (ア) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ を平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ の形にし、2 次関数のグラフである放物線の頂点を求めることができるか。
 (イ) 定義域を制限した場合、開区間と閉区間を区別して値域を求めることができるか。
- (2) 曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向へ p , y 軸方向へ q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は $y-q=f(x-p)$ となることを利用して求める曲線の方程式を導くことができるか。
 (頂点の移動に着目して、求める曲線の方程式を導くことができるか。)
- (3) 定数 k が入った式を平方完成し、与えられた条件を満たす k の値を求めることができるか。
- (4) $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから、グラフをイメージして放物線と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件を考察し、定数 k の値の範囲を求めることができるか。

<解答・解説>

- (1) $k=2$ のとき放物線 C は

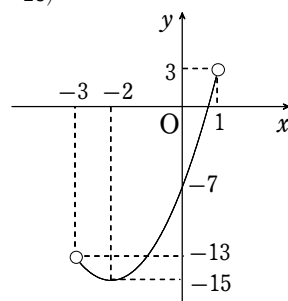
$$y=2x^2+8x-7$$
 となる。
 (ア) $2x^2+8x-7=2(x^2+4x)-7$

$$=2(x+2)^2-15$$
 よって $y=2(x+2)^2-15$
 したがって、頂点の座標は $(-2, -15)$

- (イ) 与えられた関数の式は

$$y=2(x+2)^2-15 \quad (-3 < x < 1)$$
 であり、そのグラフは右図の実線の部分である。
 よって、この関数の値域は

$$-15 \leq y < 3$$



- (2) 放物線 C の方程式 $y=2x^2+4kx-3k-1$ の
 x を $x-2$, y を $y+1$

で置き換えると

$$y+1=2(x-2)^2+4k(x-2)-3k-1$$

よって、 C を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式は

$$y=2x^2+4(k-2)x-11k+6$$

これが点 $(0, 5)$ を通るから

$$5=2 \cdot 0 + 4(k-2) \cdot 0 - 11k + 6$$

ゆえに $k = \frac{1}{11}$

【別解】 放物線 C の式を変形すると

$$y=2(x+k)^2-2k^2-3k-1$$

よって、頂点の座標は $(-k, -2k^2-3k-1)$ である。

C を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は $(-k+2, -2k^2-3k-2)$ であるからその放物線の方程式は

$$y=2\{x-(-k+2)\}^2-2k^2-3k-2$$

これが点 $(0, 5)$ を通るから

$$5=2(k-2)^2-2k^2-3k-2$$

ゆえに $k = \frac{1}{11}$

- (3) 放物線 C の式を変形すると

$$y=2(x+k)^2-2k^2-3k-1$$

よって、 C は

$$x=-k \text{ で最小値 } -2k^2-3k-1$$

をとる。最小値が -10 となるから

$$-2k^2-3k-1=-10$$

すなわち $(2k-3)(k+3)=0$

よって $k=-3, \frac{3}{2}$

- (4) 放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件は、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つことである。

[1] C と x 軸が異なる 2 点で交わるから $y=2x^2+4kx-3k-1$ の係数について

$$\begin{aligned} D &= (4k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3k-1) \\ &= 8(2k+1)(k+1) \end{aligned}$$

とすると $D > 0$ であるから

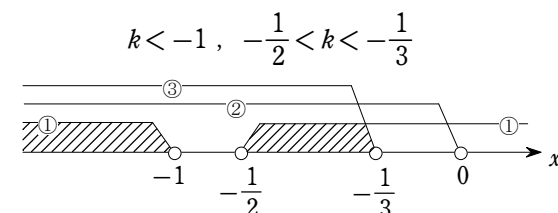
よって $k < -1, -\frac{1}{2} < k$ …… ①

[2] C の軸は直線 $x=-k$ で、この軸について
 $-k > 0$ すなわち $k < 0$ …… ②

[3] C は下に凸の放物線であるから、 y 軸との交点の
 y 座標 $-3k-1$ について $-3k-1 > 0$

よって $k < -\frac{1}{3}$ …… ③

①, ②, ③ の共通範囲を求めて



- 4 2 つの不等式 $6x^2+x-2 > 0$ … ①, $x^2-(p-3)x-3p < 0$ … ② について、次の問いに答えなさい。

- (1) 不等式 ① を解きなさい。
- (2) $p > -3$ のとき、
 (ア) 不等式 ② を解きなさい。
 (イ) 2 つの不等式を同時に満たす整数 x がちょうど 2 個となるような定数 p の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) 2 次不等式を解くことができるか。
- (2) (ア) p の条件から解を検討し、2 次不等式を解くことができるか。
 (イ) 2 つの不等式を満たす x の範囲に含まれる整数解を判別し、 p のとりうる値の範囲を求めることができるか。

<解答・解説>

- (1) 2 次方程式 $6x^2+x-2=0$ を解くと $x=-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

よって、不等式 ① の解は

$$x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x$$

- (2) 2 次方程式 $x^2-(p-3)x-3p=0$ を変形して
 $(x-p)(x+3)=0$

よって、その解は

$$x=p, -3$$

となる。

(ア) $p > -3$ であるから不等式②の解は
 $-3 < x < p$

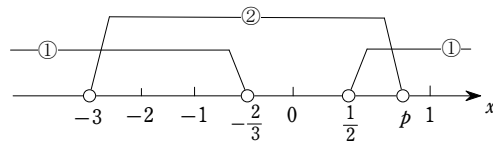
(イ) 不等式①の解 $x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x \dots\dots ①$

不等式②の解 $-3 < x < p \dots\dots ②$ とすると

①と②の共通範囲に整数が2個入るような p の値の範囲を考えればよい。

右図より

$$-1 < p \leq 1$$



【参考】 p のとりうる値の範囲の端点について

[1] $p = -1$ のとき

不等式②の解は $-3 < x < -1$ であり、不等式①の解との共通範囲に含まれる整数は -2 だけとなり題意を満たさない。よって、 $p = -1$ は不適。

[2] $p = 1$ のとき

不等式②の解は $-3 < x < 1$ であり、不等式①の解との共通範囲に含まれる整数は $-2, -1$ となり題意を満たす。よって、 $p = 1$ は適する。

【出題のねらい】

- (1) (ア) 三角比の定義を用いて直角三角形の辺の長さを求めることができるか。(辺の比を利用して、直角三角形の辺の長さを求めることができるか。)
- (イ) 三角比の定義に基づいて $\tan 15^\circ$ の値を求めることができるか。
- (2) (ア) 余弦定理を用いて三角形の辺の長さを求めることができるか。
- (イ) 円に内接する四角形の性質がわかるか。(向かい合う角の和が 180°) また、 $\triangle ACD$ が二等辺三角形であることに着目し、余弦定理を適用して辺 AC の長さを求めることができるか。(正弦定理を適用して辺 AC の長さを求めることができるか。)

<解答・解説>

(1) $AD = BD$ より $\triangle ABD$ は二等辺三角形である。

$$\angle BAD = \angle ABD = 15^\circ \text{ (底角)}$$

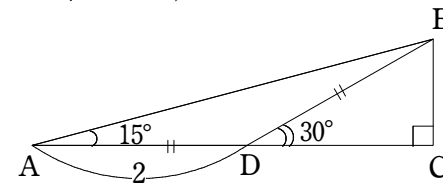
より

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 150^\circ$$

したがって $\triangle BCD$ は

$$\angle BDC = 30^\circ, \angle CBD = 60^\circ$$

の直角三角形である。



(ア) $\triangle BCD$ において $BD = 2$ であるから

$$\text{三角比の定義より } \cos 30^\circ = \frac{CD}{BD}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } CD &= BD \cos 30^\circ \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

【別解】 $\triangle BCD$ は $C = 90^\circ$, $\angle DBC = 60^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$ の直角三角形であるから辺の比は

$$BD : CD = 2 : \sqrt{3}$$

$$\text{よって } CD = \frac{\sqrt{3} BD}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(イ) (ア) と同様に $\triangle BCD$ において $\sin 30^\circ = \frac{BC}{BD}$ より

$$BC = BD \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

よって、直角三角形 ABC において

$$\tan 15^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$$

(2) (ア) $\triangle ABC$ において余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 60^\circ \\ &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$

$AC > 0$ であるから $AC = 7$

(イ) 四角形 $ABCD$ は円に内接するから

$$D = 180^\circ - B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

よって、 $AD = CD = x$ として $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

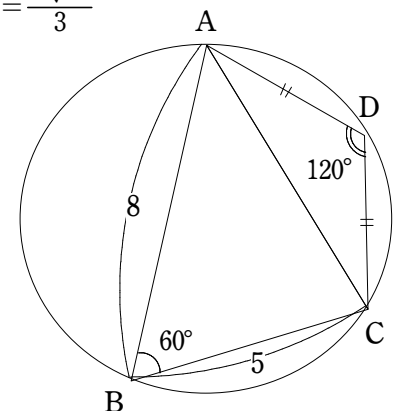
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cos 120^\circ$$

$$\text{から } 49 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ゆえに } x^2 = \frac{49}{3}$$

$$x > 0 \text{ であるから } x = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{すなわち } AD = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



【別解】 四角形 $ABCD$ は円に内接するから

$$D = 180^\circ - B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

また、 $\triangle ACD$ は二等辺三角形であるから底角は等しい。

$$\text{ゆえに } \angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$$

よって、 $AD = x$ として $\triangle ACD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}$$

$$\text{したがって、} x = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \times \sin 30^\circ$$

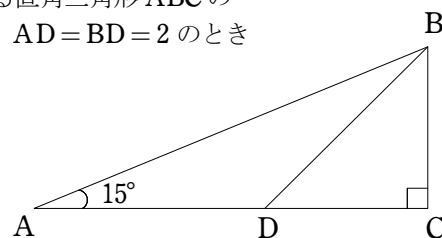
$$= 7 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

【図形と計量】 次の各問いに答えなさい。

(1) $A = 15^\circ$, $C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC の辺 AC 上に点 D をとる。 $AD = BD = 2$ のとき次のものを求めなさい。

(ア) CD の長さ

(イ) $\tan 15^\circ$ の値



(2) $AB = 8$, $BC = 5$, $B = 60^\circ$ である $\triangle ABC$ がある。

$\triangle ABC$ の外接円の周上に点 D を、直線 AC に関して点 B と反対側に $AD = CD$ となるようにとるとき、次のものを求めなさい。

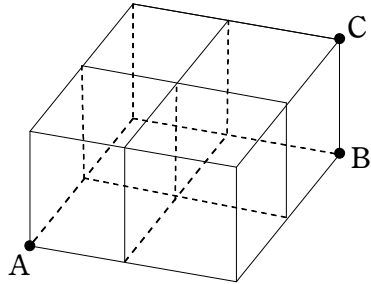
(ア) 辺 AC の長さ

(イ) 線分 AD の長さ

6 【場合の数】 次の各問いに答えなさい。

- (1) 10名の高校生を次のように分ける方法を求めなさい。
 (ア) 5名、3名、2名の3つのグループに分ける
 (イ) 4名、3名、3名の3つのグループに分ける

- (2) 右図のような同じ大きさの4つの立方体からなる立体図形がある。
 点Aから指定された点まで立方体の辺に沿って最短距離で行く経路について考えると、次の問いに答えなさい。
 (ア) 点Aから点Bへの経路は何通りあるか求めなさい。
 (イ) 点Aから点Cへの経路は何通りあるか求めなさい。



【出題のねらい】

- (1) (ア) (イ) 組分けするとき、組を区別するかどうか理解しているか。
 (ア) 3組は人数が違うため、組を区別して場合の数を求めることができるか。
 (イ) 2つの3名の組には区別がつかないことに着目して、場合の数を求めることができるか。
 (2) (ア) 点Aから点Bへの最短経路は x が2個、 y が2個の順列で表され、「同じものを含む順列」に帰着させて順列の総数を求めることができるか。
 (イ) 点Aから点Cへの最短経路は x が2個、 y が2個、 z が1個の順列で表され、「同じものを含む順列」に帰着させて順列の総数を求めることができるか。

<解答・解説>

- (1) (ア) 10名から5名の生徒を選ぶ方法は ${}_{10}C_5$ 通り
 次に、残りの5名から3名を選ぶ方法は ${}_5C_3$ 通り
 残りの2名は1通りに定まるから、求める方法の総数は
 ${}_{10}C_5 \times {}_5C_3 \times 1 = 252 \times 10 = 2520$ (通り)
 (イ) 4名、3名、3名のグループを、それぞれA、B、Cとすると、
 A、B、Cに分ける方法は
 ${}_{10}C_4 \times {}_6C_3 \times 1 = 210 \times 20 = 4200$
 B、Cの区別をなくすと、同じものが2!通りずつできるから
 $4200 \div 2! = 2100$ (通り)

- (2) 右図のように立方体の各辺に沿って進む方法を x 、 y 、 z とする。

(ア) AからBへの最短経路は

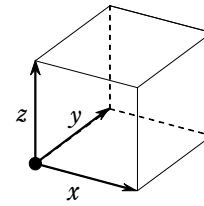
x が2個、 y が2個
 の順列に等しいから

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

(イ) AからCへの最短経路は

x が2個、 y が2個、 z が1個
 の順列に等しいから

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30 \text{ (通り)}$$



7 【確率】 次の各問いに答えなさい。また、答えは既約分数で表しなさい。

- (1) M、O、N、D、A、Iが1個ずつ書かれたカードが6枚ある。
 これら全部を横一列に並べるとき、次の確率を求めなさい。

(ア) A、I、Oが続いて並ぶ確率

(イ) A、I、Oがこの順番で並ぶ確率

- (2) 15本のくじの中に n 本の当たりくじがある。この中から2本を同時に引くとき、次の問いに答えなさい。

(ア) $n=3$ のとき、少なくとも1本が当たる確率を求めなさい。

(イ) 少なくとも1本が当たる確率が $\frac{4}{7}$ となるような n の値を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) (ア) 事象A(3文字が続いて並ぶ)の起こる場合の数を求め、事象Aの起こる確率を求めることができるか。
 (イ) 順序が定まった順列は、順序の定まったものを同じものとしてみることで場合の数を求めることができる。そのことを利用して事象の起こる確率を求めることができるか。
 (2) (ア) 少なくとも1本が当たる確率の余事象を考え、求めることができるか。
 (イ) 与えられた確率を方程式で表すことができるか。
 n のとりうる値を検討して、解を導くことができるか。

<解答・解説>

(1) 6枚のカードを1列に並べる方法は 6! (通り)

(ア) A、I、Oをまとめて1枚とみなしてカードを並べる方法は
 4! (通り)

そのおのおのに対して、A、I、Oの並び方は
 3! (通り)

ゆえに、求める並べ方の総数は 4!×3! (通り)
 したがって、求める確率は

$$\frac{4! \times 3!}{6!} = \frac{1}{5}$$

(イ) A、I、Oが同じ記号△だと考えると、
 6枚のカードM、N、D、△、△、△の並び方は

$$\frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$$

それぞれ並べ方について3か所の△を順にA、I、Oに置き換えればよい。したがって、A、I、Oがこの順番となる並び方は120通り。ゆえに、求める確率は

$$\frac{120}{6!} = \frac{1}{6}$$

(2) 15本のくじから2本引く方法は ${}_{15}C_2$ (通り)

(ア) 2本ともはずれる確率は $\frac{{}_{12}C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{22}{35}$

少なくとも1本が当たる事象は2本ともはずれる事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{22}{35} = \frac{13}{35}$$

(イ) 2本ともはずれる確率は $\frac{{}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_2}$ ($0 \leq n \leq 15$)

少なくとも1本が当たる事象は2本ともはずれる事象の余事象であるから、その確率は $1 - \frac{{}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_2}$ となり、これが $\frac{4}{7}$ に

等しいから $1 - \frac{{}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{4}{7}$

すなわち $\frac{{}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{3}{7}$

ゆえに $\frac{(15-n)(14-n)}{15 \cdot 14} = \frac{3}{7}$

分母を払って整理すると $n^2 - 29n + 120 = 0$

左辺を因数分解して $(n-24)(n-5) = 0$

n は、 $0 \leq n \leq 15$ を満たす整数であるから $n=5$