

< 必須問題 >

1

- (1) 解の公式を使うことができるか。

$x^2 - 6x + 7 = 0$ において 解の公式より

$$x = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \times 7} = 3 \pm \sqrt{2}$$

解の公式

$ax^2 + 2bx' + c = 0$ のとき

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

- (2) 題意を読み取り、式を立てて計算できるか。

ある式を A とおくと、題意より $x^2 + 3y^2 - 2xy + A = 5xy$

よって $A = 5xy - (x^2 + 3y^2 - 2xy) = -x^2 - 3y^2 + 7xy$

- (3) 展開できるか。

$$\begin{aligned} (a + 2b - c)^2 &= a^2 + (2b)^2 + (-c)^2 + 2a(2b) + 2(2b)(-c) + 2(-c)a \\ &= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 4bc - 2ca \end{aligned}$$

- (4) ある文字に着目して因数分解できるか。

$$\begin{aligned} \text{① } a^2 - b^2 - a - 5b - 6 &= a^2 - a - (b^2 + 5b + 6) \\ &= a^2 - a - (b + 2)(b + 3) = (a + b + 2)(a - b - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } (a - 1)(b - 1)(ab + 1) + ab &= (ab - a - b + 1)(ab + 1) + ab \\ &= ((ab + 1) - (a + b))(ab + 1) + ab \\ &= (ab + 1)^2 - (a + b)(ab + 1) + ab = (ab - a + 1)(ab - b + 1) \end{aligned}$$

- (5) 循環小数を既約分数に直し、計算できるか。既約分数を循環小数に直すことができるか。

$$\begin{array}{r} x = 1.\dot{3}\dot{7} \text{ とおく。} \quad 100x = 137.373737\cdots \\ - \quad x = 1.373737\cdots \\ \hline 99x = 136 \end{array} \quad \therefore x = \frac{136}{99}$$

$$\begin{array}{r} y = 1.\dot{5} \text{ とおく。} \quad 10y = 15.5555\cdots \\ - \quad y = 1.55555\cdots \\ \hline 9y = 14 \end{array} \quad \therefore y = \frac{14}{9}$$

$$1.\dot{3}\dot{7} + 1.\dot{5} = \frac{136}{99} + \frac{14}{9} = \frac{290}{99} \quad \text{よって } 290 \div 99 = 2.929292\cdots = 2.\dot{9}\dot{2}$$

- (6) 平方根の性質を理解し、計算できるか。

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 \text{ のとき,} \\ \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{9x^2 - 18x + 9} &= \sqrt{(x + 2)^2} - \sqrt{9(x - 1)^2} \\ &= |x + 2| - 3|x - 1| = (x + 2) - 3(-x + 1) = 4x - 1 \end{aligned}$$

- (7) 分母を有理化して計算できるか。

$$\begin{aligned} \text{① } \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} + \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ &\quad + \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{9} - \sqrt{7})}{(\sqrt{9} + \sqrt{7})(\sqrt{9} - \sqrt{7})} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \frac{\sqrt{2}}{4 + \sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{2}(4 - \sqrt{6})}{(4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})} - \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{6})}{(1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6})} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{10} - \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{-5} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

- (8) 式の値を求める際、工夫して計算できるか。

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ なので } 2x - 3 = \sqrt{5} \\ (2x - 3)^2 &= 5 \quad \text{だから } 4x^2 - 12x + 4 = 0 \\ \text{よって } x^2 - 3x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

- (9) 題意を読み取り、式を立て、計算できるか。

Aさんの持っているペンの本数を x 本とおく。

Bさんの持っているペンの本数は $(50 - x)$ 本である。

AさんがBさんに自分が持っているペンのちょうど $\frac{1}{3}$ をあげてもまだAさんの

方が多いので、 $\frac{2}{3}x > (50 - x) + \frac{1}{3}x$ …… ①

さらに2本あげるとBさんの方が多くなるので

$$\frac{2}{3}x - 2 < (50 - x) + \frac{1}{3}x + 2 \quad \text{…… ②}$$

$$\text{①, ②より } \frac{75}{2} < x < \frac{81}{2} \quad \text{だから } x = 38, 39, 40$$

「ちょうど $\frac{1}{3}$ をあげる」ことができるので、 x は3の倍数だから $x = 39$

よって、Aさんの持っているペンの本数は39本である。

- (10) 絶対値を含む計算ができる。

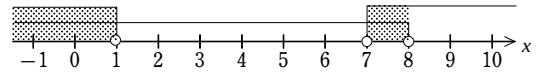
$$\left| 3 - \frac{1}{2}x \right| = 1 \text{ なので } 3 - \frac{1}{2}x = \pm 1 \quad \therefore x = 2(3 \pm 1) = 4, 8$$

- (11) 絶対値を含む計算ができるか。連立不等式が解けるか。

$$\begin{cases} |x - 4| > 3 & \cdots \cdots \text{①} \\ 2(1 - x) > -6 - x & \cdots \cdots \text{②} \end{cases} \text{ とする。}$$

①について $x - 4 < -3, 3 < x - 4$ だから $x < 1, 7 < x$

②について 整理すると $8 > x$ (下図を参考に) よって $x < 1, 7 < x < 8$



- (12) 小数、分数を含んだ不等式の計算ができるか。

$$\text{不等式 } 6.4 - 0.2x < 3x < 7 - \frac{1 - 4x}{3} \text{ を } \begin{cases} 6.4 - 0.2x < 3x & \cdots \cdots \text{①} \\ 3x < 7 - \frac{1 - 4x}{3} & \cdots \cdots \text{②} \end{cases} \text{ と分ける。}$$

①について 両辺を10倍すると $64 - 2x < 30x \quad \therefore 2 < x$

②について 両辺を3倍すると $9x < 21 - (1 - 4x) \quad \therefore x < 4$

以上のことから $2 < x < 4$ である。

2 < 2次関数 >

- (1) ① 記号を理解し、代入できるか。② 平方完成して頂点を求められるか。
③ 「グラフが x 軸に接する」 $\Leftrightarrow$ 「頂点が x 軸上にある」が理解できるか。
④ 頂点の座標を利用して平行移動ができるか。

① $f(x) = x^2 - 2ax + 2a - 1$ なので

$$f(4) = 4^2 - 2a \times 4 + 2a - 1 = -6a + 15 > 0 \quad \text{よって } a < \frac{5}{2}$$

② 平方完成すると $f(x) = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$

よって、頂点の座標は $(a, -a^2 + 2a - 1)$

③ 「グラフが x 軸に接する」 $\Leftrightarrow$ 「頂点が x 軸上にある」

つまり、頂点の y 座標が0になればいい。 $-a^2 + 2a - 1 = 0$

$$-(a - 1)^2 = 0 \quad \text{よって } a = 1$$

④ $y = f(x)$ のグラフの頂点は ②より $(a, -a^2 + 2a - 1)$

$y = x^2 - 10x + b = (x - 5)^2 + b - 25$ のグラフの頂点は $(5, b - 25)$

いま、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に4、 y 軸方向に-3だけ平行移動すると

$y = x^2 - 10x + b$ のグラフに重なるから

$$a + 4 = 5, \quad (-a^2 + 2a - 1) - 3 = b - 25 \quad \text{よって } a = 1, \quad b = 22$$

- (2) グラフから最大値、最小値を読み取ることができるか。

2次関数の式を平方完成すると $y = (x - 1)^2 + 3$

定義域 $-1 \leq x \leq k + 1$ に頂点は含まれている。

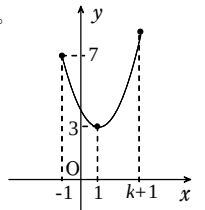
① グラフより 最小値3なので、 $m = 3$

② ①より $m = 3$ だから $M = 3 + 5 = 8$

グラフより 右端が最大値となることが分かる。

$$x = k + 1 \text{ のとき 最大値 } (k + 1)^2 - 2(k + 1) + 4 = 8$$

$$k^2 + 3 = 8 \quad k > 0 \text{ なので } k = \sqrt{5}$$



3 < 場合の数 >

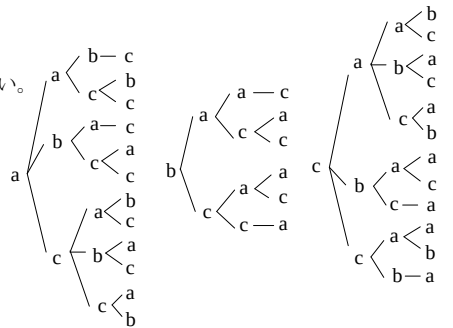
- (1) 数え上げができるか。

樹形図を作成して数え上げるとよい。

① 並び方は全部で 30通り

② a, b, c のすべての文字が

現れる並び方は 24通り



- (2) 補集合の考えを利用できるか。

目の出る場合の数の総数は $6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)

目の積が偶数にならない場合を考えると「3つとも奇数になる場合」だから

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ (通り)}$$

よって目の積が偶数になる場合の数は $216 - 27 = 189$ (通り)

- (3) 順列を用いて考えることができるか。

部員を n 人として ${}_nP_2 = n(n - 1) = 90$ よって $n^2 - n - 90 = 0$

したがって $(n - 10)(n + 9) = 0$ $n > 0$ より $n = 10$ よって 部員は10名

- (4) ①順列、②組合せを利用して考えることができるか。

① A, B 2名1組と生徒4名の並び方は 5! (通り)

A, Bの並び方は 2! (通り) よって求める並び方は $5! \times 2! = 240$ (通り)

② X, X, a, b, c, d を1列に並べ、2名のXは左からA, Bとすればよい。

$${}_6C_2 \times 4! = 15 \times 24 = 360 \text{ (通り)}$$

別解 ー 同じものを含む順列の考えー

先生2人の並び方は決まっているので、先生2人をXと表す(同じものと

$$\text{みなす) と その並び方は } \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ (通り)}$$