

1 【必須問題】 次の各問に答えなさい。

- (1) $(-3x^2y) \times (-2xy^2)^2$ を計算しなさい。
- (2) $(2x+3y)(2x-5y)$ を展開しなさい。
- (3) $(x+y+3)(x+y-3)$ を展開しなさい。
- (4) $2x^2-5x-3$ を因数分解しなさい。
- (5) $a^2+ab+bc-c^2$ を因数分解しなさい。
- (6) $|\sqrt{2}-2|$ の値を求めなさい。
- (7) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ の分母を有理化しなさい。
- (8) 1 次不等式 $3x+2 \geq 5x-4$ を解きなさい。
- (9) 連立不等式 $\begin{cases} 2x-3 > x-1 \\ 2x+5 > 3(x-1) \end{cases}$ を解きなさい。
- (10) 2 次方程式 $2x^2-5x+1=0$ を解きなさい。

【出題のねらい】

- (1) 指数の計算を行うことができるか。
- (2) 多項式の展開ができるか。
- (3) 同じ式を文字に置き換えることによって、多項式の展開ができるか。
- (4) たすき掛けを用いて因数分解をすることができるか。
- (5) 最低次数の文字に着目することによって、因数分解をすることができるか。
- (6) 絶対値の中の正負の符号を判断することによって、絶対値を外すことができるか。
- (7) 分母の有理化ができるか。
- (8) 1 次不等式が解けるか。
- (9) 1 次連立不等式が解けるか。
- (10) 解の公式を用いて、2 次方程式が解けるか。

【解答】

- (1) $(-3x^2y) \times (-2xy^2)^2 = (-3x^2y) \times (4x^2y^4) = -12x^4y^5$
- (2) $(2x+3y)(2x-5y) = 4x^2 + (-10+6)xy - 15y^2 = 4x^2 - 4xy - 15y^2$

(3) $x+y=A$ とおくと、

$$(\text{余式}) = (A+3)(A-3) = A^2 - 9 = (x+y)^2 - 9 = x^2 + 2xy + y^2 - 9$$

(4) $2x^2-5x-3 = (2x+1)(x-3)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \times \quad 1 \rightarrow 1 \\ 1 \quad \times \quad -3 \rightarrow -6 \\ \hline -5 \end{array}$$

(5) a について 2 次式、 b について 1 次式、 c について 2 次式より、最低次数の文字 b でくくると、

$$\begin{aligned} (a+c)b + (a^2-c^2) &= (a+c)b + (a+c)(a-c) \\ &= (a+c)\{b + (a-c)\} \\ &= (a+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

(6) $\sqrt{2}-2 < 0$ より、 $|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{1 \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

(8) $3x+2 \geq 5x-4$ から、 $3x-5x \geq -4-2$ より $-2x \geq -6$

-2 で両辺を割ると、 $x \leq 3$

(9) $\begin{cases} 2x-3 > x-1 \\ 2x+5 > 3(x-1) \end{cases}$

とすると、 $2x-3 > x-1$ から $x > 2$ …①、
 $2x+5 > 3(x-1)$ より $2x+5 > 3x-3$ から $x < 8$ …②
①と②の共通範囲を求めて、 $2 < x < 8$

(10) $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$

2 【必須問題】 次の各問に答えなさい。

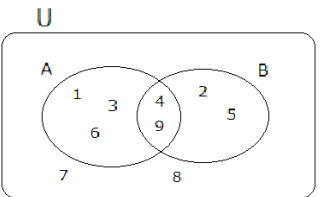
- (1) 15 の正の約数全体の集合を、要素を書き並べて表しなさい。
- (2) 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする。 U の部分集合 $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ 、 $B = \{2, 4, 5, 9\}$ について、次の集合を求めなさい。
- (ア) $\bar{A}$ (イ) $A \cap B$ (ウ) $A \cup B$ (エ) $\bar{A} \cap \bar{B}$
- (3) 次の条件 p, q について、 p は q であるための「必要条件」、「十分条件」、「必要十分条件」、「必要条件でも十分条件でもない」のうち、最も適するものを答えなさい。
- (ア) $p: |x|=3$ $q: x=3$
- (イ) p : 平行四辺形 ABCD q : 四角形 ABCD
- (4) 次の命題「 $x^2 \neq 25 \Rightarrow x \neq 5$ 」の対偶を述べ、その真偽を調べなさい。

【出題のねらい】

- (1) 要素を書き並べて集合を表すことができるか。
- (2) 補集合、共通部分、和集合、ド・モルガンの法則が理解しているか。
- (3) 必要、十分、必要十分条件を理解しているか。
- (4) 元の命題と対偶の真偽が一致していることが理解しているか。

【解答】

- (1) $\{1, 3, 5, 15\}$
- (2)



(ア) A の補集合 $\bar{A} = \{2, 5, 7, 8\}$

(イ) A と B の共通部分 $A \cap B = \{4, 9\}$

(ウ) A と B の和集合 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

(エ) ド・モルガンの法則より $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ だから、 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 8\}$

(3) (ア) $|x|=3$ より, $x=\pm 3$ だから「 $p:|x|=3\Rightarrow q:x=3$ 」は偽であり,

「 $q:x=3\Rightarrow p:|x|=3$ 」は真である。よって, p は q であるため

の必要条件。

(イ)「 p : 平行四辺形 ABCD $\Rightarrow$ q : 四角形 ABCD」は真であり,

「 q : 四角形 ABCD $\Rightarrow$ p : 平行四辺形 ABCD」は偽である。

よって, p は q であるための十分条件。

(4) 命題「 $x^2\neq 25\Rightarrow x\neq 5$ 」の対偶は,「 $x=5\Rightarrow x^2=25$ 」であり,

その命題の対偶は真である。

3 【必須問題】 次の各問いに答えなさい。

(1) (ア) 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフの頂点を求めなさい。

(イ) 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ ($-1\leq x\leq 2$) の最大値と最小値を求めなさい。

(ウ) 2 次関数 $y=x^2-2x-3$ と x 軸との共有点の座標を求めなさい。

(エ) 2 次不等式 $x^2-2x+3<0$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $x^2-3x+m=0$ が実数解をもたないとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。

【出題のねらい】

(1) (ア) 右辺を平方完成して頂点の座標を求めることができるか。

(イ) 定義域が与えられているとき, 2 次関数の最大値と最小値を求めることができるか。

(ウ) 2 次関数のグラフと x 軸との交点の座標を求めることができるか。

(エ) (ウ) で求めたグラフと x 軸との交点の座標を利用して 2 次不等式を解くことができるか。

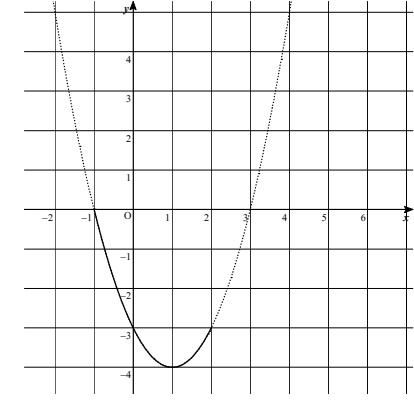
(2) 判別式を用いて, 2 次方程式が実数解を持たないための m の値の範囲を求めることができるか。

【解答】

(1) (ア) $y=x^2-2x-3=x^2-2x+1-1-3=(x-1)^2-4$ より,

頂点の座標は (1,-4)

(イ) この関数のグラフは, 下の図の実線部分である。



よって, $x=-1$ で最大値 0 , $x=1$ で最小値 -4 をとる。

(ウ) $x^2-2x-3=0$ とすると,
 $(x-3)(x+1)=0$ より, $x=3,-1$

よって, x 軸との共有点の座標は $(-1,0), (3,0)$ 。

(エ) $x^2-2x-3=(x-1)^2+2>0$ であるから, 2 次不等式の解はない。

(2) この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot m=9-4m$$

2 次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$9-4m<0$$

これを解いて $m>\frac{9}{4}$

4 【選択問題】

(1) 右の図の三角形ABCにおいて、 $\sin A, \tan A$ の値をそれぞれ求めなさい。

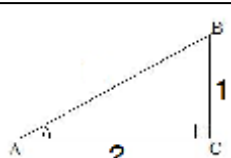
(2) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ のとき、 $\sin \theta, \tan \theta$ の値を求めなさい。

ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(3) $\triangle ABC$ において、 $A = 45^\circ, B = 30^\circ, b = \sqrt{3}$ のとき、BC を求めなさい。

(4) $\triangle ABC$ において、 $b = 3, c = \sqrt{2}, A = 135^\circ$ のとき、BC を求めなさい。

(5) $\triangle ABC$ において、 $b = 8, c = 7, A = 60^\circ$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい。



【出題のねらい】

- (1) 三平方の定義を用いて、辺 AB の長さを求め、三角比の定義に基づいて三角比の値を求めることができるか。
- (2) 三角比の相互関係を用いて、他の三角比の値を求めることができるか。
- (3) 正弦定理を用いて、辺の長さを求めることができるか。
- (4) 余弦定理を用いて、辺の長さを求めることができるか。
- (5) 面積の公式を用いて、三角形の面積を求めることができるか。

【解答】

(1) 三平方の定理より $AB^2 = 1^2 + 2^2$ 、 $AB > 0$ より、 $AB = \sqrt{5}$

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{また、} \tan A = \frac{1}{2}$$

(2) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ より、 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である。

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ より、} \sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また、} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(3) 正弦定理より、 $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$

$$BC = \sqrt{3} \div \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

(4) 余弦定理より、

$$BC^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ = 9 + 2 - 6\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 17$$

$$BC > 0 \text{ だから、} BC = \sqrt{17}$$

(5) $\triangle ABC$ の面積 $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 60^\circ = 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

5 【選択問題】

(1) 1 から 100 までの自然数のうち、以下のような数の個数を求めなさい。

(ア) 3 で割り切れる数

(イ) 3 または 4 で割り切れる数

(2) 108 の正の約数はいくつあるか。

(3) 7 人の選手のうち、リレーの第 1 走者から第 3 走者までを決めるとき、3 人の走者の決め方は何通りあるか求めなさい。

(4) A, B, C, D, E の 5 人が円形のテーブルに座るとき、座り方は全部で何通りあるか求めなさい。

(5) 1 から 9 までの数を 1 ずつ書いたカード 9 枚の中から 5 枚のカードを選ぶとき、2 枚は偶数、3 枚は奇数であるようなカードの選び方は何通りあるか。

(6) 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から、3 個の玉を同時に取り出すとき、赤玉 1 個、白玉 2 個が出る確率を求めなさい。

(7) 1 つのサイコロを 5 回投げて、そのうち 3 の倍数の目が 2 回出る確率を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) ベン図を用いて、条件に合う集合の要素の個数を求めることができるか。
- (2) 素因数分解を利用して、約数の個数を求めることができるか。
- (3) 順列を理解しているか。
- (4) 円順列を理解しているか。
- (5) 積の法則と組み合わせを理解しているか。
- (6) 組み合わせの総数を用いた確率を求めることができるか。
- (7) 反復試行の確率を求めることができるか。

【解答】

(1) 100 以下の自然数全体の集合を U とする。 U の部分集合で、3 で割り切れる数の集合を A 、4 で割り切れる数の集合を B とすると、

$$A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33\}, \quad B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots, 4 \cdot 25\} \text{ となる。}$$

(ア) 3 で割り切れる数の個数を $n(A)$ とすると、

$$100 \div 3 = 33 \text{ あまり } 1 \text{ より } n(A) = 33$$

(イ) 3 または 4 で割り切れる数の集合は $A \cup B$ より、

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 25 - 8 = 50$$

(2) 108 を素因数分解すると、 $108 = 2^2 \times 3^3$ より、108 の正の約数は、 2^2 の正の約数の積と 3^3 の正の約数の積で表せる。 2^2 の正の約数の積は 3 個、 3^3 の正の約数の積は 4 個あるから、積の法則より $3 \times 4 = 12$ (個)

(3) 3 人の走者の決め方は、7 人から 3 人を選ぶ順列の総数に等しいから、 ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ (通り)

(4) 5 人の円形のテーブルの席への座り方は、5 人の円順列の総数に等しいから、 $(5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (通り)

(5) 1 から 9 までの数に、偶数のカードは 2, 4, 6, 8 の 4 枚、奇数のカードは 1, 3, 5, 7, 9 の 5 枚ある。偶数のカードの選び方は

$${}_4C_2 \text{ 通り、奇数のカードの選び方は } {}_5C_3 \text{ 通りだから、選び方の総数は}$$

$$\text{積の法則より、} {}_4C_2 \times {}_5C_3 = 6 \times 10 = 60 \text{ (通り)}$$

(6) 赤玉 4 個と白玉 5 個の全部で 9 個の玉から 3 個の取り出し方は ${}_9C_3$ 通り、赤玉 4 個から 1 個、白玉 5 個から 2 個を取る組み合わせは

$${}_4C_1 \times {}_5C_2 = 4 \times 10 = 40 \text{ 通り。よって、求める確率は}$$

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_2}{{}_9C_3} = \frac{4 \times 10}{84} = \frac{10}{21}$$

(7) 1 個のサイコロを投げて、3 の倍数の目が出る確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

サイコロを 5 回投げて 3 の倍数がちょうど 2 回出る確率は

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$