$\boxed{1}$ 解答

(1)　(与式)$\Rightarrow 3a^2b\times\dfrac{3}{4ab}\times(-8a^3)=-18a^4$

(2)　(与式)$\Rightarrow 3\sqrt{2}-3\times 2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(3)　(与式)$\Rightarrow\{(a+d)+(b+c)\}\{(a+d)-(b+c)\}=(a+d)^2-(b+c)^2$

$=(a^2+2ad+d^2)-(b^2+2bc+c^2)=a^2-b^2-c^2+d^2+2ad-2bc$

(4)　$3x^2-7xy-20y^2=(3x+5y)(x-4y)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & & -4 & \longrightarrow -12 \\ 3 & & 5 & \longrightarrow 5 \\ \hline 3 & & -20 & -7 \end{array}$$

(5)　$a-b=3+\sqrt{5}\cdots$①，$b-c=3-\sqrt{5}\cdots$② とする。

①＋②より　$a-c=6$　よって $c-a=-6$ を得る。

(与式)$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=\dfrac{1}{2}\{(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2+(-6)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(9+5)+(9+5)+36\}=32$

(6)　$a=0$ のとき，方程式は解 $x=0$ をとることは明らか。

$a\fallingdotseq 0$ のとき，(与式)$\Rightarrow(ax+1)(x-a)=0$　　ゆえに，解 $x=a$，$-\dfrac{1}{a}$

よって　$\begin{cases} a=0 \text{ のとき，} x=0 \\ a\fallingdotseq 0 \text{ のとき，} x=a,\ -\dfrac{1}{a} \end{cases}$

$$\begin{array}{cccc} a & & 1 & \longrightarrow 1 \\ 1 & & -a & \longrightarrow -a^2 \\ \hline a & & -a & 1-a^2 \end{array}$$

(7)　絶対値を外す。$x\geqq 2$ のとき，(与式)$\Rightarrow x-2>3x$ から　$x<-1$ を得るが，条件を満たさないので不適。また，$x<2$ のとき，(与式)$\Rightarrow -(x-2)>3x$

$x<\dfrac{1}{2}$ を得る。条件と合わせて，$x<\dfrac{1}{2}$ が答えである。

(8)　2次方程式 が重解を持つので，判別式 $D=0$ となればよい。

$m\fallingdotseq 0$ に注意して，$\dfrac{D}{4}=(-2m)^2-m(2m+4)=2m(m-2)=0$ より，$m=2$

また，重解 $x=\dfrac{-(-4m)}{2\times m}=2$ となり 今回は，m の値に無関係である。

(9)　(与式)$\Rightarrow(x-1)\{x-(a^2-2a)\}<0$ より，1 と(a^2-2a) との大小関係を考えても解けるが，今回は題意より　$0\leqq(a^2-2a)\leqq 2$ として考える。

$a^2-2a\geqq 0$ の解は　$a\leqq 0$，$2\leqq a\cdots$①

$a^2-2a\leqq 2$ の解は　$a^2-2a-2\leqq 0$ より　$1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 1+\sqrt{3}\cdots$②

よって ①，②の共通範囲をとると，$1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 0$，$2\leqq a\leqq 1+\sqrt{3}$

【出題のねらい】

(5) 対称式に関する問題は，ある程度処理することは出来ると思うが，実数の性質に関する変形が出来るか。(6)　不定方程式(a の場合分け)が出来るか。

(9)　2次不等式の解において，整数解が存在しない条件が理解出来ているか。

$\boxed{2}$ 解答

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\dfrac{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\cdots *$

(2)　＊より，$P=1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})+(\sqrt{10}-\sqrt{9})$

よって，$P=\sqrt{10}$ となる。

【出題のねらい】

文字を含む式において，有理化が出来るか。また，前問の変形を利用して P の値を求めることが出来るか。

$\boxed{3}$ 解答

(1)　x が任意の実数をとって変化するとき，$t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqq -1$ より t の値の範囲は，$t\geqq -1$

(2)　$g(t)=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+1=t^2+4t+1$ となる。

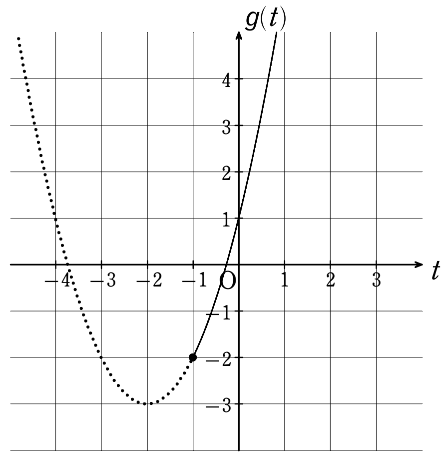
(3)　$g(t)$ の最小値を考える。t の範囲 $t\geqq -1$ に注意するして，

$g(t)=t^2+4t+1=(t+2)^2-3$

右図より，$t=-1$ のとき

最小値 -2 をとる。

また，x の値は　$x=1$



【出題のねらい】

(1)　置き換えによる，範囲の変化が読み取れるか。

(3)　$g(t)$ のグラフを用いて，$f(x)$ の最小値を求めることが出来るか。

$\boxed{4}$ 解答

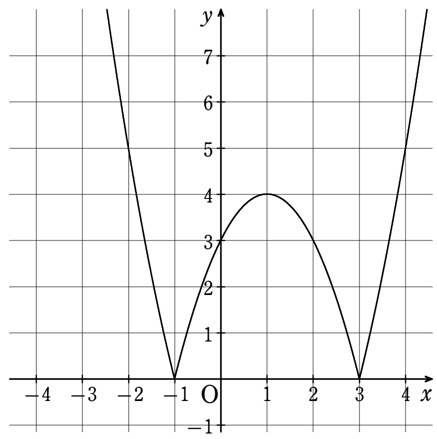
(1)　$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ より，頂点は$(1,\ -4)$

(2)　$x^2-2x-3\geqq 0$　つまり $x\leqq -1$，$3\leqq x$ のとき，

$y=|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$ となる。　また，$x^2-2x-3<0$ のとき

つまり　$-1<x<3$ のとき，$y=|x^2-2x-3|=-x^2+2x+3$ となる。

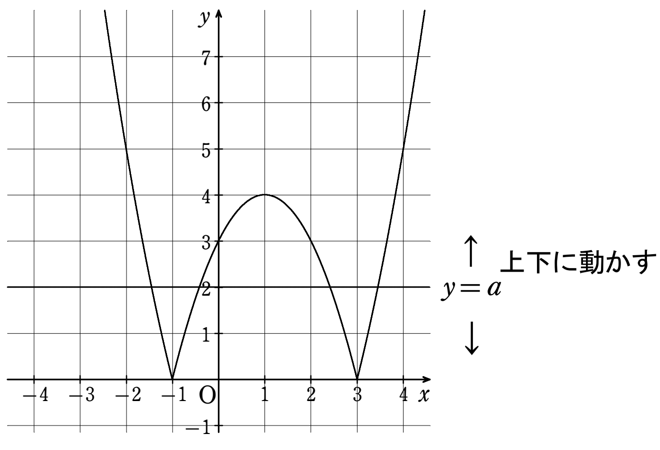
ゆえに求めるグラフは，図のようになる。



(3)　$|x^2-2x-3|=a$ が異なる4つの解を持つ。

$\Leftrightarrow$(2) のグラフと $y=a$ の交点が4つあればよい。

そのような定数 a の値の範囲を求めればよい。



図より，求める定数 a の値の範囲は　$0<a<4$

【出題のねらい】

(2)　絶対値のついたグラフをかくことが出来るか。今回は，定義に基づいて場合分けを行ったが，x 軸の下部分にあるグラフを上に折り曲げても求めることが出来る。

(3)　「方程式の解の個数」すなわち，「グラフの交点の個数」に等しいことが理解出来ているか。また，前問のグラフを利用するという誘導に乗れるか。

5 【図形と計量】解答

(1) (ｱ) 余弦定理より，$\cos\angle C=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\dfrac{1}{2}$　$\angle C=60^\circ$

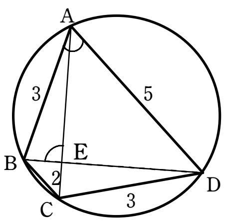
(ｲ) $\triangle ABC$ の面積 $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin60^\circ=10\sqrt{3}$

別解　ヘロンの公式　$2s=AB+BC+CA=7+8+5$ より，$s=10$
面積 $S=\sqrt{s(s-7)(s-8)(s-5)}=\sqrt{10\cdot3\cdot2\cdot5}=10\sqrt{3}$　でも出来る。

(2) (ｱ) (ｲ)
$BD=x$ とする。
$\triangle ABD$ に余弦定理を用いて，$x^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos A$　より
$x^2=34-30\cos A$　……①
ここで，四角形 ABCD は円に内接するので　$C=180^\circ-A$
$\triangle BCD$ に余弦定理を適用して
$x^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-A)$ より
$x^2=13+12\cos A$　……②　※$\cos(180^\circ-\theta)=\cos\theta$ を利用
①，② から　$34-30\cos A=13+12\cos A$
よって　$\cos A=\dfrac{1}{2}$　したがって　$A=60^\circ$ となる。
また，① より　$x^2=34-30\cos60^\circ=19$
$x>0$ に注意して　$x=\sqrt{19}$　よって　$BD=\sqrt{19}$

(ｳ) 面積 $S=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin120^\circ$
$=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}+\dfrac{6\sqrt{3}}{4}=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

(ｴ) $\angle AEB=\theta$ とする。
四角形 ABCD の面積 S は，



$S=\triangle AEB+\triangle BEC+\triangle CED+\triangle AED$
$=\dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot BE\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot CE\cdot\sin(180^\circ-\theta)$
$+\dfrac{1}{2}\cdot CE\cdot DE\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cdot DE\cdot AE\cdot\sin(180^\circ-\theta)$
ここで，$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ の関係を用いると
$S=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot BE(AE+CE)+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot DE(AE+CE)$
$=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot(BE+DE)(AE+EC)=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot BD\cdot AC$　となる。
また，$AC=\sqrt{19}$ なので　※等脚台形の性質またはBDと同様にして求める。

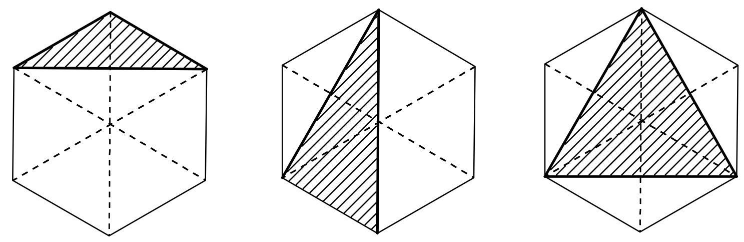
$\dfrac{1}{2}\sin\theta\cdot\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}=\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$ より，　$\sin\theta=\dfrac{21\sqrt{3}}{38}$

【出題のねらい】
(2) 余弦定理と面積の公式が利用できるか。また，内接四角形の性質を用いて対角線BDから２つの三角形に分けて式が立てられるか。
図形の性質(等脚台形)が理解出来たか。四角形ABCDの面積を4つに分割して$\sin\angle AEB$の値を求めることが出来たか。

6 【場合の数と確率】解答

(1) (ｱ) (ｲ) 300 を素因数分解すると，$300=2^2\cdot3\cdot5^2$　となる。
よって，正の約数の個数は　$(2+1)(1+1)(2+1)=18$ 個
また，その総和は$(1+2+2^2)(1+3)(1+5+5^2)=7\cdot4\cdot31=868$ となる。

(2) (ｱ) 異なる6 つの頂点から 3 点を選ぶので，　${}_6C_3=20$ 個
(ｲ) 三角形の面積 S については，以下のような場合がある。



2 辺を共有（二等辺三角形）　　1 辺を共有（直角三角形）　　辺を共有しない（1 辺が$2\sqrt{3}$ の正三角形）

$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin120^\circ=\sqrt{3}$　$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　$\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\sin60^\circ=3\sqrt{3}$
よって，$S_1<S_2<S_3$ に注意すると　求める面積 $S_2=2\sqrt{3}$

(ｳ) $S=S_1$ となる確率 P_1 は，頂点を固定すると三角形が 1 つ出来るので
6 通り　よって，$P_1=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

(ｴ) $S=S_2$ となる確率 P_2 は，この正六角形の対角線が 3 本ある。
それぞれに 4 個の直角三角形が出来るので，　$3\times4=12$ 通り
よって，$P_2=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$

【出題のねらい】
(1) 約数の個数は基本だが，総和も合わせて理解出来ているか。
(2) 正六角形の性質が利用できるか。頂点を結んで出来る三角形の面積の種類や値が求められるか。