平成 25 年度　第 2 回　数学診断テスト　α 問題（50 分）　　【解答･解説】

1 【必須問題】次の各問いに答えなさい。

(1)　$3xy^2\times(-2x^2y)^3$を計算しなさい。
(2)　$(2x-3y)(2x+5y)$を展開しなさい。
(3)　$(a-b+c)(a+b-c)$を展開しなさい。
(4)　$3x^2-5x-2$を因数分解しなさい。
(5)　a^2+bc-b^2+acを因数分解しなさい。
(6)　$|2-\sqrt{2}|$の値を求めなさい。
(7)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$の分母を有理化しなさい。
(8)　1 次不等式$x-5\leqq 2x+2$を解きなさい。
(9)　連立不等式$\begin{cases}x-5<2(x+1)\\ 2x+5>3x-3\end{cases}$を解きなさい。
(10)　2 次方程式 $2x^2+x-4=0$を解きなさい。

【出題のねらい】
(1)　指数の計算を行うことができるか。
(2)　多項式の展開ができるか。
(3)　同じ式を文字に置き換えることによって，多項式の展開ができるか。
(4)　たすき掛けを用いて因数分解をすることができるか。
(5)　最低次数の文字に着目することによって，因数分解をすることができるか。
(6)　絶対値の中の正負を判断することによって，絶対値を外すことができるか。
(7)　分母の有理化ができるか。
(8)　1 次不等式が解けるか。
(9)　1 次連立不等式が解けるか。
(10)　解の公式を用いて，2 次方程式が解けるか。

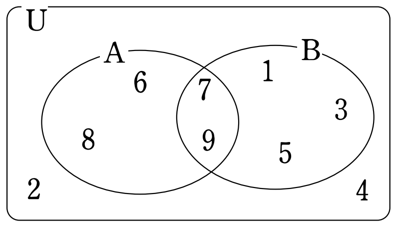
【解答】
(1)　$3xy^2\times(-2x^2y)^3=3xy^2\times(-8x^6y^3)=-24x^7y^5$
(2)　$(2x-3y)(2x+5y)=4x^2+(10-6)xy-15y^2=4x^2+4xy-15y^2$
(3)　$b-c$ を A とおくと　$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=(a-A)(a+A)=a^2-A^2=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2bc$
(4)　$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$
(5)　a について 2 次式，b について 2 次式，c について 1 次式より，最低次数の文字 c でくくると，　$a^2+bc-b^2+ac=a^2-b^2+ac+bc$
$=(a+b)(a-b)+(a+b)c=(a+b)\{(a-b)+c\}=(a+b)(a-b+c)$
(6)　$2-\sqrt{2}>0$ より　$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$
(7)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
(8)　$x-5\leqq 2x+2$ から，$x-2x\leqq 2+5$ より $-x\leqq 7$
-1 で両辺を割ると，$x\geqq -7$
(9)　$x-5<2(x+1)$ より $x-5<2x+2$ から $x>-7$　…①
$2x+5>3x-3$ より $2x-3x>-3-5$ から $x<8$　…②
① と ② の共通範囲を求めて，$-7<x<8$
(10)　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$

2 【必須問題】次の各問いに答えなさい。

(1)　18 の正の約数全体の集合を，要素を書き並べて表しなさい。
(2)　全体集合を $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$とする。Uの部分集合 $A=\{6,7,8,9\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$について，次の集合を 求めなさい。
（ア）$\overline{A}$　（イ）$A\cap B$　（ウ）$A\cup B$　（エ）$\overline{A}\cap\overline{B}$
(3)　次の条件p,qについて，p は q であるための
「必要条件」，「十分条件」，「必要十分条件」，
「必要条件でも十分条件でもない」
のうち，最も適するものを答えなさい。
（ア）xを実数とするとき　$p:x^2-3x+2=0$　　$q:x=1$
（イ）p：四角形ABCD が正方形である
　　q：四角形ABCD が長方形である
(4)　次の命題「$xy\fallingdotseq 6$ ならば $x\fallingdotseq 2$ または $y\fallingdotseq 3$」の対偶を述べを述べなさい。また，もとの命題の真偽を答えなさい。

【出題のねらい】
(1)　要素を書き並べて集合を表すことができるか。
(2)　補集合，共通部分，和集合，ド･モルガンの法則を理解しているか。
(3)　必要，十分，必要十分条件を理解しているか。
(4)　元の命題と対偶の真偽が一致していることを理解しているか。

【解答】
(1)　$\{1,2,3,6,9,18\}$
(2)



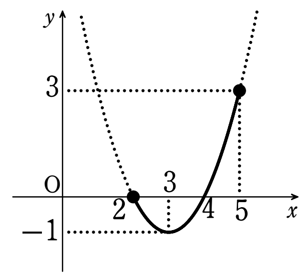
（ア）A の補集合 $\overline{A}=\{1,2,3,4,5\}$
（イ）A と B の共通部分 $A\cap B=\{7,9\}$
（ウ）A と B の和集合 $A\cup B=\{1,3,5,6,7,8,9\}$
（エ）ド･モルガンの法則より $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ だから，
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,4\}$
(3)　（ア）$x^2-3x+2=0$ より，$x=1,2$ だから
「$p:x^2-3x+2=0\Longrightarrow q:x=1$」は偽であり，
「$q:x=1\Longrightarrow p:x^2-3x+2=0$」は真である。
よって，p は q であるための必要条件。
（イ）「p:正方形ABCD $\Longrightarrow$ q:長方形ABCD」は真であり，
「q:長方形ABCD $\Longrightarrow$ p:正方形ABCD」は偽である。
よって，p は q であるための十分条件。
(4)　与えられた命題の対偶は，$x=2$ かつ $y=3$ ならば $xy=6$」であり，命題の対偶は真である。対偶と，もとの命題は，真偽が一致するから，もとの命題も真である。

3 【必須問題】次の各問いに答えなさい。

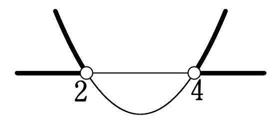
(1)（ア）2 次関数$y=x^2-6x+8$ のグラフの頂点を求めなさい。
（イ）2 次関数$y=x^2-6x+8\,(2\leqq x\leqq 5)$の最大値と最小値を求めなさい。
（ウ）2 次関数$y=x^2-6x+8$ のグラフとx軸の共有点の座標を求めなさい。
（エ）2 次不等式 $x^2-6x+8>0$ を解きなさい。
(2)　2 次方程式 $x^2-2x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】
(1)　（ア）　右辺を平方完成して頂点の座標を求めることができるか。
　（イ）　定義域が与えられたとき，2 次関数の最大値と最小値を求めることができるか。
　（ウ）　2 次関数のグラフと x 軸の交点の座標を求めることができるか。
　（エ）　(ウ)で求めたグラフと x 軸の交点の座標を利用して 2 次不等式を解くことができるか。
(2)　判別式を用いて，2 次方程式が異なる2つの実数解をもつための a の値の範囲を求めることができるか。

【解答】
(1)　（ア）　$y=x^2-6x+8=x^2-6x+9-9+8=(x-3)^2-1$ より，
頂点の座標は$(3,-1)$
（イ）　この関数のグラフは，
右の図の実線部分である。
よって，
$x=3$ のとき，最小値 -1
$x=5$ のとき，最大値 3
をとる。



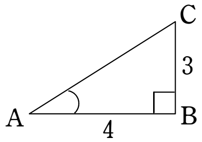
（ウ）　$x^2-6x+8=0$とすると，
$(x-2)(x-4)=0$ より，$x=2,4$
よって，x 軸との共有点の座標は$(2,0),(4,0)$
（エ）　$(x-2)(x-4)>0$ より
$x<2,4<x$



(2)　この2 次方程式の判別式を D とすると
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times a=1-a$
2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつのは
$D>0$ のときであるから
$1-a>0$
これを解いて　$a<1$

4 【選択問題】

(1) 右の図の△ABCにおいて，$\cos A$，$\tan A$の値をそれぞれ求めなさい。



(2) $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$の値を求めなさい。 ただし，θ は鈍角とする。

(3) △ABCにおいて，$A=30°$，$B=45°$，$\mathrm{AC}=10\sqrt{2}$ のとき，BCの長さを求めなさい。

(4) △ABCにおいて，CA＝3，AB＝2，$A=120°$ のとき，BCの長さを求めなさい。

(5) △ABCにおいて，CA＝8，AB＝5，$A=60°$ のとき，△ABCの面積Sを求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 三平方の定義を用いて，辺ACの長さを求め，三角比の定義に基づいて三角比の値を求めることができるか。

(2) 三角比の相互関係を用いて，他の三角比の値を求めることができるか。

(3) 正弦定理を用いて，辺の長さを求めることができるか。

(4) 余弦定理を用いて，辺の長さを求めることができるか。

(5) 面積の公式を用いて，三角形の面積を求めることができるか。

【解答】

(1) 三平方の定理より$\mathrm{AC}^2=3^2+4^2$，$\mathrm{AC}>0$より，AC＝5

$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\tan A=\dfrac{3}{4}$

(2) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$

θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$より，

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{15}{16}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{4}\div\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

(3) 正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 30°}=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin 45°}$

よって，$\mathrm{BC}=10\sqrt{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{2}=10$

(4) 余弦定理より，

$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos 120°=9+4-12\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=19$

$\mathrm{BC}>0$ であるから，$\mathrm{BC}=\sqrt{19}$

(5) △ABCの面積

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin 60°=20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

5 【選択問題】

(1) 1から100までの自然数のうち，以下のような数の個数を求めなさい。

(ア) 2で割り切れる数　　(イ) 2または5で割り切れる数

(2) 144の正の約数はいくつあるか求めなさい。

(3) 6個の数字1，2，3，4，5，6のうち異なる3個を並べて3桁の整数をつくる。全部でいくつの整数ができるか求めなさい。

(4) 男子2人，女子3人の計5人が円形のテーブルの席に座るとき，座り方は全部で何通りあるか求めなさい。

(5) 1から9までの数を1つずつ書いたカード9枚の中から5枚のカードを選ぶとき，3枚は偶数，2枚は奇数であるようなカードの選び方は何通りあるか求めなさい。

(6) 赤玉5個と白玉4個の入った袋から，3個の玉を同時に取り出すとき，赤玉1個，白玉2個が出る確率を求めなさい。

(7) 1つのサイコロを5回投げて，そのうち偶数の目がちょうど2回出る確率を求めなさい。

【出題のねらい】

(1) 集合の加法定理を用いて，条件に合う集合の要素の個数を求めることができるか。

(2) 素因数分解を利用して，約数の個数を求めることができるか。

(3) 順列を理解しているか。

(4) 円順列を理解しているか。

(5) 積の法則と組み合わせを理解しているか。

(6) 組み合わせの総数を用いた確率を求めることができるか。

(7) 反復試行の確率を求めることができるか。

【解答】

(1) 100以下の自然数全体の集合をUとする。Uの部分集合で，2で割り切れる数の集合をA，5で割り切れる数の集合をBとすると，

$A=\{2\times 1, 2\times 2, 2\times 3, \cdots\cdots, 2\times 50\}$

$B=\{5\times 1, 5\times 2, 5\times 3, \cdots\cdots, 5\times 20\}$

$A\cap B=\{10\times 1, 10\times 2, 10\times 3, \cdots\cdots, 10\times 10\}$ となる。

(ア) 2で割り切れる数の個数を $n(A)$ とすると，

$100\div 2=50$ より $n(A)=50$

(イ) 2または5で割り切れる数の集合は $A\cup B$ より，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+20-10=60$

(2) 144を素因数分解すると，$144=2^4\times 3^2$ より，144の正の約数は，2^4 の正の約数と 3^2 の正の約数の積で表せる。2^4 の正の約数は5個，3^2 の正の約数は3個あるから，積の法則より $5\times 3=15$ (個)

(3) 3桁の整数は，6つから3つを選ぶ順列の総数に等しいから，

${}_6\mathrm{P}_3=6\times 5\times 4=120$ (個)

(4) 5人の円形のテーブルの席への座り方は，5人の円順列の総数に等しいから，$(5-1)!=4!=4\times 3\times 2\times 1=24$ (通り)

(5) 1から9までの数に，偶数のカードは2，4，6，8の4枚，奇数のカードは1，3，5，7，9の5枚ある。

偶数のカードの選び方は ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，奇数のカードの選び方は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りだから，選び方の総数は積の法則より，

${}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2=4\times 10=40$ (通り)

(6) 赤玉5個と白玉4個の全部で9個の玉から3個の取り出し方は

${}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$ (通り)

赤玉5個から1個，白玉4個から2個を取る組み合わせは

${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=5\times 6=30$ (通り)

よって，求める確率は

$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$

(7) 1個のサイコロを投げて，偶数の目が出る確率は

$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

サイコロを5回投げて偶数の目がちょうど2回出る確率は

${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{5-2}=10\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$