平成２５年度　第２回　数学診断テスト　β問題（５０分）　【解答・解説】

$\boxed{1}$ 【必須問題】［小問集合］

次の各問いに答えなさい。

(1) $\sqrt{50}-\sqrt{48}-\sqrt{32}+\sqrt{27}$ を計算しなさい。

(2) $(a-b+c)(a+b-c)$ を展開しなさい。

(3) $x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$ を因数分解しなさい。

(4) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$ の小数部分を a とする。a の値を求めなさい。

(5) $x=3-2\sqrt{2}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めなさい。

(6) 連立不等式 $\begin{cases} 3(x+2)<5x+\dfrac{x-3}{2} \\ \dfrac{x-2}{5} \leqq \dfrac{x-4}{2} \end{cases}$ を解きなさい。

(7) 方程式 $|2x-5|=1$ を解きなさい。

(8) 2次方程式 $x^2+mx-m+8=0$ が重解をもつように，定数 m の値を定めなさい。

(9) x についての不等式 $x^2-2x-12<k(x+6)$ を満たす x の値が存在しないような定数 k の値の範囲を定めなさい。

(10) 2つの条件　$p: a<x$，$q: 0<x<3$　について，p は q であるための必要条件であるとき，定数 a の値の範囲を定めなさい。

【出題のねらい】

(1) 根号を含む式の加法，減法の計算ができるか

(2) 式の形の特徴に着目して変形し，展開の公式が適用できるようにすることができる。

(3) x（または y）の2次3項式とみて，たすき掛けによる因数分解ができるか。

(4) 分母を有理化し，根号を含む式の計算ができるか。

(5) a^2+b^2 が対称式であることに着目し，対称式を $a+b$，ab で表す変形

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

を利用して値を求めることができるか。

(6) 連立不等式の意味を理解しており，1次不等式を解くことができるか。

(7) 絶対値を含む方程式を解くことができるか。

(8) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の考察において，判別式 $D=b^2-4ac$ を使うことの意味を理解しており，使うことができるか。

(9) 2次関数の値の符号と2次不等式の解を相互に関連させて考察し，2次不等式を解くことができるか。

(10) 必要条件，十分条件，必要十分条件の定義を理解しており，集合の包含関係に結び付けてとらえることができるか。

＜解答・解説＞

(1) $(\text{与式})=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

$\quad=\sqrt{2}-\sqrt{3}$　答

(2) $(\text{与式})=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$

$\quad=a^2-(b-c)^2$

$\quad=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$\quad=a^2-b^2-c^2+2bc$　答

(3) $(\text{与式})=x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$

$\quad=x^2-(y-2)x-(2y^2-5y+3)$

$\quad=x^2-(y-2)x-(2y-3)(y-1)$

$\quad=\{x-(2y-3)\}\{x+(y-1)\}$

$\quad=(x-2y+3)(x+y-1)$　答

(4) 与式を有理化すると

$$(\text{与式})=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$$

ここで，$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$　であるから

$9<12<16$ より　　$3<\sqrt{12}<4$

各辺から2を引いて　　$1<\sqrt{12}-2<2$

すなわち　　$1<2\sqrt{3}-2<2$

よって　$\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$ の整数部分は1である。

したがって　求める小数部分 a は

$a=(2\sqrt{3}-2)-1=2\sqrt{3}-3$　答

(5) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$

$\quad=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

ここで，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$\quad=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{9-8}=3+2\sqrt{2}$

となるから　$x+\dfrac{1}{x}=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

よって　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=6^2-2$

$\quad=36-2$

$\quad=34$　答

(6) 与えられた連立不等式を

$\begin{cases} 3(x+2)<5x+\dfrac{x-3}{2} & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x-2}{5} \leqq \dfrac{x-4}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$　とする。

不等式①を解くと　$6(x+2)<10x+(x-3)$

$6x+12<11x-3$

$-5x<-15$

よって　$x>3$　……①'

不等式②を解くと　$2(x-2)\leqq 5(x-4)$

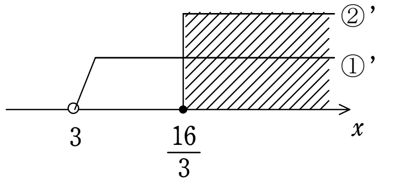
$2x-4\leqq 5x-20$

$-3x\leqq -16$

よって　$x\geqq\dfrac{16}{3}$　……②'

①'，②' の共通範囲を求めて

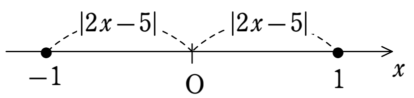
$x\geqq\dfrac{16}{3}$　答



(7) $|2x-5|=1$　から　$2x-5=\pm 1$

これを解いて

$x=2,\ 3$　答



別解

[1] $2x-5 \geqq 0$ すなわち $x \geqq \dfrac{5}{2}$ のとき

$2x-5=1$　これを解いて　$x=3$（$x \geqq \dfrac{5}{2}$ を満たす）

[2] $2x-5<0$ すなわち $x<\dfrac{5}{2}$ のとき

$-(2x-5)=1$　これを解いて　$x=2$（$x<\dfrac{5}{2}$ を満たす）

[1]，[2] より　　$x=2,\ 3$　答

(8)　与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=m^2-4\cdot 1\cdot(-m+8) \\ &=m^2+4m-32 \\ &=(m+8)(m-4) \end{aligned}$$

2 次方程式が重解をもつための必要十分条件は $D=0$ である。

よって　　$(m+8)(m-4)=0$

ゆえに　　$m=-8,\ 4$　答

(9)　与えられた不等式を整理して

$$x^2-(k+2)x-6(k+2)<0 \quad \cdots ①$$

2 次不等式 ① が解をもたないような定数 k の値の範囲を求めればよい。

2 次方程式 $x^2-(k+2)x-6(k+2)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D&=\{-(k+2)\}^2-4\cdot 1\cdot\{-6(k+2)\} \\ &=(k+2)^2+24(k+2) \\ &=(k+2)\{(k+2)+24\} \\ &=(k+2)(k+26) \end{aligned}$$

2 次不等式 ① の x^2 の係数が正であるから，解をもたないための必要十分条件は $D \leqq 0$ である。

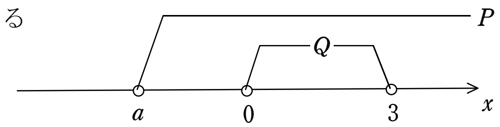
よって　$(k+2)(k+26) \leqq 0$

ゆえに　$-26 \leqq k \leqq -2$　答

(10)　$P=\{x \mid x>a,\ x \text{は実数}\}$，$Q=\{x \mid 0<x<3,\ x \text{は実数}\}$ とすると，「p は q であるための必要条件」となるのは $q \Rightarrow p$ が真のときであるから，$Q \subset P$ となる 定数 a の値を求めればよい。

したがって，$Q \subset P$ となる a の値の範囲は

$a \leqq 0$　答



2 【必須問題】［数と式］

2 つの不等式 $|x-6|<3 \cdots ①$，$|x-k|<5 \cdots ②$ がある。ただし，定数 k は実数とする。

(1)　① の不等式を解きなさい。

(2)　①，② をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めなさい。

(3)　①，② をともに満たす整数 x の個数がちょうど 3 個となるような k の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　絶対値を含む不等式を解くことができるか。

(2)　連立不等式の解が存在する条件から定数の値を定めることができるか。

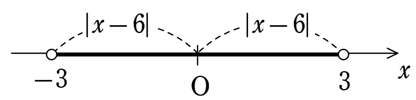
(3)　2 つの不等式を満たす x の範囲に含まれる整数解を判別し，k のとりうる値の範囲を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1)　$|x-6|<3$　から　$-3<x-6<3$

よって

$3<x<9$　……①'　答



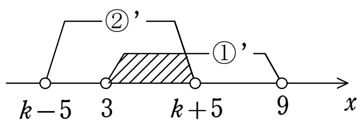
(2)　不等式 ② を解くと

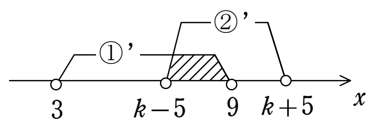
$|x-k|<5$　から　　$-5<x-k<5$

よって　　$k-5<x<k+5$　……②'

求める条件は ①'，②' が共通範囲をもつことであるから

$k-5<3<k+5$　　または　　$k-5<9<k+5$





すなわち　$-2<k<14$　答

参考

①'，②' が共通範囲をもつ条件を

$k-5<9$　かつ　$3<k+5$

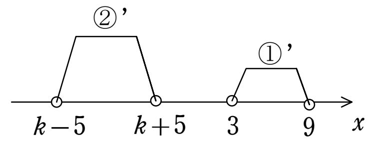
としてもよい。

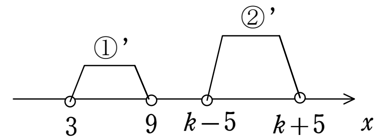
別解　「①'，②' が共通範囲をもつ」を下記のように「①'，②' が共通範囲をもたない」の補集合として考えてもよい。

①'，②' が共通範囲をもたない条件は

$k+5 \leqq 3$　または　$9 \leqq k-5$

すなわち　$k \leqq -2$　または　$14 \leqq k$　……③





求める条件は ③ の補集合であるから

$k>-2$　　かつ　　$14>k$

すなわち　　$-2<k<14$　答

(3)　①' と ②' の共通範囲に整数 x がちょうど 3 個含まれる場合を考えればよい。

①' を満たす整数 x は　$x=4,5,6,7,8$

②' との共通範囲に含まれる整数 x の個数が 3 個となるのは次の 2 つの場合がある。

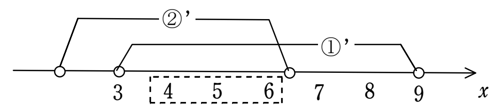
[1] $x=4,5,6$ が含まれる　または　[2] $x=6,7,8$ が含まれる

[1] $x=4,5,6$ が含まれる場合

求める条件は

$6<k+5 \leqq 7$

よって　　$1<k \leqq 2$

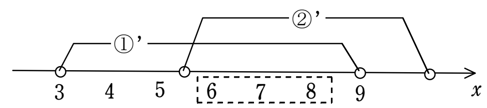


[2] $x=6,7,8$ が含まれる場合

求める条件は

$5 \leqq k-5<6$

よって　　$10 \leqq k<11$



[1]，[2] より　$1<k \leqq 2$，$10 \leqq k<11$　答

$\boxed{3}$ **【必須問題】**［２次関数］

放物線 $y=2x^2-2(a+1)x+a^2-1$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　$a=2$ のとき，放物線の頂点の座標を求めなさい。

(2)　この放物線が x 軸と異なる２点 P，Q で交わるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(3)　(2) のとき，線分 PQ の長さの最大値とそのときの a の値を求めなさい。

【出題のねらい】
(1)　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ を平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ の形にし，２次関数のグラフである放物線の頂点を求めることができるか。
(2)　２次関数のグラフが x 軸と異なる２点で交わる条件を２次方程式の解の判別式を用いて求めることができるか。
(3)　線分 PQ の長さを a の関数で表し，(2) の範囲に着目して最大値を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1)　$a=2$ のとき，与えられた放物線の方程式は

$$y=2x^2-6x+3$$

となる。これを変形して

$$\begin{aligned}y&=2(x^2-3x)+3\\&=2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}+3\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+3\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって，求める頂点の座標は $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$　答

(2)　与えらえた放物線が x 軸と異なる２点で交わる条件は
２次方程式 $2x^2-2(a+1)x+a^2-1=0$ の判別式を D とすると，
$D>0$ である。

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\{-(a+1)\}^2-2(a^2-1)\\&=(a+1)^2-2(a+1)(a-1)\\&=(a+1)\{(a+1)-2(a-1)\}\\&=(a+1)(-a+3)\\&=-(a+1)(a-3)\end{aligned}$$

$D>0$ から　　$-(a+1)(a-3)>0$
両辺に -1 をかけて　　$(a+1)(a-3)<0$
よって　　$-1<a<3$　答

別解
与えられた放物線の方程式を変形して

$$\begin{aligned}y&=2x^2-2(a+1)x+a^2-1\\&=2\{x^2-(a+1)x\}+a^2-1\\&=2\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{2}+a^2-1\\&=2\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a^2-a-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって，頂点の座標は $\left(\frac{a+1}{2},\frac{1}{2}a^2-a-\frac{3}{2}\right)$

下に凸の放物線が x 軸と異なる２点で交わる条件は
（頂点の y 座標）<0　すなわち　$\frac{1}{2}a^2-a-\frac{3}{2}<0$
両辺に２をかけて　　$a^2-2a-3<0$
左辺を因数分解して　　$(a+1)(a-3)<0$
よって　　$-1<a<3$　答

(3)　２点 P，Q の x 座標は，２次方程式 $2x^2-2(a+1)x+a^2-1=0$ の２つの解であるから，

$$\begin{aligned}x&=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-2(a^2-1)}}{2}\\&=\frac{(a+1)\pm\sqrt{-a^2+2a+3}}{2}\end{aligned}$$

よって，線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=\frac{(a+1)+\sqrt{-a^2+2a+3}}{2}-\frac{(a+1)-\sqrt{-a^2+2a+3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{-a^2+2a+3}}{2}=\sqrt{-a^2+2a+3}\\&=\sqrt{-(a^2-2a)+3}=\sqrt{-\{(a-1)^2-1\}+3}\\&=\sqrt{-(a-1)^2+4}\end{aligned}$$

(2) の結果から a のとり得る値の範囲は $-1<a<3$ であるから，
線分 PQ は $a=1$ のとき最大となり，その最大値は $\sqrt{4}=2$ となる。
$a=1$ のとき，最大値２　答

$\boxed{4}$ **【選択問題】**［図形と計量］

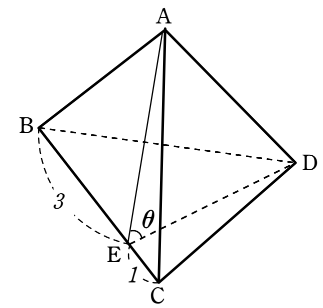
(1)　$\angle A=45^\circ$ の△ABC において，頂点 A，B，C に対する辺の長さをそれぞれ a，b，c とし，この三角形の外接円の中心を O とする。次の問いに答えなさい。

①　△ABC の面積を b と c を用いて表しなさい。

②　△OBC の面積を a を用いて表しなさい。

③　△OBC と △ABC の面積比が $(\sqrt{2}-1):1$ となる ∠ABC の大きさを求めなさい。

(2)　１辺の長さが４の正四面体 ABCD の辺 BC を $3:1$ に内分する点を E とし，$\angle\mathrm{AED}=\theta$ とする。
次の問いに答えなさい。



①　AE の長さを求めなさい。

②　$\cos\theta$ の値を求めなさい。

③　正四面体 ABCD の体積が $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ であるとき，頂点 B から△AED に下した垂線 BH の長さを求めなさい。

【出題のねらい】
(1)　①２辺の長さとその間の角の正弦の値から三角形の面積を求めることができるか。
②正弦定理を用いて円の半径を一辺の長さで表すことができるか。また，円周角の定理から三角形の面積を考えることができるか。
③①，② で求めた面積の値から b，c の関係を導き，二等辺三角形の性質を用いて角の大きさを求めることができるか。
(2)　①２辺の長さとその間の角の大きさから対辺の長さを求めることができるか。
②３辺の長さから 余弦の値を求めることができるか。
③正四面体 ABCD の体積から四面体 ABDE の体積を求め，そこから高さ BH を求めることができるか。

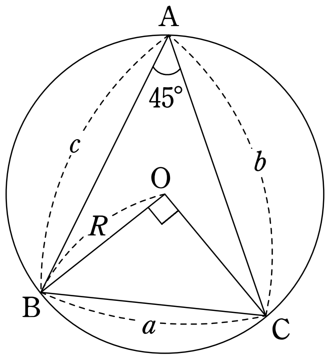
＜解答・解説＞

(1) ①　$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot CA\cdot AB\cdot \sin A$

$= \dfrac{1}{2} bc \sin 45^\circ$

$= \dfrac{1}{2} bc \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4} bc$　答



②　円周角の定理から

$\angle BOC = \angle A \times 2 = 90^\circ$

また，$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$OB = OC = R$ から　　$\triangle OBC = \dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OC = \dfrac{1}{2}R^2$

ここで，$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて　$2R = \dfrac{BC}{\sin A}$　から

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

よって　$\triangle OBC = \dfrac{1}{2}R^2$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{4}a^2$　答

③　$\triangle OBC : \triangle ABC = (\sqrt{2}-1):1$　より

$\triangle OBC = (\sqrt{2}-1)\cdot\triangle ABC \cdots (*)$

ここで，$\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos 45^\circ$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= b^2 + c^2 - \sqrt{2}\,bc$

これを②の結果に代入して

$\triangle OBC = \dfrac{1}{4}a^2 = \dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - \sqrt{2}\,bc)$

$(*)$から　　$\dfrac{1}{4}(b^2 + c^2 - \sqrt{2}\,bc) = (\sqrt{2}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}bc$

整理すると　$b^2 + c^2 - \sqrt{2}\,bc = (\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2}\,bc$

$b^2 - 2bc + c^2 = 0$

$(b-c)^2 = 0$

ゆえに　　$b = c$

$\triangle ABC$ は $b=c$ の二等辺三角形であるから　$\angle ABC = \angle ACB$

したがって，三角形の内角の和は 180° より

$\angle ABC = (180^\circ - 45^\circ) \div 2$

$= \left(\dfrac{135}{2}\right)^\circ$　答

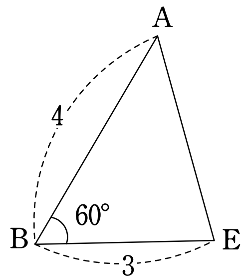
(2) ①　$\triangle ABE$ において，余弦定理を用いて

$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB\cdot BE\cdot\cos 60^\circ$

$= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}$

$= 16 + 9 - 12 = 13$

$AE > 0$ より　$AE = \sqrt{13}$　答



②　$\triangle AED$ において，$AE = ED$ であるから

余弦定理を用いて，

$$\cos\theta = \frac{AE^2 + ED^2 - AD^2}{2\cdot AE\cdot ED}$$

$$= \frac{13+13-16}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{5}{13}$$　答

③　頂点 A から $\triangle BCD$ に下した垂線の長さを h とすると

（正四面体 ABCD の体積）:（四面体 ABED の体積）

$= \dfrac{1}{3}\cdot h\cdot\triangle BCD \;:\; \dfrac{1}{3}\cdot h\cdot\triangle BED$

$= \triangle BCD \;:\; \triangle BED$

$= \dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBE \;:\; \dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot BE\cdot\sin\angle DBE$

$= BC : BE$

$= 4 : 3$

となるから

（四面体 ABED の体積）$= \dfrac{3}{4}\cdot$（正四面体 ABCD の体積）

$= \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

$= 4\sqrt{2}$　　$\cdots\cdots(*)$

ここで，②の結果から $\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}$

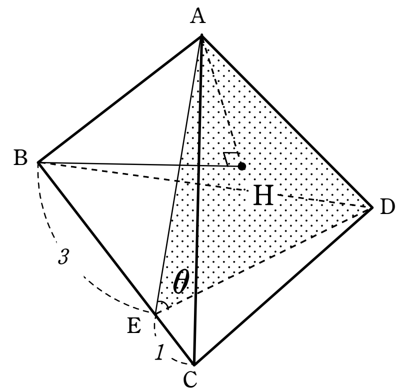
$= \sqrt{\dfrac{169-25}{13^2}} = \sqrt{\dfrac{144}{13^2}} = \dfrac{12}{13}$

となるから

$\triangle AED = \dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{12}{13}$

$= 6$



よって，四面体 ABED の体積は $\triangle AED$ を底面として考えると

（四面体 ABED の体積）$= \dfrac{1}{3}\cdot BH\cdot\triangle AED$

$= \dfrac{1}{3}\cdot BH\cdot 6$

$= 2\,BH$

したがって，$(*)$ より

$2\,BH = 4\sqrt{2}$

よって

$BH = 2\sqrt{2}$　答

5 【選択問題】［場合の数と確率］

(1) 次の問いに答えなさい。

① 420 の正の約数の個数を求めなさい。

② 420 の正の約数の総和を求めなさい。

③ 420，600，360 の正の公約数の個数を求めなさい。

(2) 平面上に正八角形 ABCDEFGH がある。このとき，頂点どうしを線分で結び，正八角形の内部を分割することを考えるとき，次の問いに答えなさい。

① 正八角形の内部を 1 本の線分で 2 つに分割するとき，分割の方法は何通りあるか求めなさい。

② 正八角形の内部を 2 本の線分で 4 つに分割するとき，分割の方法は何通りあるか求めなさい。

③ 正八角形の内部を 2 本の線分で 3 つに分割するとき，分割の方法は何通りあるか求めなさい。

【出題のねらい】

(1) ① 与えられた数を素因数分解し，約数の個数を積の法則を用いて求めることができるか。

② 自然数 N が，$N=p^aq^b$ と素因数分解されるとき，素因数 p，q の累乗のすべての組合せが $(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)$ の展開と同じ仕組みであることを用いて，約数の総和を求めることができるか。

③ 3 数の正の公約数の個数が 3 数の最大公約数の正の約数の個数となることに気付き，公約数の個数を 求めることができるか。

(2) ① 対角線が正八角形の内部を 2 つに分割することに着目し，対角線の本数を求めることができるか。

② 正八角形の 8 個の頂点のうち 4 個の頂点を結んでできる四角形の対角線が内部を 4 つに分割することに着目し，四角形の個数を求めることができるか。

③ 正八角形の 2 本の対角線が 内部を 3 つまたは 4 つに分割することに着目し，①，② の結果を用いて分割方法を計算できるか。

＜解答・解説＞

(1) ① 420 を素因数分解すると $420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$

420 の正の約数は，2^2 の正の約数，3 の正の約数，5 の正の約数，7 の正の約数の積で表される。

2^2 の正の約数の個数は 1，2，2^2 の 3 個
3 の正の約数の個数は 1，3 の 2 個
5 の正の約数の個数は 1，5 の 2 個
7 の正の約数の個数は 1，7 の 2 個

よって，420 の正の約数の個数は，積の法則により

$3\times2\times2\times2=24$（個） 答

② 正の約数は次の式の展開にすべて現れる。

$(1+2+2^2)(1+3)(1+5)(1+7)$

よって，420 の正の約数の総和は

$(1+2+2^2)(1+3)(1+5)(1+7)=7\cdot4\cdot6\cdot8$
$=1344$ 答

③ 420，600，360 の最大公約数は 60 である。

3 数の正の公約数の個数は，最大公約数 60 の正の約数の個数と等しい。

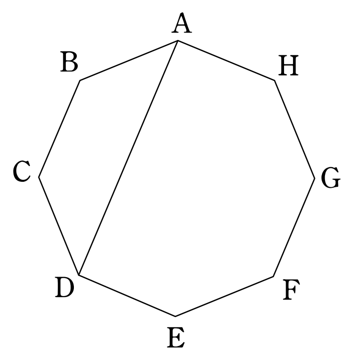
① と同様に 60 を素因数分解して，$60=2^2\cdot3\cdot5$

2^2 の正の約数の個数は 1，2，2^2 の 3 個
3 の正の約数の個数は 1，3 の 2 個
5 の正の約数の個数は 1，5 の 2 個

よって，3 数の正の公約数の個数は，積の法則により

$3\times2\times2=12$（個） 答

(2) ① 正八角形の 8 個の頂点のうち，2 個の頂点を選ぶと 1 本の線分が決まるから



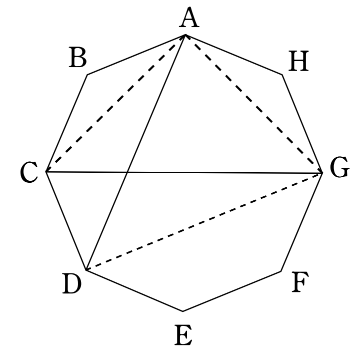
${}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$（本）

このうち，8 本は正八角形の辺であるから，それを除いた 20 本が内部を 2 つに分割する線分の本数である。

よって，正八角形の内部を 1 本の線分で 2 つに分割する方法は

20 通り 答

② 正八角形の 8 個の頂点のうち，4 個の頂点を結んでできる四角形の個数は



${}_8C_4=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$
$=70$（個）

四角形の 4 個の頂点のうち，2 点を結んで内部を 4 つに分割する線分は対角線の 2 本だけである。

よって，正八角形の内部を 2 本の線分で 4 つに分割する方法は

70 通り 答

③ ① より，正八角形の内部を 2 つに分割する 20 本の線分から 2 本の線分を選ぶ方法は

${}_{20}C_2=\dfrac{20\cdot19}{2\cdot1}=190$（通り）

このとき，正八角形は 2 本の線分で内部は 3 つまたは 4 つに分割される。

② より，2 本の線分で内部を 4 つに分割する方法は 70 通りあるので，それを除けばよい。

よって，正八角形の内部を 2 本の線分で 3 つに分割する方法は

$190-70=120$（通り） 答