

＜必須問題＞

- 1
- (1)㊦解の公式を使うことができるか。
 $x^2-10x+8=0$ において、解の公式より
 $x=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times 8}=5\pm\sqrt{17}$

(2)㊦展開できるか。
 $(a-3b+c)^2=a^2+(-3b)^2+c^2+2a(-3b)+2(-3b)c+2ca$
 $=a^2+9b^2+c^2-6ab-6bc+2ca$

(3)㊦ある文字に着目して因数分解できるか。
① $x^2+xy-x-2y-2=x^2+(y-1)x-2(y+1)$
 $=(x-2)(x+(y+1))=(x-2)(x+y+1)$
㊦工夫して因数分解できるか。
② $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$
 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-15$
 $=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+9=[(x^2+5x)+1][(x^2+5x)+9]$
 $=(x^2+5x+1)(x^2+5x+9)$
③ $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$
 $=[(x^2+1)+x][(x^2+1)-x]=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

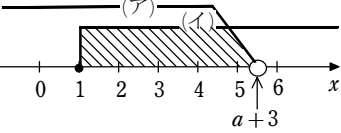
(4)㊦分母を有理化して計算できるか。
 $A+B=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
 $=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$
 $=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}+\frac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{16}{2}=8$

(5)㊦絶対値記号のはずし方を理解し、適切に計算できるか。
条件より考えて $2<a<7$ なので
 $|2-a|-|7-a|-3a+11=-(2-a)-(7-a)-3a+11=-a+2$

(6)㊦平方根の性質と絶対値記号のはずし方を理解し、計算できるか。
 $\sqrt{(x-1)^2}=|3+x|$ より $|x-1|=|3+x|$ ゆえに $x-1=\pm(3+x)$
ここで、 $x-1=3+x$ を満たす x は存在しない。
そこで、 $x-1=-(3+x)$ を解くと $x=-1$

(7)㊦分数や絶対値を含んだ不等式の計算ができるか。
① $\begin{cases} 3x<x+4 \\ 5x-1>2x-7 \end{cases}$ よって $\begin{cases} x<2 \\ x>-2 \end{cases}$ したがって $-2<x<2$
② $\begin{cases} \frac{x}{4}+1<\frac{x+8}{7} \cdots \cdots \text{(ア)} \\ |x-4|>3 \cdots \cdots \text{(イ)} \end{cases}$
(ア)の両辺を28倍して整理すると $7x+28<4x+32$ よって $x<\frac{4}{3}$
(イ)より $x-4<-3, 3<x-4$ よって $x<1, 7<x$
したがって $x<1$

(8)㊦不等式が計算でき、自然数の範囲を理解しているか。
 $\frac{x}{3}+5>2x-\frac{5}{3}a$ の両辺を3倍して整理すると $x<a+3 \cdots \cdots \text{(ア)}$
また、条件より x は自然数なので「 $x\geq 1$ 」 $\cdots \cdots \text{(イ)}$
よって題意を満たすのは、(ア),(イ)を
満たす自然数 x が $1, 2, 3, 4, 5$ となる
ときであるから
 $5<a+3\leq 6$ よって $2<a\leq 3$



(9)㊦題意を読み取り、式を立て、計算できるか。
求める自然数の十の位の数 x とおくと、この自然数は $10x+5$ と表せる。
この自然数が、各位の数の和の6倍より大きいので $10x+5>6(x+5)$
よって $10x+5>6x+30$ すなわち $x>\frac{25}{4}=6.25$
 x は9以下の自然数なので $x=7, 8, 9$
したがって、求める自然数は $75, 85, 95$

(10)㊦共通部分、和集合、ド・モルガンの法則などを理解し、利用できるか。
 $A=\{x \mid 1<x<7\}, B=\{x \mid x<2, 5<x\}$ より
 $A\cap B=\{x \mid 1<x<2, 5<x<7\}$
よって $C=\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=\{x \mid 2\leq x\leq 5\}$ ゆえに $A\cap C=\{x \mid 2\leq x\leq 5\}$

(11)㊦命題と条件を理解しているか。
 $x^4>y^4 \Leftrightarrow x^4-y^4>0 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2-y^2)>0$
 $\Leftrightarrow x^2-y^2>0$ かつ $(x, y)\neq(0, 0) \Leftrightarrow x^2-y^2>0 \Leftrightarrow x^2>y^2$
よって () にあてはまるのは、(ア)の必要十分条件である。
- 2

＜2次関数＞

(1)㊦記号を理解し、代入できるか。
 $f(x)=x^2-5bx+6$ なので
 $f(3)=3^2-5b\times 3+6<0$ よって $b>1$

(2)㊦放物線の平行移動、対称移動について理解できているか。
放物線 $y=-x^2+2x+1$ を x 軸に関して対称移動すると、
 $y=-(-x^2+2x+1)=(x^2-2x)-1=(x-1)^2-2$
この放物線を x 軸方向に $-2, y$ 軸方向に 3 だけ平行移動すると、求める放物線 G の方程式は $y=(x+1)^2+1$

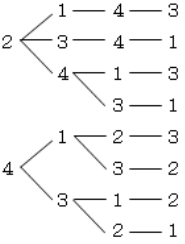
(3)㊦2次関数の頂点や軸や x 軸との位置関係を理解しているか。
① $f(x)=ax^2+4abx+c=a(x^2+4bx)+c=a(x+2b)^2-4ab^2+c$
軸 $x=-2b$ が y 軸の左側 ($x<0$) にあるので $-2b<0$ よって 負
② グラフが x 軸と点 $(1, 0)$ で交わり、点 $(2, 0)$ は点 $(1, 0)$ の右側なので
 $f(2)=a\cdot 2^2+4ab\cdot 2+c=4a+8ab+c>0$ よって 正

(4)㊦①2次関数の最大値を求める事ができるか。
② 定義域が定められたときに最大値、最小値を求めることができるか。
① $f(x)=ax^2-8ax+b=a(x^2-8x)+b=a(x-4)^2-16a+b$ よって
 $a<0$ より考えると $x=4$ のとき、最大値 $-16a+b$
② 定義域 $1\leq x\leq 5$ において、条件より考えると
 $\begin{cases} f(4)=21 \\ f(1)=3 \end{cases}$ よって $\begin{cases} -16a+b=21 \\ -7a+b=3 \end{cases}$ よって $\begin{cases} a=-2 \\ b=-11 \end{cases}$
(これは $a<0$ を満たす)

3

＜場合の数＞

(1)㊦数え上げができるか。
樹形図を作成して数え上げる。
よって条件を満たす4桁の整数は
8通り



(2)㊦正の約数の個数と、その約数の総和を求めることができるか。
 $108=2^2\times 3^3$ より、 108 の正の約数は、 2^2 の正の約数と、 3^3 の正の約数の積で表される。 2^2 の正の約数は、 $1, 2, 2^2$ の3個。 3^3 の正の約数は、 $1, 3, 3^2, 3^3$ の4個。
よって 108 の正の約数の個数は、積の法則により $3\times 4=12$ 個。
また、 108 の正の約数の総和は $(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=280$

(3)㊦条件を満たす倍数の個数を求めることができるか。
 100 以上 200 以下の整数全体の集合を全体集合 U とする。そのうち、 3 の倍数全体の集合を $A, 7$ の倍数全体の集合を B とする。
① $A=\{3\times 34, 3\times 35, \cdots, 3\times 66\}$ よって $n(A)=33$
 3 の倍数でない整数全体の集合は $\overline{A}$ で表される。
よって求める個数は $n(\overline{A})=n(U)-n(A)=101-33=68$
② 3 の倍数であるが 7 の倍数でない整数全体の集合は $A\cap \overline{B}$ で表される。ここで $A\cap B=\{21\times 5, 21\times 6, \cdots, 21\times 9\}$
よって $n(A\cap B)=5$ ゆえに $n(A\cap \overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=28$

(4)㊦順列を考えることができるか。
① A と B をまとめて1枚とみなすと、5枚の順列になるので、 $5!$ 通り。ただし、 A と B の並べ方が2通りなので
 $5!\times 2=120\times 2=240$ (通り)
② d, e, f の並べ方は $3!$ 通り
小文字と小文字もの間か、両端の4か所に大文字 A, B, C の3枚を並べる方法は ${}_4P_3$ 通り。よって求める並べ方は
 $3!\times {}_4P_3=6\times 24=144$ (通り)