1 ＜必須問題＞　小問集合

次の各問いに答えなさい。

(1)　$\sqrt{5}+2\sqrt{20}-3\sqrt{45}$ を計算しなさい。

(2)　$(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2$ を展開しなさい。

(3)　$(x^2+4x+2)(x^2+4x+6)+3$ を因数分解しなさい。

(4)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい。

(5)　循環小数 $2.\dot{4}\dot{2}$ を分数で表しなさい。

(6)　$\sqrt{8-2\sqrt{12}}$ を簡単にしなさい。

(7)　不等式 $|2x-3|\leqq x+2$ を解きなさい。

(8)　連立不等式 $\begin{cases}5x-8>2x+1\\ x+3>3x-a\end{cases}$ を満たす整数xがちょうど４個存在するような定数aの値の範囲を求めなさい。

(9)　２次不等式 $ax^2+(1-2a)x+4a>0$ が，すべての実数 x に対して成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

(10)　x，a を実数とする。$-1<x\leqq 2$ であることが，$a<x<a+4$ であるための十分条件となるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】
(1)　根号の含む式の加法・減法ができるか。
(2)　式の特徴に着目して，置き換えを含む展開の公式が利用できるか。
(3)　置き換えを含む因数分解ができるか。
(4)　分母が３つの場合の有理化ができるか。
(5)　循環小数を分数に変形できるか。
(6)　根号と絶対値の関係を理解し，２重根号を解くことができるか。
(7)　絶対値を含む不等式を解くことができるか。
(8)　連立不等式を利用して，整数の個数の問題を処理することができるか。
(9)　２次不等式の解を２次関数の概形と関連させて，解くことができるか。
(10)　命題の真偽および必要条件・十分条件・必要十分条件を理解し，集合の包含関係と関連させて考えることができるか。

＜解答・解説＞

(1)　(与式)$=\sqrt{5}+2\times 2\sqrt{5}-3\times 3\sqrt{5}=\sqrt{5}+4\sqrt{5}-9\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$　答

(2)　$A^2B^2=(AB)^2$ を利用する。
(与式)$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}^2=(x^3-y^3)^2=x^6-2x^3y^3+y^6$　答

(3)　$X=x^2+4x$ とおく。
(与式)　$=(X+2)(X+6)+3=X^2+8X+15=(X+3)(X+5)$　元に戻して
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x+5)=(x+1)(x+3)(x^2+4x+5)$　答

(4)　$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ を利用する。
(与式)$=\dfrac{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}=\dfrac{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$
$=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}$　答

(5)　$x=2.\dot{4}\dot{2}$ とおく。
$100x=242.\dot{4}\dot{2}$
$-)\quad x=\quad 2.\dot{4}\dot{2}$
$99x=240$
$x=\dfrac{240}{99}=\dfrac{80}{33}$　答

(6)　ここで，$\sqrt{6}>\sqrt{2}$ は明らか。
(与式)$=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{6}-\sqrt{2}|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$　答

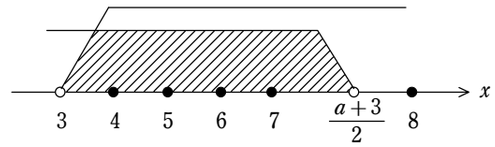
参考　$\sqrt{k^2}=|k|=\begin{cases}k\ (k\geqq 0\text{のとき})\\ -k\ (k<0\text{のとき})\end{cases}$　※根号と絶対値の関係

(7)　[1] $2x-3\geqq 0$　すなわち $x\geqq\dfrac{3}{2}$ のとき，
不等式は　$2x-3\leqq x+2$　これを解いて，$x\leqq 5$
よって，$x\geqq\dfrac{3}{2}$ と合わせて　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 5$ …①

[2] $2x-3<0$　すなわち $x<\dfrac{3}{2}$ のとき，
不等式は　$-(2x-3)\leqq x+2$　これを解いて，$x\geqq\dfrac{1}{3}$
よって，$x<\dfrac{3}{2}$ と合わせて　$\dfrac{1}{3}\leqq x<\dfrac{3}{2}$ …②
ゆえに①，②より　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 5$　答

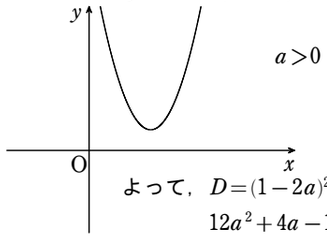
(8)　与えられた連立不等式を
$\begin{cases}5x-8>2x+1 & \cdots\cdots①\\ x+3>3x-a & \cdots\cdots②\end{cases}$ とおく。

①の不等式を解くと　$x>3$　……(ア)
同様にして，②の不等式を解くと　$x<\dfrac{a+3}{2}$　……(イ)
(ア)，(イ)の共通範囲において整数 x が４個存在するのは，下図の場合である。



よって，図より　$7<\dfrac{a+3}{2}\leqq 8$　　ゆえに　$11<a\leqq 13$　答

(9)　すべての実数 x に対して，２次不等式 $ax^2+(1-2a)x+4a>0$ が成り立つのは，関数 $y=ax^2+(1-2a)x+4a$ として考えると…

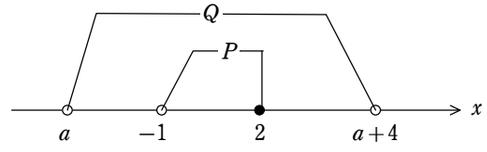


$a>0$ かつ $ax^2+(1-2a)x+4a=0$ の判別式 $D<0$ となればよい。

よって，$D=(1-2a)^2-4\times a\times 4a=-12a^2-4a+1<0$　より
$12a^2+4a-1>0$　$(6a-1)(2a+1)>0$　より
$a<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}<a$ を得る。これと　$a>0$ より　　$a>\dfrac{1}{6}$　答

別解　$a>0$ かつ頂点の y 座標 >0 でも解くことができる。

(10)　２つの条件 p，q を満たすもの全体の集合を $P=\{x\mid -1<x\leqq 2\}$，
$Q=\{x\mid a<x<a+4\}$ とする。
このとき，命題「$p\Rightarrow q$」が真となればよい。



図より，　$a\leqq -1$　かつ　$2<a+4$　となればよい。
よって，　$-2<a\leqq -1$　答

2 ＜必須問題＞　2次方程式

2次方程式 $x^2-2px+2p+1=0$ について，次の各問いに答えなさい。

(1)　$x=3$ を解にもつような定数 p の値を求めなさい。

(2)　異なる2つの正の解をもつような定数 p の値の範囲を求めなさい。

(3)　正の解と負の解を1つずつもつような定数 p の値の範囲を求めなさい

【出題のねらい】
(1)　方程式の解という概念が理解できているか。
(2)　(3)　方程式の解をグラフを利用して考えることができるか。
また，グラフから条件を読み取ることができるか。

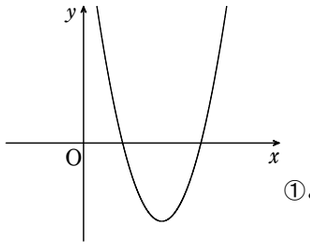
＜解答・解説＞

$f(x)=x^2-2px+2p+1$ として考える。

$=(x-p)^2-p^2+2p+1$　より　頂点 $(p,\ -p^2+2p+1)$　軸 $x=p$

(1)　$x=3$ を方程式に代入すると，　$10-4p=0$　よって，$p=\dfrac{5}{2}$　答

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの正の解を持つための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる2点で交わればよい。



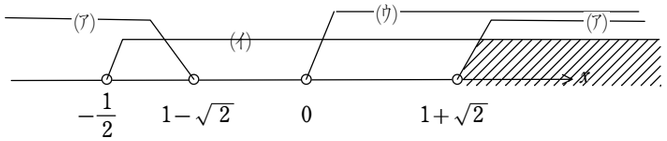
図より，
$D>0$ …①　　$f(0)>0$ …②
軸 $x=p>0$ …③　となる。

①より　$\dfrac{D}{4}=(-p)^2-(2p+1)=p^2-2p-1>0$

$p<1-\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}<p$ …(ア)

②より　$f(0)=2p+1>0$　　$p>-\dfrac{1}{2}$ …(イ)　　③より　$p>0$ …(ウ)

よって(ア)～(ウ)の共通範囲を求めると下図より　　$p>1+\sqrt{2}$　　答



(3)　(2)と同様に考えて，$f(0)=2p+1<0$ となればよい。

よって，　$p<-\dfrac{1}{2}$　　答

3 ＜必須問題＞　2次関数の応用

関数 $y=(-x^2+2x+3)^2-6(-x^2+2x+3)+5\ (-1\leqq x\leqq 2)$ …… ① について，次の各問いに答えなさい。

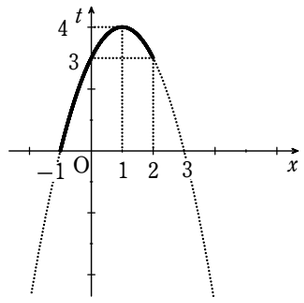
(1)　$t=-x^2+2x+3$ とおくとき，t の値の範囲を求めなさい。

(2)　この関数①の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの x の値も答えなさい。

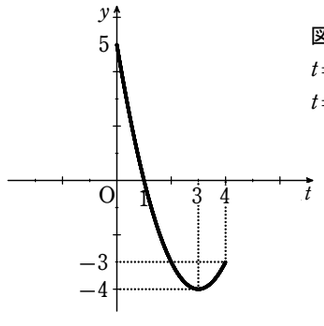
【出題のねらい】
(1)　置き換えによって変化する値の範囲を考えることができるか。
(2)　x の4次関数から，t の2次関数へ変形することで，もとの関数の最大値と最小値を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1)　$t=-(x-1)^2+4$ と変形できる。ここで，$-1\leqq x\leqq 2$ に注意して t の値の範囲を求めると，図より　　$0\leqq t\leqq 4$　　答



(2)　①は　$0\leqq t\leqq 4$ のとき，$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$　と変形できるので，



図より，
$t=0$ のとき　最大値5
$t=3$ のとき　最小値−4　だから

$\begin{cases} x=-1 \text{ のとき，最大値 } 5 \\ x=0,2 \text{ のとき，最小値 } -4 \end{cases}$　　答

4 【選択問題】　＜図形と計量＞

(1)　θ を鈍角とする。$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の各問いに答えなさい。

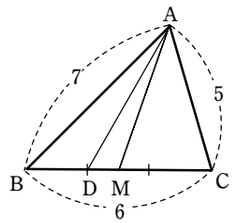
(ア)　$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(イ)　$\cos(180°-\theta)$ の値を求めなさい。

(2)　△ABCにおいて，AB=7，BC=6，CA=5とし，辺BCの中点をM，辺BC上のBD:DC=1:2となるような点をDとする。このとき，次の各問いに答えなさい。

(ア)　AMの長さを求めなさい。

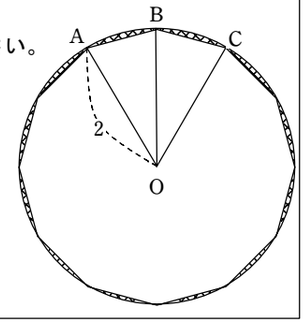
(イ)　ADの長さを求めなさい。



(3)　点Oを中心とする半径2の円に内接する正12角形を考える。次の各問いに答えなさい。

(ア)　△ABCの面積を求めなさい。

(イ)　弦ABと点Cを含まない弧ABで囲まれた部分の面積を求めなさい。



【出題のねらい】
(1)　三角比の相互関係や補角の公式を活用できるか。
(2)　さまざまな三角形において，余弦定理の活用ができるか。
(3)　正多角形の基本的な性質が利用できるか。さらに，正弦定理・余弦定理や面積の公式を利用することができるか。

＜解答・解説＞

(1)　(ア)　相互関係より，　$\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

ここで，θ は鈍角なので　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$　また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ だから

$\tan\theta=-2\sqrt{2}$　　答

(イ)　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ より　　$\cos(180°-\theta)=\dfrac{1}{3}$　　答

(2) (ア) △ABC において余弦定理より

$\cos B=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{5}{7}$ ……※　この値を用いて△ABM において

余弦定理より

$AM^2=AB^2+BM^2-2\cdot AB\cdot BM\cos B$

$=49+9-2\cdot7\cdot3\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)=28$　AM＞0 より　$AM=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$　答

別解　中線定理を用いる。

△ABC において，BC の中点を M としたとき，次の等式が成り立つ。

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

(イ) (ア) と同様にして，△ABD において余弦定理より

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cos B$

$=49+4-2\cdot7\cdot2\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)=33$　AD＞0 より　$AD=\sqrt{33}$　答

(3) (ア) 正 12 角形の分割した 1 つの中心角は …… $360^\circ\div12=30^\circ$ となるので

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin30^\circ=1$　は明らか。

ここで，四角形 OABC $=2\times\triangle OAB$ で，△OAC は 1 辺 2 の正三角形である。

ゆえに，求める△OAC の面積を S とすると……

$S=$四角形 OABC $-\triangle OAC=2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=2-\sqrt{3}$　答

参考　1 辺の長さ a の正三角形の面積 S は……$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ である。

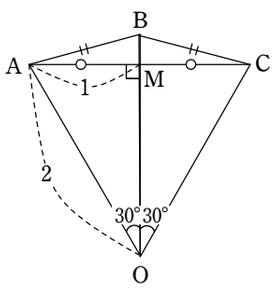
また，高さ h とすると……$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　となる。

別解　辺 AC の中点を M とする。　OA＝OB＝OC＝2 は明らか。

また，AM＝1，∠AOM＝30° より　OM $=\sqrt{3}$ が言える。

よって，BM＝OB－OM $=2-\sqrt{3}$ である。

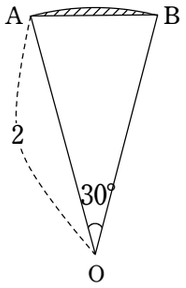
△ABC の面積 $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BM=\dfrac{1}{2}\times2\times(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$　答



(イ) 扇形 OAB の面積は ……　$\pi\times2^2\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi}{3}$ である。

また，△OAB の面積は ……　$\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin30^\circ=1$ なので

斜線部分の面積は，扇形 OAB－△OAB $=\dfrac{\pi}{3}-1$ となる。



ゆえに，求める面積は ……

$\dfrac{\pi}{3}-1$　答

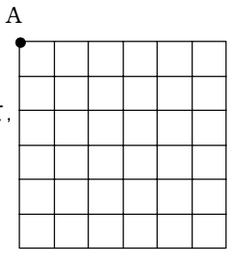
5【選択問題】　＜場合の数と確率＞

(1) ONとOFFになるスイッチが 1 列に並んで 5 個ある。このスイッチの入れ方について次の各問いに答えなさい。

(ア) 5 個のスイッチの入れ方は全部で何通りあるか。ただし，5 個すべてがONまたは OFF になる場合は除く。

(イ) 3 個以上のスイッチをOFF にする方法は全部で何通りあるか。

(2) 図のように，7 本の平行な線分と，それらと垂直に交わる 7 本の平行な線分がある。これらの線分のうち 4 本で囲まれる四角形について，次の各問いに答えなさい。



(ア) すべての四角形の個数を求めなさい。

(イ) 図の点Aを含まない四角形の個数を求めなさい。

(3) 血液型が A 型，B 型のどちらかである 100 人を調べたところ，男子 64 人，女子 36 人で，そのうち A 型の人は男子 39 人，女子 13 人である。このとき，次の確率を求めなさい。

(ア) この中から選ばれた 1 人が A 型である確率

(イ) この中から選ばれた 1 人が A 型のとき，その人が女子である確率

【出題のねらい】

(1) 重複順列と組合せの考えが理解できているか。

(2) 組合せの考えが理解できているか。また，点 A を含まない場合について四角形全体の個数から考えることができるか。

(3) 確率の基本や条件付き確率の考えが理解できているか。

＜解答・解説＞

(1) (ア) 1 つのスイッチの入れ方が，ON とOFF の 2 通りある。

これらのスイッチが 5 個あるので，重複順列の考えより

$2^5=32$ 通り　これから，すべて ON とOFF の 2 通りを除いて

$32-2=30$ 通り　答

(イ)「ONになるのが 0 個」，「ONになるのが 1 個」と「ONになるのが 2 個」の 3 つの場合だけである。これらは，どの 2 つも互いに排反である。

ONになるのが 0 個の場合 ……1 通りは明らか。

ONになるのが 1 個の場合 …… 選ばれた 1 つのスイッチをONにする。

よって　5 通り

ONになるのが 2 個の場合 …… 選ばれた 2 つのスイッチをONにする。

その選び方は，$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ 通り

ゆえに求める方法は，　1＋5＋10＝16 通り　答

(2) (ア) 縦 7 本から 2 本を選ぶ方法は，$_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$ 通り

横も同様に選ぶので，四角形の個数は …… $21\times21=441$ 個　答

(イ) 点A を含む四角形には，点A を含む線分が縦方向と横方向にそれぞれ 1 本ずつ含まれる。よって，残りもう 1 本の線分の選び方が縦方向，横方向で 6 通りずつあるので …… $6\times6=36$ 個

ゆえに，求める点Aを含まない四角形の個数は　$441-36=405$ 個　答

(3) 100 人の結果を表にまとめると，図のようになる。

血液型＼性別	男子	女子	計
A 型	39	13	52
B 型	25	23	48
計	64	36	100

(ア) 表より

求める確率は ……　$\dfrac{52}{100}=\dfrac{13}{25}$　答

(イ) 表より

求める確率は ……　$\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$　答

別解　条件付き確率 $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ でも解くことができる。