

<必須問題>

- [1] (1) ねらい 解の公式を使うことができるか。

$x^2 - 5x + 3 = 0$ において、解の公式より

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

- (2) ねらい 展開できるか。

$$(a+b)^2(a-b)^2 = (a^2-b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

- (3) ねらい ある文字に着目して因数分解できるか。

$$\begin{aligned} (\text{ア}) \quad & 2x^2y + x - 3xy - 2y - 2 = y(2x^2 - 3x - 2) + x - 2 \\ & = y(2x+1)(x-2) + x - 2 = (x-2)\{y(2x+1) + 1\} = (x-2)(2xy + y + 1) \end{aligned}$$

ねらい 工夫して因数分解できるか。

$$\begin{aligned} (\text{イ}) \quad & 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - y - 3 \\ & = 2x^2 - (4y-1)x + 2y^2 - y - 3 = 2x^2 - (4y-1)x + (2y-3)(y+1) \\ & = (2x - (2y-3))(x - (y+1)) = (2x - 2y + 3)(x - y - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{ウ}) \quad & x^4 - 14x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 16x^2 = (x^2 + 1)^2 - (4x)^2 \\ & = \{(x^2 + 1) + 4x\}\{(x^2 + 1) - 4x\} = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

- (4) ねらい 分母を有理化して計算できるか。

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} + \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} = \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

$$AB = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{5 - 3}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = 8^2 - 2 = 62$$

- (5) ねらい 循環小数から分数にできるか。

$$x = 0.\dot{1}\dot{7} \dots \textcircled{1} \text{とおくと } 100x = 17.\dot{1}\dot{7} \dots \textcircled{2} \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} \text{より } 99x = 17 \quad x = \frac{17}{99}$$

- (6) ねらい 平方根の性質と絶対値記号のはずし方を理解し、計算できるか。

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \text{ より } |x-1| = |x|$$

① $x < 0$ のとき、 $|x-1| = |x|$ より $-(x-1) = -x$ を満たす x は存在しない。

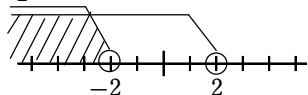
② $0 \leq x < 1$ のとき、 $|x-1| = |x|$ より $-(x-1) = x$ を解くと $x = \frac{1}{2}$

③ $x \geq 1$ のとき、 $|x-1| = |x|$ より $x-1 = x$ を満たす x は存在しない。

①～③より $x = \frac{1}{2}$

- (7) ねらい 分数や絶対値を含んだ不等式の計算ができるか。

$$(\text{ア}) \quad \begin{cases} 5x < 3x + 4 \\ 4x - 2 < x - 8 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x < -2 \end{cases} \quad \text{したがって} \quad x < -2$$

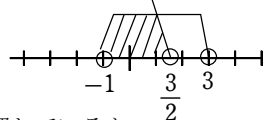


$$(\text{イ}) \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + 2 < \frac{x+11}{5} \quad \dots \textcircled{1} \\ |x-1| < 2 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の両辺を15倍して整理すると $5x + 30 < 3x + 33$ よって $x < \frac{3}{2}$

②より $-2 < x - 1 < 2$ よって $-1 < x < 3$

したがって $-1 < x < \frac{3}{2}$



- (8) ねらい 不等式が計算でき、自然数の範囲を理解しているか。

$\sqrt{2} + 1$ の整数部分を a 、小数部分を b とすると、 $1 < \sqrt{2} < 2$ より、

$$a = 2, \quad b = \sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$$

$$a + \frac{1}{b} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 2 + \sqrt{2} + 1 = 3 + \sqrt{2}$$

- (9) ねらい 題意を読み取り、式を立て、計算できるか。

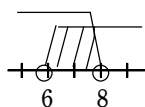
りんごを x 人で分けるとすると、 $6x + 36 < 12x \dots \textcircled{1}$ 、 $6x + 36 > 12(x-1) \dots \textcircled{2}$

①より、 $36 < 6x$ よって、 $x > 6$

②より、 $36 + 12 > 6x$ よって、 $x < 8$

①、②より、 $6 < x < 8$ x は自然数なので $x = 7$

求めるりんごの個数は $6 \times 7 + 36 = 42 + 36 = 78$ 個



- (10) ねらい 共通部分、和集合、ド・モルガンの法則などを理解し、利用できるか。

$$A = \{x \mid 2 < x < 7\}, \quad B = \{x \mid 3 < x < 8\} \text{ より } A \cap B = \{x \mid 3 < x < 7\}$$

$$\text{よって } C = \overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{x \mid x \leq 3, 7 \leq x\}$$

ゆえに $A \cap C = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$

- (11) ねらい 命題と条件を理解しているか。

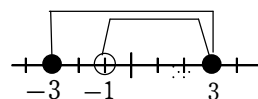
$$P = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\},$$

$$Q = \{x \mid |x-1| < 2\} = \{x \mid -2 < x-1 < 2\} = \{x \mid -1 < x < 3\} \quad \text{とおくと}$$

$P \supset Q$ より集合 P, Q を満たす条件をそれぞれ p, q で表すと

命題 $q \Rightarrow p$ は真より、

$-3 \leq x \leq 3$ は、 $|x-1| < 2$ であるための（イ）必要条件であるが十分条件でない



- [2] <2次関数>

- (1) ねらい 記号を理解し、代入できるか。

$$f(x) = x^2 - 3ax + 5 \text{ なので}$$

$$f(2) = 2^2 - 3a \times 2 + 5 = 9 - 6a$$

- (2) ねらい 放物線の平行移動について理解できているか。

放物線 $y = x^2 + x$ を平行移動して、頂点が直線 $y = 2x$ 上にあるから、定数 a を用いて、平行移動後の放物線は、 $y = (x-a)^2 + 2a$ と表され、点 $(2, 3)$ を通るから、 $3 = (2-a)^2 + 2a = 3 - 4a + a^2 + 2a = a^2 - 2a + 4$ より、 $a^2 - 2a + 1 = 0$ となり、 $a = 1$

ゆえに、求める放物線の方程式は $y = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

- (3) ねらい (ア) 2次関数の頂点の座標を求める事ができるか。

(イ) 定義域が定められたときに2次関数の最小値を求める事ができるか。

$$(\text{ア}) \quad f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$$

よって、頂点の座標 $(a, -a^2 + a + 2)$

(イ) $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$ について $a > 0$ より、

① $0 < a \leq 3$ のとき $f(x)$ の最小値を $m = -a^2 + a + 2$ ($x = a$ のとき)

② $3 < a$ のとき $f(x)$ の最小値を $m = 3^2 - 2a \times 3 + a + 2 = 11 - 5a$ ($x = 3$ のとき)

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{より } m = \begin{cases} -a^2 + a + 2 & (0 < a \leq 3 \text{ のとき}) \\ 11 - 5a & (3 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (4) ねらい (ア) 置き換えた後の定義域を求める事ができるか。

(イ) 置き換えを利用して、最小値を求める事ができるか。

(ア) $t = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ よって、 t のとり得る値の範囲は $t \geq -1$

(イ) $f(x) = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) - 3$ において、 $t = x^2 - 2x$ とおくと、

$f(t) = t^2 + 4t - 3$ と表され、(ア)より定義域 $t \geq -1$ において、

$f(t)$ の最小値を求めればよいから、

$$f(t) = t^2 + 4t - 3 = (t+2)^2 - 4 - 3 = (t+2)^2 - 7 \text{ より、}$$

$$t = -1 \text{ のとき、最小値 } f(-1) = (-1)^2 + 4 \times (-1) - 3 = -6$$

そのときの x の値は、 $-1 = x^2 - 2x$ より、 $(x-1)^2 = 0$ ゆえに $x = 1$

- [3] <場合の数>

- (1) ねらい (ア) 0を含む6個の数字から異なる4個の数字を用いて4桁の整数の個数を求める事ができるか。(イ) 条件を満たす整数を数え上げることができるか。

(ア) 6個の数字 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ から異なる4個を並べて4桁の整数を作るので千の位の数に0以外の5通り、千の位で用いた数以外の5個の数字から異なる3個を選び千、百、十の位に並べるので ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りとなり、4桁の整数は $5 \times 60 = 300$ (個) できる。

(イ) 3420以上の整数は千の位が4, 5のとき、 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (通り) ずつできる。千の位が3で百の位が5のとき、 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (通り) でき、千の位が3で百の位が4のとき、3450, 3451, 3452の3通りできる。また、千の位が3で百の位が4、十の位が2のとき、3420, 3421, 3425の3通りできるから、3420以上の整数は、 $60 \times 2 + 12 + 3 + 3 = 138$ (通り) できる。

- (2) ねらい (ア) (イ) 条件を満たす場合の数を求める事ができるか。

(ア) 1から9までの整数から、異なる3つの数を取り出したとき、少なくとも1つは偶数が出る場合は、すべての場合の数から、3つとも奇数が出る場合を引くとよいから、

$${}_9C_3 - {}_5C_3 = 84 - 10 = 74 \text{ (通り)}$$

(イ) 最小の数が3より、残り2つの数は、4～9までの6つの数から選ぶから ${}_6C_2 = 15$ (通り)

(3) ねらい (ア) 条件を満たす順列を求めることができるか。
(イ) 条件を満たす円順列を求めることができるか。
(ア) 男子4人が1列に並び、その間または両端の5か所のうち3か所に女子が1人ずつ入るので、求める並び方は
 $4! \times {}_5P_3 = 1440$ 通り
(イ) 円形に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は、
円形に男子を4人並ぶ方法が $(4-1)! = 6$ (通り) で、
男子の間の4か所から3か所を選んで女子が並べばよいので、
 ${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ (通り)
よって、求める並び方は $6 \times 24 = 144$ (通り)

