

1 < 必須問題 > 【小問集合】

- 次の各問いに答えなさい。
- (1) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)$ を展開しなさい。
- (2) $3x^2+5xy-2y^2-x+5y-2$ を因数分解しなさい。
- (3) $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき、
- (ア) x^2+y^2 の値を求めなさい。
- (イ) x の整数部分を a , 小数部分を b とするとき、 b^2+ab の値を求めなさい。
- (4) 不等式 $3x-5\geq x+a$ を満たす実数 x のうちで、最小の整数が 3 であるとき、定数 a の値の範囲を求めなさい。
- (5) 不等式 $|2x-3|>5$ を解きなさい。
- (6) 1 桁の自然数全体からなる集合を全体集合 U とする。 U の部分集合 A, B が $A\cap B=\{1, 9\}$, $\overline{A}\cap B=\{6, 8\}$, $\overline{A\cup B}=\{2, 4, 7\}$ を満たすとき、集合 A を求めなさい。
- (7) 実数 x, y について、次の に最も適する語句を下の ① ~ ④ から選びなさい。
- $x+y$ は有理数であることは、 x も y も有理数であるための 。
- ① 必要条件であるが十分条件でない
- ② 十分条件であるが必要条件でない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない
- (8) 2 次関数 $y=x^2-ax+b$ のグラフが点 (1, 1) を通り、最小値が -3 であるとき、 a, b の値を求めなさい。ただし、 a, b は正の定数とします。
- (9) 2 次不等式 $ax^2+bx+2>0$ の解が $-2<x<\frac{1}{3}$ であるとき、定数 a, b の値を求めなさい。

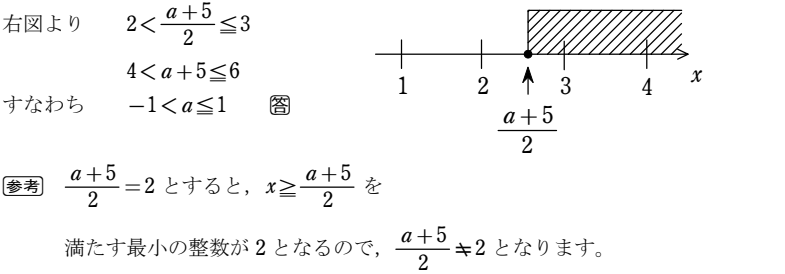
【出題のねらい】

- (1) 式の特徴に着目して、置き換えを含む展開の公式が利用できるか。
- (2) 1 つの文字に着目して式を整理して、因数分解ができるか。
- (3) (ア) 分母を有理化し、基本対称式 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ を用いて値を求めることができるか
- (イ) 無理数の整数部分、小数部分を調べ、書き表すことができるか。
- (4) 指定された解に適する定数の値の範囲を求めることができるか。
- (5) 絶対値を含む不等式を解くことができるか。
- (6) 共通部分、和集合、補集合の意味を理解し、2 つの集合の関係がわかるか。
- (7) 命題の真偽および必要条件・十分条件を理解しているか。
- (8) 条件を満たす 2 次関数を求めることができるか。
- (9) 2 次不等式の解を 2 次関数の概形と関連させて、解くことができるか。

< 解答・解説 >

- (1) (与式) $= (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = (x^2-4)(x^2-9) = x^4-13x^2+36$ 図
- (2) (与式) $= 3x^2+(5y-1)x-(2y^2-5y+2)$
 $= 3x^2+(5y-1)x-(2y-1)(y-2)$
 $= \{x+(2y-1)\}\{3x-(y-2)\}$
 $= (x+2y-1)(3x-y+2)$ 図
- (3) (ア) x, y の分母を有理化すると、
 $x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$
 $y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$
であるから、
 $x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4, xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
よって、 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=16-2=14$ 図
- (イ) $1<\sqrt{3}<2$ より $3<2+\sqrt{3}<4$ すなわち $3<x<4$
したがって、 x の整数部分 a , 小数部分 b はそれぞれ
 $a=3, b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$
よって、
 $b^2+ab=(\sqrt{3}-1)^2+3(\sqrt{3}-1)=4-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3$
 $=\sqrt{3}+1$ 図
- 【参考】 (小数部分 = (もとの数) - (整数部分)) となります。
- (4) 与えられた不等式を変形すると $3x-5\geq x+a$
 $2x\geq a+5$
よって $x\geq\frac{a+5}{2}$... ①

① を満たす実数 x のうちで、最小の整数が 3 となるのは



- (5) $|2x-3|>5$ より $2x-3<-5, 5<2x-3$
よって、 $x<-1, 4<x$ 図
- (6) $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A\cap B=\{1, 9\}$, $\overline{A}\cap B=\{6, 8\}$,
 $\overline{A\cup B}=\{2, 4, 7\}$
より、右図となる。
したがって、
 $\overline{A}=\{2, 4, 6, 7, 8\}$ であるから
求める集合 A は
 $A=\{1, 3, 5, 9\}$ 図
-
- (7) 命題「 $x+y$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x も y も有理数」 は偽。
(反例： $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$)
命題「 x も y も有理数」 $\Rightarrow$ 「 $x+y$ は有理数」 は真。
よって、 $x+y$ は有理数であることは、 x も y も有理数であるための必要条件であるが、十分条件ではない。 ① 図
- (8) 2 次関数 $y=x^2-ax+b$ のグラフは点 (1, 1) を通るので、
 $1=1^2-a+b$ すなわち $a=b$... ①
- また、 $y=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$
となるから、この関数のグラフは下に凸の放物線であるから
 $x=\frac{a}{2}$ で最小値 $-\frac{a^2}{4}+b$ をとる。
- この最小値が -3 であるから $-\frac{a^2}{4}+b=-3$
- ① より $-\frac{a^2}{4}+a=-3$ 整理して $a^2-4a-12=0$
- 因数分解して $(a-6)(a+2)=0$ よって $a=6, -2$
 $a>0$ より $a=6$
① より $b=6$
以上のことから $a=6, b=6$ 図

- (9) 条件から、2 次関数 $y = ax^2 + bx + 2$ のグラフは、
 $-2 < x < \frac{1}{3}$ のときだけ x 軸より上側にある。

グラフは上に凸の放物線であるから $a < 0$

2 点 $(-2, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$ を通るから $4a - 2b + 2 = 0 \dots\dots ①$,

$$\frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b + 2 = 0 \dots\dots ②$$

①, ② を解いて $a = -3, b = -5$ 図
 $(a < 0$ を満たす。)

別解 $-2 < x < \frac{1}{3}$ を解とする 2 次不等式の 1 つは $(x+2)(x-\frac{1}{3}) < 0$

$$\text{すなわち } x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} < 0$$

両辺に -3 を掛けて $-3x^2 - 5x + 2 > 0$

$ax^2 + bx + 2 > 0$ と係数を比較して $a = -3, b = -5$ 図

2 < 必須問題 > 【2 次関数】

a を実数の定数とし、関数 $f(x) = x^2 - 2(a-2)x + 4(a-1)$ とする。

放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線の方程式を $y = g(x)$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めなさい。
- $0 \leq a \leq 1$ のとき、 $-2 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めなさい。
- $a = -1$ のとき、放物線 $y = f(x)$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。
- 放物線 $y = g(x)$ の方程式を求めなさい。
- 放物線 $y = g(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わるときの a の値の範囲を求めなさい。
- 方程式 $g(x) = 0$ の異なる 2 つの解がともに -2 より大きいときの a の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

- 定数が含まれた 2 次式を平方完成して頂点の座標を求めることができるか。
- 放物線の軸と定義域の位置関係を調べ、最大値を求めることができるか。
- 2 次方程式の解が放物線と x 軸との交点の x 座標であることを理解し、解の公式を用いて切り取る線分の長さを求めることができるか。
- グラフの平行移動を理解し、移動後の放物線の方程式を求めることができるか。
- 2 次方程式の判別式を用いて、2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べることができるか。
- 与えられた条件を満たす 2 次関数のグラフの概略図を考え、定数 a の値の範囲を求めることができるか。

< 解答・解説 >

- $f(x) = x^2 - 2(a-2)x + 4(a-1)$
 $= \{x - (a-2)\}^2 - (a-2)^2 + 4(a-1)$
 $= \{x - (a-2)\}^2 - a^2 + 8a - 8$
よって、頂点の座標は $(a-2, -a^2 + 8a - 8)$ 図

- (1) より $y = f(x)$ は軸が直線 $x = a-2$ の放物線である。
 $0 \leq a \leq 1$ より $-2 \leq a-2 \leq -1$
 $-2 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ のグラフは
右図ようになる。
よって $x = 1$ で最大値をとる。
したがって 最大値は $f(1) = 1 - 2(a-2) + 4(a-1)$
 $= 2a + 1$

以上のことから

$x = 1$ のとき、最大値 $2a + 1$ 図

- $a = -1$ のとき $f(x) = x^2 + 6x - 8$
 x 軸との交点の x 座標は $x^2 + 6x - 8 = 0$ の解であるから
解の公式から $x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \cdot (-8)} = -3 \pm \sqrt{17}$
よって、 x 軸との交点の座標は $(-3 + \sqrt{17}, 0), (-3 - \sqrt{17}, 0)$ であるから
切り取る線分の長さは $(-3 + \sqrt{17}) - (-3 - \sqrt{17}) = 2\sqrt{17}$ 図

- 放物線 $y = g(x)$ は放物線 $y = f(x)$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -4 だけ平行移動したものであるから、 $y = g(x)$ の頂点の座標は (1) から
 $(a, -a^2 + 8a - 12)$
よって $g(x) = (x-a)^2 - a^2 + 8a - 12 (= x^2 - 2ax + 8a - 12)$ 図

- 2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を D とすると、(4) から
 $\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \cdot (8a - 12) = a^2 - 8a + 12 = (a-2)(a-6)$
 $y = g(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は $D > 0$
よって $(a-2)(a-6) > 0$
したがって $a < 2, 6 < a$ 図

- 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解は $y = g(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標であるから、 $y = g(x)$ のグラフが右図のようになればよい。
そのためには

- 判別式 $D > 0$
- (軸) > -2
- $g(-2) > 0$

の条件を満たせばよい。

(i) について

(5) より $a < 2, 6 < a \dots ①$

(ii) について

(4) より $y = g(x)$ の軸は直線 $x = a$ であるから $a > -2 \dots ②$

(iii) について

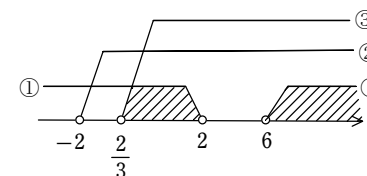
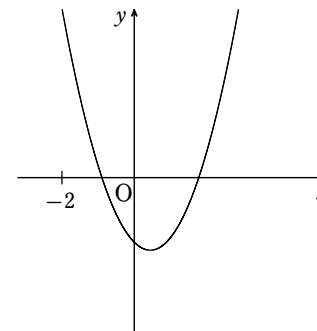
$$g(-2) = (-2)^2 + 4a + 8a - 12 = 12a - 8$$

$$g(-2) > 0 \text{ より } 12a - 8 > 0$$

$$\text{すなわち } a > \frac{2}{3} \dots ③$$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて、

$$\frac{2}{3} < a < 2, 6 < a \text{ 図}$$



③＜選択問題＞ 【図形と計量】

△ABCにおいて、 $AB=2$ ， $AC=\sqrt{19}$ ， $\angle ABC=120^\circ$ である。次の問いに答えなさい。

- (1) $\cos 120^\circ$ の値を求めなさい。
- (2) 辺 BC の長さを求めなさい。
- (3) △ABC の面積を求めなさい。
- (4) $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC との交点を D とするとき、線分 BD の長さを求めなさい。
- (5) (4) の点 D について、点 A から線分 BD に引いた垂線と線分 BD との交点を E とするとき、線分 CE の長さを求めなさい。
- (6) (4) の点 D について、△ABC を線分 BD で折り曲げ、△ABD と △BCD の 2 つを面とする四面体 ABCD を作る。四面体 ABCD の体積が最大となるときの体積を求めなさい。

【出題のねらい】

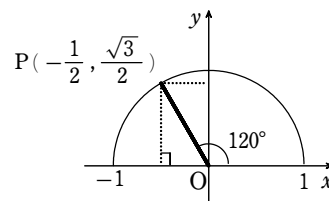
- (1) 鈍角の三角比の値を求めることができるか。
- (2) 2 辺と 1 角が与えられたとき、余弦定理を用いて残りの 1 辺を求めることができるか。
- (3) 正弦を用いて、三角形の面積を求めることができるか。
- (4) (3) で求めた面積を利用して、角の二等分線の長さを求めることができるか。
- (5) 与えられた直角三角形から△BCE の 1 辺の長さを求め、余弦定理を用いて残りの 1 辺の長さを求めることができるか。
- (6) 平面上の図形(三角形)をある線分で折り曲げて、空間図形(四面体)を考え、その体積が高さによって変化することがわかるか。

＜解答・解説＞

- (1) 半径 1 の半円において、 120° の動径を考えると

P の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって、 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 図



- (2) △ABC において余弦定理を用いて

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$$

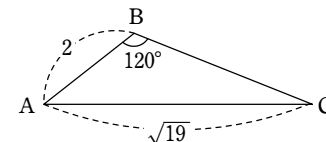
$$(\sqrt{19})^2 = 2^2 + BC^2 - 2 \cdot 2 \cdot BC \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$19 = 4 + BC^2 + 2BC$$

$$\text{すなわち } BC^2 + 2BC - 15 = 0$$

$$(BC + 5)(BC - 3) = 0$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 3 \quad \text{図}$$



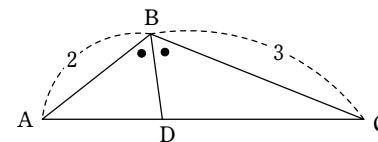
$$(3) \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{図}$$

$$\begin{aligned} (4) \triangle ABC &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \sin 60^\circ (AB + BC) \\ &= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (2 + 3) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{4} BD \end{aligned}$$

$$(3) \text{ より } \triangle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ であるから}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} BD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } BD = \frac{6}{5} \quad \text{図}$$



$$(5) \triangle ABE \text{ は直角三角形であるから } \cos 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} = \frac{BE}{2} \text{ から } BE = 1$$

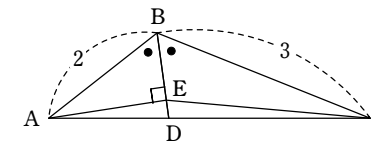
△BCE に余弦定理を用いて

$$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2 \cdot BC \cdot BE \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 7$$

$$CE > 0 \text{ より } CE = \sqrt{7}$$

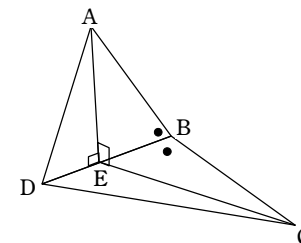


- (6) 四面体 ABCD の底面を △BCD とすると高さは点 A から平面 BCD に下した垂線となる。底面積 △BCD は一定であるから、四面体の体積が最大となるのは、高さが最大となるときである。(平面 ABD) ⊥ (平面 BCD) のとき、高さは最大となるから、線分 AE が高さになればよい。

$$\triangle ABE \text{ は直角三角形であるから } \sin 60^\circ = \frac{AE}{AB}$$

$$\text{よって } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AE}{2} \text{ から } AE = \sqrt{3}$$

$$\text{また、} \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{10}$$



したがって、四面体 ABCD の体積が最大となるときの体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{10} \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{10} \quad \text{図}$$

4 <選択問題> 【場合の数と確率】

(1) 8人（大人2人，子ども6人）が次のように座る方法は何通りあるか求めなさい。ただし，回転して並びが同じになれば，同じ座り方とみなします。

- (ア) 円形の8人席のテーブルに着席する。
- (イ) 円形の8人席のテーブルに，大人2人が隣り合って着席する。
- (ウ) 円形の6人席のテーブルに，大人2人が膝の上にそれぞれ子ども1人をのせて着席する。（図1は座り方の例です。）
- (エ) 正方形の8人席のテーブルに，各辺に2人ずつ並んで着席する。（図2）

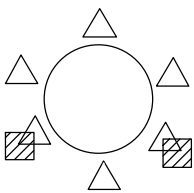


図1

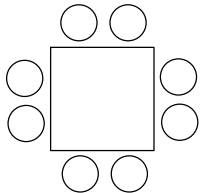


図2

（図1：▨は大人，△は子ども，図2：○は座席を表します。）

(2) X，Yの2つの信号をそれぞれ確率0.6，0.4で送信する。しかし，受信時に正しくX，Yの信号を受け取る確率は0.9であり，残りの0.1の確率で逆の信号を受け取ってしまう。このとき，次の確率を求めなさい。

- (ア) 受信した信号がXである確率
- (イ) 信号Xを受信したとき，送信信号がXである確率

【出題のねらい】

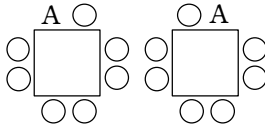
- (1) (ア) 円順列の総数を求めることができるか。
- (イ) 条件のある円順列の総数を求めることができるか。
- (ウ) 条件から具体的な座り方を考え，円順列の総数を求めることができるか。
- (エ) 具体的な座り方を考察し，円順列の考え方に帰着させて，求める順列を求めることができるか。
- (2) (ア) 互いに排反な事象の確率を求めることができるか。
- (イ) 条件付き確率を求めることができるか。

<解答・解説>

- (1) (ア) 8人の円順列を考えて $(8-1)! = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ (通り) 図
- (イ) 大人2人をひとまとめにする。
ひとまとめにした大人と子ども6人の円順列の総数は $(7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ (通り)
そのどの場合に対しても，ひとまとめにした大人2人の並び方は $2! = 2 \cdot 1 = 2$ (通り) によって，座り方の総数は，積の法則により $720 \times 2 = 1440$ (通り) 図
- (ウ) 大人2人の膝の上にいる子どもの選び方は ${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ (通り)
その選ばれた子ども2人が大人2人の膝の上にいる方法は $2! = 2$ (通り)
大人2人と残った子ども4人の円順列の総数は $(6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り) したがって，求める座り方は $15 \times 2 \times 120 = 3600$ (通り) 図

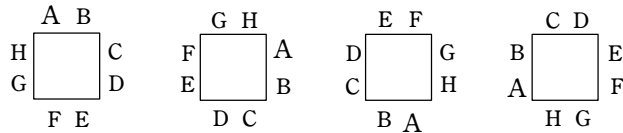
別解 子ども6人が円形のテーブルに座る方法は $(6-1)! = 5! = 120$ (通り)
子どもたちが座った6つの座席に大人2人が座る方法は ${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$ (通り)
よって，求める座り方は $120 \times 30 = 3600$ (通り) 図

- (エ) 特定の1人をAとする。
正方形の1辺に対して，Aの座り方は右図のように2通り。
それぞれに対して，残り7人の座り方は $7! = 5040$ (通り) によって，求める座り方は $2 \times 5040 = 10080$ (通り) 図



別解 8人すべてを並べる順列の総数は $8!$ 通り
8人が正方形のテーブルに座るとき，どの座り方についても回転して同じになる座り方が4通りずつあるから $\frac{8!}{4} = 2 \cdot 7! = 2 \times 5040 = 10080$ (通り) 図

参考 8人をA，B，C，D，E，F，G，Hとする。
8人の順列の1つABCDEFGHに対して，Aに着目してAに続く座席を反時計回りに並べると，BCDEFGHとなる座り方が下記のように4通りあります。
このことから別解のような解答となります。

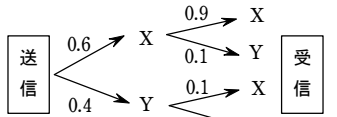


- (2) (ア) Xを送信する確率は $0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，Yを送信する確率は $0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
また，正しく受信する確率は $0.1 = \frac{1}{10}$ ，逆の信号を受信する確率は $0.9 = \frac{9}{10}$ である。

Xを受信するのは右図から

- (i) Xが送信され，正しく受信した場合
(ii) Yが送信され，逆の信号を受信した場合
の2つの場合である。

これらは互いに排反であるから，
 $\frac{3}{5} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{29}{50}$ 図



- (イ) 受信した信号がXである事象をA，送信信号がXである事象をBとする。

(ア) より $P(A) = \frac{29}{50}$

受信信号がXで，送信信号もXである事象は $A \cap B$ であるから，その確率は

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{50}$$

よって，求める確率は $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{27}{50} \div \frac{29}{50} = \frac{27}{29}$ 図