

<必須問題>

① (1) ㊦ 解の公式を使うことができるか。

$x^2-6x+3=0$ において、 解の公式より

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times3}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$$

(2) ㊦ 公式を利用して展開できるか。

$$(a+2b-c)^2=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2\times a\times2b+2\times2b\times(-c)+2\times(-c)\times a$$
$$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$$

(3) ㊦ ある文字に着目して因数分解できるか。工夫して因数分解できるか。

(ア) $1+a^2b+a^2+b=(a^2+1)b+a^2+1=(a^2+1)(b+1)$

(イ) $x^2-y^2+(x+y)z=(x+y)(x-y)+(x+y)z=(x+y)(x-y+z)$

(ウ) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(4) ㊦ (ア) 分母を有理化して計算できるか。

(イ) 無理数の大きさを理解しているか。

(ア) $\frac{-1+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\frac{(-1+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{-3-\sqrt{7}+3\sqrt{7}+7}{9-7}$

$$=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7}$$

(イ) $4<7<9$ より $2<\sqrt{7}<3$ よって $4<2+\sqrt{7}<5$

ゆえに求める小数部分は、 $(2+\sqrt{7})-4=-2+\sqrt{7}$ 「

(5) ㊦ 絶対値記号のはずし方を理解し、計算できるか。

条件より $5<a<8$ なので $4<a$ すなわち $4-a<0$

よって $|4-a|=-(4-a)$

また $8-a>0$ より $|8-a|=8-a$

ゆえに $|4-a|-|8-a|-2a+9=-(4-a)-(8-a)-2a+9=-3$

(6) ㊦ 分数や絶対値を含んだ不等式の計算ができるか。

(ア) $\begin{cases} 8x+4>x+11 \\ 2x+12\geq6x \end{cases}$ よって $\begin{cases} x>1 \\ x\leq3 \end{cases}$ したがって $1<x\leq3$

(イ) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}>\frac{x}{3}+1\cdots\textcircled{1} \\ |x-1|<3\cdots\textcircled{2} \end{cases}$

①の両辺を6倍して整理すると $3x+3>2x+6$ よって $x>3\cdots\textcircled{3}$

②より $-3<x-1<3$ よって $-2<x<4\cdots\textcircled{4}$

したがって③、④より $3<x<4$

(7) ㊦ 不等式が計算でき、自然数の範囲を理解しているか。

$$\frac{a}{5}\leq x\leq\frac{a}{3}$$

を満たす x の整数値が2、3であるとき

$$1<\frac{a}{5}\leq2\text{ かつ }3\leq\frac{a}{3}<4$$

これを解いて $5<a\leq10$ かつ $9\leq a<12$

すなわち $9\leq a\leq10$

(8) ㊦ 題意を読み取り、式を立て、計算できるか。

メンバーの人数を x 人、お菓子の個数を y 個とする。

お菓子を11個ずつ配ると4余るので $y=11x+4\cdots\textcircled{1}$

13個ずつ配ると最後の1人が9個より多いが、全員に13個は配れないから $13(x-1)+9<y<13x\cdots\textcircled{2}$

①を②に代入して整理すると $13x-4<11x+4<13x$

$$13x-4<11x+4\text{ から }x<4\cdots\textcircled{3}$$

また $11x+4<13x$ から $x>2\cdots\textcircled{4}$

③と④の共通範囲は $2<x<4$ ここで x は整数なので $x=3$

よって求めるメンバーの人数は3人

(9) ㊦ 共通部分、和集合、ド・モルガンの法則などを理解し、利用できるか。

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

ここで $\overline{A}=\{11,12,13,\cdots\}$ 、 $\overline{B}=\{b\mid b\text{は奇数}\}$ 、 $\overline{C}=\{c\mid c\text{は3の倍数でない自然数}\}$ なので

$$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{d\mid d\text{は10より大きい奇数で3の倍数でない数}\}$$
$$=\{11,13,17,19,\cdots\}$$

よって、求める数は17

(10) ㊦ 命題と条件を理解しているか。

命題 $p\Rightarrow q$ は成立しない。[反例] $x=b$ 、 $y=a$

命題 $q\Rightarrow p$ は成立する。

よって、 p は q であるための必要条件であるが十分条件でない。

② <2次関数>

(1) ㊦ 記号を理解し、代入できるか。

$$f(x)=x^2-3ax-4\text{ なので}$$
$$f(1)=1^2-3a\times1-4=-3-3a<0\text{ よって }a>-1$$

(2) ㊦ 放物線の対象移動と平行移動について理解できているか。

放物線 $y=3(x-1)^2+2\cdots\textcircled{1}$ の頂点の座標は $(1,2)$

放物線①を x 軸に関して対称移動した放物線を②とする。

放物線②の頂点の座標は $(1,-2)$

放物線②を x 軸方向に -1 、 y 軸方向に3だけ平行移動した放物線を③とする。放物線③の頂点の座標は $(0,1)$

よって、求めるグラフの方程式は $y=-3x^2+1$

(3) ㊦ 2次関数の頂点や軸や x 軸との位置関係を理解しているか。

(ア) $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$

グラフが下に凸の形なので $a>0$ また 軸 $x=-\frac{b}{2a}$ が y 軸の

左側 $(x<0)$ にあるので $-\frac{b}{2a}<0$ よって b は正

(イ) 放物線と x 軸の交点の座標を $(-2,0)$ 、 $(p,0)$ とする。

放物線 $y=f(x)$ が、軸に関して対称であることを考えると、 $p<2$

よって $f(2)=4a+2b+c>0$ ゆえに $4a+2b+c$ は正

(4) ㊦ (ア) グラフの形を理解し、2次関数の頂点の座標を求める事ができるか。

(イ) 定義域が定められたときに2次関数の最小値を理解しているか。

(ア) $f(x)=ax^2-x=a\left(x^2-\frac{1}{a}x\right)=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}$

よって、頂点の座標は $\left(\frac{1}{2a},-\frac{1}{4a}\right)$

$a<0$ よりグラフは上に凸である。

よって最大値は $-\frac{1}{4a}$ そのときの x の値は $x=\frac{1}{2a}$

(イ) $a<0$ より 軸を考えると $x=\frac{1}{2a}<0$ となるので

$1\leq x\leq2$ の範囲では、 $x=2$ において最小値をとるので

条件より考えると $f(2)=-10$

つまり $4a-2=-10$ よって $a=-2$

③ <場合の数>

(1) ㊦ 正の約数の個数と、その約数の総和を求めることができるか。

$200=2^3\times5^2$ より、200の正の約数は、 2^3 の正の約数と、 5^2 の正の約数の積で表される。 2^3 の正の約数は、 $1,2,2^2,2^3$ の4個。 5^2 の正の約数は、 $1,5,5^2$ の3個。

よって200の正の約数の個数は、積の法則により $4\times3=12$ (個)

また、200の正の約数の総和は $(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=465$

(2) ㊦ 数え上げができるか。

樹形図を作成して数え上げる。

よって条件を満たす4桁の整数は2通り

(3) ㊦ 倍数の個数を数えることができ、最大公約数を理解しているか。

$108=2^2\times3^3$ より、108と互いに素な自然数は、 $1\sim108$ の中から、2の倍数、3の倍数を除いたものである。2の倍数は54個、3の倍数は36個、6の倍数は18個であるから $108-(54+36-18)=36$ (個)

(4) ㊦ 順列を考えることができるか。

(ア) 4と7のカードをまとめて1枚と考えると、7枚のカードになるので並べ方は7!通り。ただし、4と7のカードの並べ方が2!通りあるので $7!\times2!=10080$ (通り)

(イ) 5以上のカードと4以下のカードは4枚ずつある。まず、4以下のカードの並べ方が、4!通り。そのおのおのに対して、カードの間とその両端の5つのうちの4つに5以上のカードを並べる並べ方が ${}_5P_4$ 通りである。

よって $4!\times{}_5P_4=2880$ (通り)