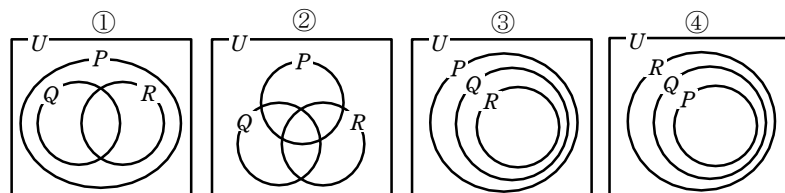


1 <必須問題> 【小問集合】

次の各問いに答えなさい。

- (1) $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2$ を因数分解しなさい。
- (2) (ア) $(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$ を計算しなさい。
(イ) $\frac{10}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}}$ の分母を有理化しなさい。
- (3) 不等式 $|x - 7| \leq 2a \dots ①$ について、次の問いに答えなさい。ただし、 $a > 0$ とする。
(ア) 不等式 ① の解を求めなさい。
(イ) 不等式 ① を満たす整数 x の個数が 5 個となるような a のとりうる値の範囲を求めなさい。
- (4) 条件 p, q, r について、 p は q の必要条件、 r は q の十分条件である。このとき、次の問いに答えなさい。
(ア) 全体集合 U の要素の中で、条件 p, q, r を満たすものの全体の集合をそれぞれ P, Q, R で表すとき、 P, Q, R の関係を表す図は ☐ である。☐ に当てはまるものを下の ①～④ のうちから 1 つ選びなさい。



- (イ) 次の ☐ に最も適する語句を下の ①～④ のうちから 1 つずつ選びなさい。
(i) r は p であるための ☐。
(ii) (r でない) は (p かつ q) でないための ☐。
① 必要条件であるが十分条件でない
② 十分条件であるが必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない
- (5) ある放物線を x 軸に関して対称移動し、次に x 軸方向に -2 、 y 軸方向に 3 だけ平行移動してから、再び x 軸に関して対称移動したところ、放物線 $y = x^2$ が得られた。最初の放物線の方程式を求めなさい。
- (6) 2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x$ がある。 $f(a)$ が関数 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq a$ における最小値となるような定数 a の値の範囲を求めなさい。
- (7) 2 次不等式 $ax^2 + (a+1)x + a < 0$ が、すべての実数 x に対して成り立つような定数 a の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) 1 つの文字に着目して式を整理して、因数分解ができるか。
- (2) (ア) 根号を含む式の計算ができるか。
(イ) 分母の有理化ができるか。
- (3) (ア) 絶対値を含む不等式を解くことができるか。
(イ) 指定された解に適する定数の値の範囲を求めることができるか。
- (4) (ア) 必要条件・十分条件の意味を理解し、2 つの条件を満たすものの集合の包含関係がわかるか。
(イ) (i) 命題の真偽および必要条件・十分条件を理解しているか。
(ii) 対偶を用いて命題の真偽を判定できるか。
- (5) 放物線の平行移動および x 軸に関する対称移動がわかるか。
- (6) 定義域のある 2 次関数のグラフの最小値がわかるか。
- (7) 2 次不等式の解を 2 次関数のグラフの概形と関連させて、定数の値の範囲を求めることができるか。

<解答・解説>

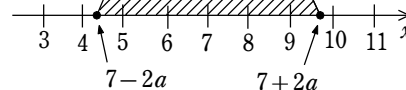
$$\begin{aligned} (1) \quad & 2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + 5y - 2 \\ &= 2x^2 + (5y - 3)x - (3y^2 - 5y + 2) \\ &= 2x^2 + (5y - 3)x - (3y - 2)(y - 1) \\ &= \{2x - (y - 1)\}\{x + (3y - 2)\} \\ &= (2x - y + 1)(x + 3y - 2) \quad \text{図} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -(y-1) \rightarrow -y+1 \\ 1 & & 3y-2 \rightarrow 6y-4 \\ \hline & & 5y-3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (ア) \quad (1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}) = \{(1 + \sqrt{5}) - \sqrt{6}\}\{(1 + \sqrt{5}) + \sqrt{6}\} \\ &= (1 + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 6 \\ &= 2\sqrt{5} \quad \text{図} \end{aligned}$$

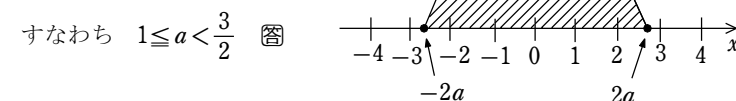
$$\begin{aligned} (イ) \quad & \frac{10}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{6}} = \frac{10(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{(1 + \sqrt{5} - \sqrt{6})(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})} \\ &= \frac{10(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{10\sqrt{5}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})}{10} \\ &= \sqrt{5}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6}) \\ &= \sqrt{5} + 5 + \sqrt{30} \quad \text{図} \end{aligned}$$

- (3) (ア) $a > 0$ であるから $|x - 7| \leq 2a$ より $-2a \leq x - 7 \leq 2a$
よって $-2a + 7 \leq x \leq 2a + 7$ 図
(イ) (ア) より、不等式 ① の解は整数 7 を基準に $\pm 2a$ ($a > 0$) した範囲である。この範囲に含まれる整数の個数が 5 個となればよいから、右図のようになればよい。
すなわち $9 \leq 7 + 2a < 10$



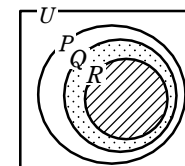
したがって $1 \leq a < \frac{3}{2}$ 図

【別解】 $x - 7 = A$ とすると与えられた不等式の解は $-2a \leq A \leq 2a$
よって、 A のとり得る値の範囲は原点 O を基準に $\pm 2a$ ($a > 0$) した範囲である。この範囲に含まれる整数の個数が 5 個となればよい。
したがって $2 \leq 2a < 3$



- (4) (ア) p は q の必要条件であるから $q \Rightarrow p$ が真である。
よって、 $Q \subset P$ が成り立つ。
また、 r は q の十分条件であるから $r \Rightarrow q$ が真である。
よって、 $R \subset Q$ が成り立つ。
したがって、 $R \subset Q \subset P$ より P, Q, R の関係を表す図は ③ 図
- (イ) (i) (ア) より $R \subset P$ であるから $r \Rightarrow p$ が真である。
よって、 r は p の十分条件であるが、必要条件ではない。(②) 図

(ii) 命題 r の否定を $\bar{r}$ 、(p かつ q) の否定を $\overline{p \cap q}$ とする。
命題 $\bar{r} \Rightarrow (\overline{p \cap q})$ 、 $(\overline{p \cap q}) \Rightarrow \bar{r}$ の対偶はそれぞれ $(p \cap q) \Rightarrow r$ 、 $r \Rightarrow (p \cap q)$
 p は q の必要条件であるから $P \cap Q = Q$ となる。



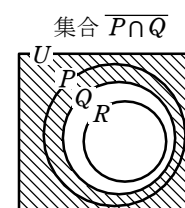
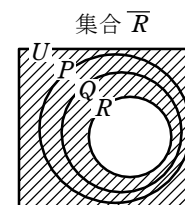
よって $q \Rightarrow r$ 、 $r \Rightarrow q$
 r は q の十分条件であるから $r \Rightarrow q$ が真である ($R \subset Q$)。
よって、もとの命題である $(\overline{p \cap q}) \Rightarrow \bar{r}$ は真である。
したがって、
 $\bar{r}$ は $(\overline{p \cap q})$ の必要条件ではあるが、十分条件ではない。(①) 図

【別解】 $\bar{r}$ を満たすものの全体の集合 $\bar{R}$ と $\overline{p \cap q}$ を満たすものの全体の集合を $\overline{P \cap Q}$ とすると、2 つの集合はそれぞれ右図の斜線部分である。

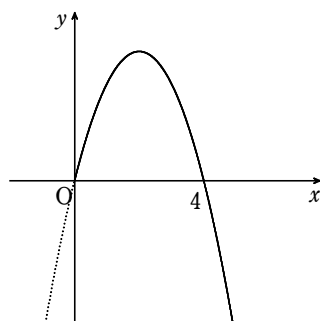
よって、包含関係は $\bar{R} \supset (\overline{P \cap Q})$ であることがわかる。

したがって、 $\bar{r} \Rightarrow (\overline{p \cap q})$ は偽、
 $(\overline{p \cap q}) \Rightarrow \bar{r}$ は真

である。以上のことから
 $\bar{r}$ は $(\overline{p \cap q})$ の必要条件ではあるが、十分条件ではない。(①) 図



- (5) $y=x^2$ を x 軸に関して対称移動すると $-y=x^2$
すなわち $y=-x^2$
 x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動すると $y+3=-(x-2)^2$
すなわち $y=-(x-2)^2-3$
これを x 軸に関して対称移動すると $-y=-(x-2)^2-3$
すなわち $y=(x-2)^2+3$ ㊟
- 【別解】 放物線 $y=x^2$ は上に凸の放物線で、頂点の座標は $(0,0)$ である。
 x 軸に関して対称移動すると
下に凸の放物線となり、頂点の座標は $(0,0)$
 x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動すると
下に凸の放物線で、頂点の座標は $(2,-3)$
これを x 軸に関して対称移動すると
上に凸の放物線で、頂点の座標は $(2,3)$
よって、最初の放物線の方程式は $y=(x-2)^2+3$ ㊟
- (6) 2 次方程式 $f(x)=0$ の解が 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標であるから
 $-x^2+4x=0$ より $-x(x-4)=0$
よって $x=0, 4$
したがって、 $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



- $0 \leq x \leq a$ において $f(x)$ の最小値は
以下の 2 つの場合に分けられる。
- (i) $0 < a < 4$ のとき
 $x=0$ で 最小値 $f(0)$
- (ii) $a=4$ のとき
 $x=0, a(=4)$ で 最小値 $f(a)(=f(0)=f(4))$
- (iii) $4 < a$ のとき
 $x=a$ で 最小値 $f(a)$
- (i),(ii),(iii) より、 $f(a)$ が最小値となる a の値の範囲は $a \geq 4$ ㊟
- (7) 与えられた 2 次不等式がすべての実数 x に対して成り立つ条件は、2 次方程式 $ax^2+(a+1)x+a=0$ の判別式を D とすると
 $a < 0$ かつ $D < 0$
となることである。
- $$D=(a+1)^2-4 \cdot a \cdot a=-3a^2+2a+1=-(3a+1)(a-1)$$
- $D < 0$ より、 $a < -\frac{1}{3}$, $1 < a$
- $a < 0$ との共通範囲を求めて $a < -\frac{1}{3}$ ㊟

2 必須問題 【2 次関数】

放物線 $C: y=x^2-2kx+3k^2-k-4$ について次の問いに答えなさい。ただし、定数 k は実数とする。

- $k=1$ のとき、 C の頂点の座標を求めなさい。
- (1) のとき、 C と x 軸の交点の x 座標を求めなさい。
- (1) のとき、 C が x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。
- C が x 軸と異なる 2 点で交わる時、 k のとりうる値の範囲を求めなさい。
- C が x 軸と異なる 2 点 A , B で交わるとする。線分 AB の長さを k を用いて表しなさい。
- (5) のとき、線分 AB の長さの最大値とそのときの k の値を求めなさい。

【出題のねらい】

- 放物線の頂点の座標を求めることができるか。
- 2 次方程式の解が放物線と x 軸との交点の x 座標であることを理解しているか。
- 放物線と x 軸との交点の座標から切り取る線分の長さを求めることができるか。
- 2 次方程式の判別式を用いて、放物線と x 軸の位置関係を調べることができるか。
- 定数が含まれた 2 次式に解の公式を用いて、放物線と x 軸との交点の x 座標を求めることができるか。また、交点の座標から切り取る線分の長さを求めることができるか。
- 根号の中がある定数の 2 次式になっていることに着目し、2 次関数の最大値・最小値の問題に帰着させて考えることができるか。

< 解答・解説 >

- $k=1$ のとき、 C は $y=x^2-2x-2$... ① となる。
変形して $y=x^2-2x-2$
 $=(x-1)^2-3$
よって、 C の頂点の座標は $(1,-3)$ ㊟
- (1) の ① より、 C と x 軸との交点の x 座標は 2 次方程式 $x^2-2x-2=0$ の解である。
解の公式より $x=-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-(-2)}$
 $=1 \pm \sqrt{3}$
よって、 C と x 軸との交点の x 座標は $1 \pm \sqrt{3}$ ㊟
- (2) より、 C と x 軸との交点の座標は $(1-\sqrt{3}, 0)$, $(1+\sqrt{3}, 0)$ であるから C が x 軸から切り取る線分の長さは
 $(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ ㊟

- (4) 2 次方程式 $x^2-2kx+3k^2-k-4=0$ の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(3k^2-k-4)=-2k^2+k+4$$

C が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は $D > 0$ であるから
 $-2k^2+k+4 > 0$ より $2k^2-k-4 < 0$

2 次方程式 $2k^2-k-4=0$ の解は、解の公式より

$$k=\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2}=\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

よって、2 次不等式 $2k^2-k-4 < 0$ の解は

$$\frac{1-\sqrt{33}}{4} < k < \frac{1+\sqrt{33}}{4} \quad \text{㊟}$$

- (5) C と x 軸との交点の x 座標は 2 次方程式 $x^2-2kx+3k^2-k-4=0$ の解である。

$$\begin{aligned} \text{解の公式より } x &= -(-k) \pm \sqrt{(-k)^2-(3k^2-k-4)} \\ &= k \pm \sqrt{-2k^2+k+4} \end{aligned}$$

よって、 C と x 軸との交点 A , B の座標は

$$(k-\sqrt{-2k^2+k+4}, 0), (k+\sqrt{-2k^2+k+4}, 0)$$

となるから C が x 軸から切り取る線分 AB の長さは

$$\begin{aligned} AB &= (k+\sqrt{-2k^2+k+4}) - (k-\sqrt{-2k^2+k+4}) \\ &= 2\sqrt{-2k^2+k+4} \quad \text{㊟} \end{aligned}$$

- (6) (5) より、 $AB=2\sqrt{-2k^2+k+4}$ であるから

$$\begin{aligned} \text{変形して } AB &= 2\sqrt{-2k^2+k+4} \\ &= 2\sqrt{-2\left(k^2-\frac{1}{2}k\right)+4} \\ &= 2\sqrt{-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2}{4^2}+4} \\ &= 2\sqrt{-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{8}} \end{aligned}$$

- (4) から $\frac{1-\sqrt{33}}{4} < k < \frac{1+\sqrt{33}}{4}$ において、 $-2\left(k-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$ が最大となる

とき、線分 AB の長さも最大となる。

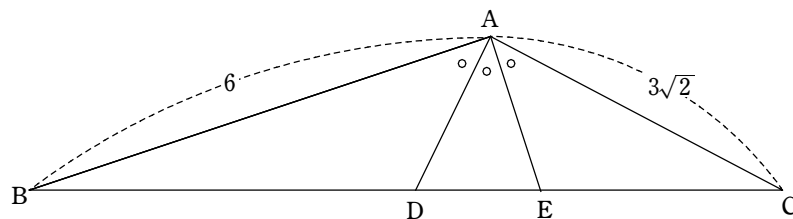
よって、 AB の最大値は

$$k=\frac{1}{4} \quad \text{のとき} \quad \text{最大値} \quad 2\sqrt{\frac{33}{8}}=\frac{2\sqrt{33}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{66}}{2} \quad \text{㊟}$$

③＜選択問題＞ 【図形と計量】

AB = 6, CA = $3\sqrt{2}$, $\angle CAB = 135^\circ$ の $\triangle ABC$ がある。 $\angle CAB$ の 3 等分線が辺 BC と交わる点を, 点 B から近い方から順に D, E とする。次のものを求めなさい。

- (1) 辺 BC の長さ (2) $\sin \angle ABC$ の値
(3) $\tan \angle ABC$ の値 (4) 線分 AE の長さ
(5) $\tan \angle BCA$ の値 (6) BD : DE : EC の最も簡単な整数の比



【出題のねらい】

- (1) 2 辺と狭角が与えられたとき, 余弦定理を用いて残りの 1 辺を求めることができるか。
(2) 正弦定理を用いて, 正弦の値を求めることができるか。
(3) 三角比の相互関係から正接の値を求めることができるか。
(4) (3) で求めた正接を利用して, 直角三角形の残りの 1 辺の長さを求めることができるか。
(5) (2), (3), (4) の流れと同様な手順で, 誘導なしに正接の値を求めることができるか。
(6) 直角三角形に着目し, 三角比の定義等を用いて 3 辺の長さを求めることができるか。

＜解答・解説＞

- (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + CA^2 - 2 \cdot AB \cdot CA \cdot \cos \angle BAC \\ &= 6^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ \\ &= 36 + 18 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 90 \\ BC > 0 \text{ より、} \quad BC &= \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (2) $\triangle ABC$ に正弦定理を用いて

$$\frac{CA}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \quad \text{より} \quad \frac{3\sqrt{2}}{\sin \angle ABC} = \frac{3\sqrt{10}}{\sin 135^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sin \angle ABC &= \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} \times \sin 135^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (3) 三角比の相互関係 $\sin^2 \angle ABC + \cos^2 \angle ABC = 1$ より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \cos^2 \angle ABC = 1 \quad \text{から} \quad \cos^2 \angle ABC = \frac{9}{10}$$

$$0^\circ < \angle ABC < 90^\circ \text{ であるから, } \cos \angle ABC > 0 \quad \text{より} \quad \cos \angle ABC = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{よって, } \tan \angle ABC = \frac{\sin \angle ABC}{\cos \angle ABC} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

- (4) 直角三角形 ABE において $\tan \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{6}$

$$\angle ABE = \angle ABC \text{ であるから, (3) より} \quad \tan \angle ABE = \tan \angle ABC = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad \frac{AE}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{から} \quad AE = 2 \quad \text{答}$$

- (5) $\triangle ABC$ に正弦定理を用いて

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \quad \text{より} \quad \frac{6}{\sin \angle BCA} = \frac{3\sqrt{10}}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{よって} \quad \sin \angle BCA = \frac{6}{3\sqrt{10}} \times \sin 135^\circ = \frac{6}{3\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

三角比の相互関係 $\sin^2 \angle BCA + \cos^2 \angle BCA = 1$ より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \cos^2 \angle BCA = 1 \quad \text{から} \quad \cos^2 \angle BCA = \frac{4}{5}$$

$$0^\circ < \angle BCA < 90^\circ \text{ であるから, } \cos \angle BCA > 0 \quad \text{より} \quad \cos \angle BCA = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{よって, } \tan \angle BCA = \frac{\sin \angle BCA}{\cos \angle BCA} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

- (6) 直角三角形 ABE において, (4) より $\sin \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{2}{BE}$

$$\angle ABE = \angle ABC \text{ であるから, (2) より} \quad \sin \angle ABE = \sin \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{よって} \quad \frac{2}{BE} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{から} \quad BE = 2\sqrt{10}$$

$$\text{また} \quad EC = BC - BE = 3\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$$\text{次に直角三角形 DCA において} \quad \tan \angle DCA = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{3\sqrt{2}}$$

$$\angle DCA = \angle BCA \text{ であるから, (5) より} \quad \tan \angle DCA = \tan \angle BCA = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{AD}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{から} \quad AD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{三平方の定理から} \quad DC &= \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad DE = DC - EC = \frac{3\sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{また} \quad BD = BE - DE = 2\sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{以上のことから} \quad BD : DE : EC &= \frac{3\sqrt{10}}{2} : \frac{\sqrt{10}}{2} : \sqrt{10} \\ &= 3 : 1 : 2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

【参考】 BE の長さは直角三角形 ABE に三平方の定理を用いて求めてもよい。
また, AD の長さを求めたあと, $\triangle ABD$ に正弦定理を用いて BD の長さを求めてから DE の長さを求めてもよい。

【別解】 (AD の長さを求めるまでは同様)

$\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle AEC$ の高さを h とすると, 高さ h は共通しているから, 3 つの三角形の面積比は

$$\begin{aligned} \triangle ABD : \triangle ADE : \triangle AEC &= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h : \frac{1}{2} \cdot DE \cdot h : \frac{1}{2} \cdot EC \cdot h \\ &= BD : DE : EC \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

ここで, $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ の面積比は

$$\begin{aligned} \triangle ABD : \triangle ADE &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 45^\circ : \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin 45^\circ \\ &= AB : AE = 6 : 2 = 3 : 1 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

また, $\triangle ADE$, $\triangle AEC$ の面積比は

$$\begin{aligned} \triangle ADE : \triangle AEC &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin 45^\circ : \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AC \cdot \sin 45^\circ \\ &= AD : AC = \frac{3\sqrt{2}}{2} : 3\sqrt{2} = 1 : 2 \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

$$\text{②, ③ より} \quad \triangle ABD : \triangle ADE : \triangle AEC = 3 : 1 : 2$$

$$\text{よって, ① より} \quad BD : DE : EC = 3 : 1 : 2 \quad \text{答}$$

【参考】 $\triangle ABE$ において線分 AD は $\angle BAE$ の二等分線であるから, 角の二等分線の性質 (数学 A) より

$$BD : DE = AB : AE = 6 : 2 = 3 : 1 \quad \cdots \text{①}$$

同様に, $\triangle ADC$ において線分 AE は $\angle DAC$ の二等分線であるから, 角の二等分線の性質より

$$DE : EC = AD : AC = \frac{3\sqrt{2}}{2} : 3\sqrt{2} = 1 : 2 \quad \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② より} \quad BD : DE : EC = 3 : 1 : 2 \quad \text{答}$$

【4】＜選択問題＞ 【 場合の数と確率 】

- (1) さいころの 6 つの面の中から 2 面を選んで赤色に塗る。残った 4 面の中から 2 面を選んで青色に塗る。最後に残った 2 面を黄色に塗る。次のような色の塗り方は何通りあるか求めなさい。ただし、色を塗っても、さいころの目は判別できるものとする。
- (ア) 色の塗り方の総数
- (イ) 赤い面が向かい合うような色の塗り方
- (ウ) 同じ色の面がすべて隣り合うような色の塗り方

- (2) 赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている袋がある。次の操作を考える。

(操作) 袋から玉を 1 個取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。

この操作を繰り返し、袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。次の確率を求めなさい。

- (ア) 操作を 2 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 1 枚である確率
- (イ) 操作を 3 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 0 枚である確率
- (ウ) 操作を 4 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 1 枚である確率

【出題のねらい】

- (1) (ア) 同じものを含む順列に帰着させて、色の塗り方の総数を求めることができるか。
- (イ) 条件のある塗り方の総数を求めることができるか。
- (ウ) 条件から具体的な塗り方を考え、塗り方の総数を求めることができるか。
- (2) (ア) 条件付き確率を求めることができるか。
- (イ) 余事象を利用して、条件付き確率を求めることができるか。
- (ウ) 樹形図をかき、場合分けして確率を求めることができるか。

＜解答・解説＞

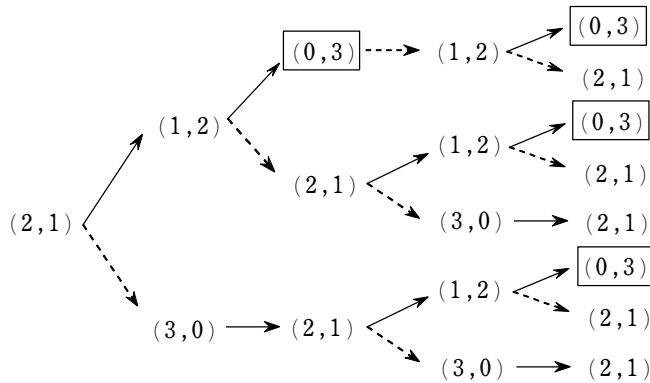
- (1) 色を塗っても、さいころの目は判別できるため、色を塗ったあとに回転させても同じになる塗り方はない。
- (ア) 6 つの面の中から赤に塗る 2 面の選び方は ${}_6C_2$ 通り … ①
- 残りの 4 つの面の中から青色に塗る 2 面の選び方は ${}_4C_2$ 通り
- 残りの 2 つの面は黄色と決まるから 1 通り (${}_2C_2$ 通り)
- よって、求める塗り方の総数は
- $${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 1 = 90 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$
- (イ) さいころの向かい合う 2 つの面の組は 3 組あるから、赤い面が向かい合うような塗り方は 3 通り。… ②
- 残りの 4 つの面の中から青色に塗る 2 面の選び方は ${}_4C_2$ 通り
- 残りの 2 つの面は黄色と決まるから 1 通り (${}_2C_2$ 通り)

よって、求める塗り方の総数は

$$3 \times {}_4C_2 \times 1 = 3 \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 1 = 18 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

- (ウ) 6 つの面の中から赤に塗る 2 面の選び方のうち、赤色が隣り合う選び方は ①－② より ${}_6C_2 - 3 = 15 - 3 = 12$ (通り)
- そのおのおのに対し、残りの 4 つの面を青色と黄色を塗る方法は ${}_4C_2 \times 1$ 通りある。そのうち、青色が向かい合う場合と黄色が向かい合う場合がそれぞれ 1 通りずつある。よって、残りの 4 つの面を青色と黄色が隣り合うように塗る方法は
- $${}_4C_2 - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ (通り)}$$
- したがって、求める塗り方はの総数は $12 \times 4 = 48$ (通り) 答

- (2) 袋の中に入っている赤玉 2 個、青玉の 1 個を (2, 1) で表す。また、赤玉を取る操作を $\longrightarrow$ 、青玉を取る操作を $\cdots\cdots\longrightarrow$ で表し、また硬貨を 1 枚もらう場合を で囲み、樹形図をかくと下図のようになる。



- (ア) 操作を 2 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 1 枚となる事象は 1 回目の操作で赤玉、2 回目の操作で赤玉を取り出す場合である。
- よって、求める確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad \text{答}$$

- (イ) 操作を 3 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 1 枚となる事象は赤、赤、青の順で玉を取り出す場合のみである。その確率は
- $$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{9}$$
- それ以外の場合はもらう硬貨の総数は 0 枚である。よって、求める確率は硬貨の総数が 1 枚となる事象の余事象の確率であるから、
- $$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{答}$$

- (ウ) 操作を 4 回繰り返し、もらう硬貨の総数が 1 枚である事象は次の 3 つの事象の和事象である。

- (i) 赤、赤、青、青の順で取り出す場合

$$\text{その確率は } \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

- (ii) 赤、青、赤、赤の順で取り出す場合

$$\text{その確率は } \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

- (iii) 青、赤、赤、赤の順で取り出す場合

$$\text{その確率は } \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

- (i), (ii), (iii) は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{2}{27} = \frac{12 + 8 + 6}{81} = \frac{26}{81} \quad \text{答}$$