

1(1) 【yについて整理する】

【解答】 $x^2y + 3x + a = x^2y + (3x + a)$

yの次数に着目して最高次数は1より次数は1 ㊦
定数項は $3x + a$ ㊦

(2) 【展開】

積の形の式を和の形に直すことを展開といいます。
分配法則 $A(B+C) = AB + AC$ などをつかいます。
最後は降べきの順に整理しておきます。

【解答】 $(2x+3)(x-1) = 2x^2 + (-2+3)x + 3 \cdot (-1)$
 $= 2x^2 + x - 3$ ㊦

(3) 【因数分解①(共通因数でくくる)】

和の形の式を積の形に直すことを因数分解するといいます。この問題の式は、2つの項でできており、共通して $(a-b)$ がかけられています。このような式を共通因数といいます。 $(a-b)$ でくくります。

【解答】 $(a-b)x - (b-a)y = (a-b)x + (a-b)y$
 $= (a-b)(x+y)$ ㊦

(4) 【因数分解②(たすきがけ)】

この問題の式は、 x の2次式で、 x^2 の係数が1でありません。また、前問のような共通因数也没有ありません。このような式に対しては「たすきがけ」と呼ばれる方法で因数分解します。

たすきがけの手順を復習してみましょう。

手順① 因数分解したい式の係数を
 x^2 の係数、定数項、 x の係数の順に並べる。

$$\begin{array}{r} \times \quad \rightarrow \\ 2 \quad 12 \quad -11 \end{array}$$

手順② 「2」の上に、掛けて2になる数を縦に並べて書きます。

$$\begin{array}{r} 1 \times \quad \rightarrow \\ 2 \quad 12 \quad -11 \end{array}$$

手順③ 「12」の上に、掛けて12になる数を縦に並べて書きます。

$$\begin{array}{r} 1 \times -4 \rightarrow \\ 2 \quad 12 \quad -11 \\ 2 \times -3 \rightarrow \end{array}$$

手順④ 「-11」の上に、 $2 \times (-4)$ の-8と、 $1 \times (-3)$ の-3を書きます。この2つの数字の合計が「-11」になっていれば成功です。

$$\begin{array}{r} 1 \times -4 \rightarrow -8 \\ 2 \quad 12 \quad -11 \\ 2 \times -3 \rightarrow -3 \end{array}$$

手順⑤ 成功したら、左上の4つの数を用いて

$$2x^2 - 11x + 12 = \left(\boxed{1}x + \boxed{-4} \right) \left(\boxed{2}x + \boxed{-3} \right)$$
$$= (x-4)(2x-3) \quad \text{㊦}$$

と書いたらできあがり。

(5) 【絶対値の計算】

公式 $\sqrt{a^2} = |a|$ を確認しましょう。
まず、絶対値の形に直しましょう。絶対値の中の数が正ならそのまま、負なら(-1)を掛けて絶対値を外しましょう。

【解答】 $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = -(-3) = 3$ ㊦

(6) 【有理化の計算】

分母に根号のついた分数の有理化は分母に着目して、分母と分子に分母にある根号を掛けること。

【解答】 $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ㊦

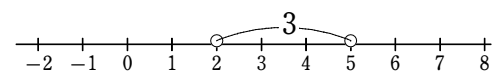
(7) 【1次不等式の解法】

1次不等式では、左辺に x を含む式を集め、右辺には x を含まない式を集めます。両辺に負の数を掛けたり、両辺を負の数で割ったりするときは不等号の向きを変える必要があります。左辺が「 x 」だけになるまで変形します。

【解答】 $2x - 7 \geq 5x - 1$ より $2x - 5x \geq -1 + 7$
 $\therefore -3x \geq 6$
 $\therefore x \leq -2$ ㊦

(8) 【絶対値記号を含む不等式の解法】

もともと、絶対値は、「2点間の距離を表している」という考え方があります。例えば、 $|2-5|$ は、数直線上の2点(2)と(5)の間の距離を表しているというわけです。

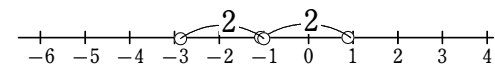


実際、 $|2-5| = |-3| = 3$ ですから、距離とあっています。

では、 $|x|$ はどんな距離を表しているか分かりますか。
 $|x|$ は $|x-0|$ と同じですから、2点(x)と(0)の間の距離を表していると考えられます。原点からの距離です。

ここで、問題の不等式を見てみましょう。

「 $|x+1| < 2$ 」は、「-1からの距離が2より小さい x の値の範囲」を表しています。



図の数直線から分かりますとおり

$$-2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

となります。

【参考】 $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$
 $|x| > c \Leftrightarrow x < -c, c < x$

【解答】 $|x+1| < 2$ より $-3 < x < 1$ ㊦

(9) 【部分集合の個数】

全ての集合において部分集合は空集合 ϕ を含むので忘れないようにしましょう。

【解答】 部分集合は $\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \phi$ の4個 ㊦

(10) 【和集合と補集合】

$A \cup B$ は「 A と B の和集合」といって、 A の要素と B の要素をあわせたものであるから、 $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$
 $\overline{\bullet}$ は「 $\bullet$ の補集合」といって、 $\bullet$ 以外の要素の集合であるから、 $\overline{A \cup B} = \{3, 5\}$

【解答】 $\overline{A \cup B} = \{1, 2, 4, 6\} = \{3, 5\}$ ㊦

(11) 【必要十分条件・真偽】

2つの条件 p, q について、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であるとき、 p は、 q であるための十分条件である。

q は、 p であるための必要条件である。といいます。
また、偽の確認は反例が1つあればできます。

この問題では

「 $a^2=4$ ならば $a=2$ 」は偽 (反例 $x=-2$)
「 $a=2$ ならば $a^2=4$ 」は真
よって $a^2=4$ は $a=2$ であるための必要条件。㊦

(12) 【対偶】

命題(A) $p \Rightarrow q$ に対して、
命題 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を、元の命題(A)の対偶といいます。

したがって、対偶の命題は

「 n は奇数 $\Rightarrow 2n$ は奇数」㊦ となります。
そして、その真偽ですが、 n が自然数なので $2n$ は偶数になります。従って対偶は偽です。 ㊦ 偽

2(1) 【関数の記号 $f(a)$ の理解】

$f(2)$ は、 x に2を代入した式を表します。

【解答】

$$f(2)=5 \quad \text{より} \quad 2a+b=5 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$f(-1)=-4 \quad \text{より} \quad -a+b=-4 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①}-\text{②より} \quad 3a=9 \quad \therefore a=3, b=-1 \quad \text{㊦}$$

(2) 【2次式の平方完成】

2次関数の頂点の座標を求めるためには、平方完成が必要です。公式を覚えて、マスターしましょう。

$$(\text{公式}) \quad x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

【解答】

$$x^2-4x+1=(x-2)^2-4+1=(x-2)^2-3 \quad \text{㊦}$$

(3) 【2次関数の決定】

この問題も平方完成を利用します。放物線の頂点の座標が (p, q) であるとき、その放物線をグラフとする2次関数は $y=a(x-p)^2+q$ の形で表されます。

【解答】

頂点の座標が $(1, -2)$ であるから、求める2次関数は $y=a(x-1)^2-2 \quad \cdots \cdots \text{①}$ と表される。

この2次関数のグラフが原点を通るので

$$0=a(0-1)^2-2 \quad \therefore a-2=0 \quad \therefore a=2$$

したがって、①より、求める2次関数は

$$y=2(x-1)^2-2 \quad \text{すなわち、} y=2x^2-4x \quad \text{㊦}$$

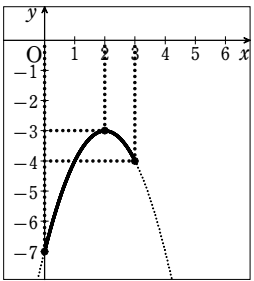
(4) 【2次関数の最大・最小】

平方完成された2次関数は、頂点の座標が分かります。また、2次関数の式の後ろの $(0 \leq x \leq 3)$ は定義域といって、関数全体を考えるのではなく、 $0 \leq x \leq 3$ の部分だけ考える必要があります。さらに、 $(x^2$ の係数) <0 なので、上に凸の放物線であることにも気をつけましょう。

【解答】

この2次関数のグラフは図のようになる。

したがって、 y は
 $x=2$ のとき最大値 -3
 $x=0$ のとき最小値 -7 ㊦
をとる。



(5) 【2次方程式の解法(解の公式)】

2次方程式では、まず因数分解を利用することを考えます。因数分解が可能でない場合に解の公式でのアプローチをしていきましょう。

<解の公式>

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{のとき} \quad x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【解答】

与えられた2次方程式の左辺の因数分解を考えてもきれいな整数での因数分解はできそうもありません。そこで解の公式を使います。

$$x=\frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4 \cdot 5 \cdot (-1)}}{2 \cdot 5}=\frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5} \quad \text{㊦}$$

(6) 【2次方程式の解の判別】

実数解の個数や、解が重解であるかどうかは、解の公式よりももっと簡単な式で、調べることができます。その式は「判別式」と呼ばれ、 $D=b^2-4ac$ というものです。判別式の公式は、解の公式の分子の $\sqrt{\quad}$ の中身ですので、忘れたときは解の公式から思い出すことができます。さて、この判別式 D については、次の性質を覚えてください。

2次方程式について

$D>0$ ならば 異なる2つの実数解をもつ

$D=0$ ならば 重解をもつ

$D<0$ ならば 実数の解をもたない

【解答】

この2次方程式の判別式を D とおくと、

$$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot m=36-4m$$

この2次方程式が重解をもつとき、 $D=0$

よって、 $36-4m=0$

$$\therefore m=9 \quad \text{答}$$

(7) 【2次不等式の解法①】

2次不等式にもいろいろなタイプがありますが、この問題のように、左辺が因数分解できるときは、因数分解を利用しましょう。また、2次不等式を解くとき、実は、その途中で2次方程式を解きます。2次方程式を解くことで、グラフがイメージできるので、最後は、そのグラフを見て、2次不等式を解くことになります。なので、2次不等式を解く問題では、積極的にグラフを書きましょう。

【解答】

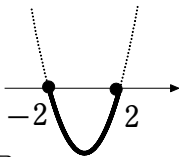
与えられた2次不等式の

左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x-2)\leq 0$$

この不等式を満たす

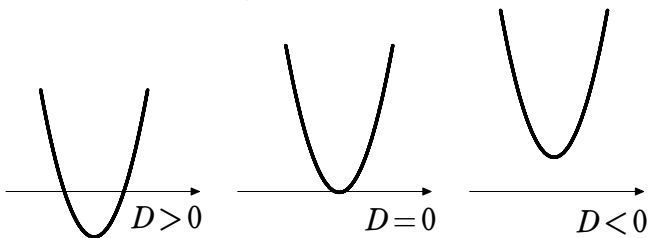
x の値の範囲は $-2\leq x\leq 2$, 答



(8) 【2次不等式の解法②】

判別式 D の性質には、次のようなものもあります。

<グラフと x 軸の位置関係>



グラフは

$D>0$ のとき、 x 軸と、異なる2点で交わる

$D=0$ のとき、 x 軸と、接する

$D<0$ のとき、 x 軸と、共有点をもたない。

この性質を利用すると、グラフがイメージできますから、やはり、グラフを書いて、あとは、2次不等式の不等号の向きに注意して、解きましょう。

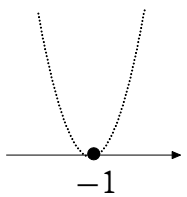
【解答】

左辺の判別式を D とおくと

$$D=(2)^2-4\cdot 1\cdot 1=0$$

したがって、

$$x=-1 \quad \text{答}$$



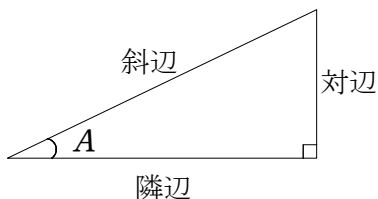
[3](1) 【直角三角形と三角比】

直角三角形の3辺には名前がついています。「斜辺」は知っている人が多いと思います。斜辺は、直角の向かいの辺のことです。残りの2辺の名前を知っていますか。直角三角形には鋭角が2つあります。そのうち、ひとつの角を A とするとき、 A の向かいの辺を「対辺」、残りの1辺を「隣辺 (または底辺)」といいます。これらの辺の比(分数)のうち特定のものを三角比といいます。

$$\sin A = \frac{(A \text{ の対辺})}{(\text{斜辺})}$$

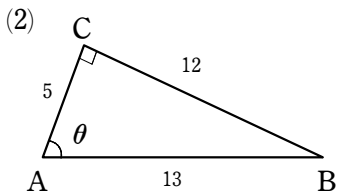
$$\cos A = \frac{(A \text{ の隣辺})}{(\text{斜辺})}$$

$$\tan A = \frac{(A \text{ の対辺})}{(A \text{ の隣辺})}$$



【解答】

$$\sin \theta = \frac{12}{13} \quad \text{答}$$



(2) 【三角比を 45° より小さい鋭角の三角比で表す】

三角比には様々な公式がありますが、 $90^\circ-\theta$ の三角比について確認しましょう。

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos \theta, \quad \cos(90^\circ-\theta)=\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan \theta}$$

【解答】

$$\sin 65^\circ=\sin(90^\circ-25^\circ)=\cos 25^\circ$$

より ④ 答

(3) 【正弦定理】

直角三角形でない、三角形では、辺の長さや角の大きさ、外接円の半径を求めるときに、正弦定理や余弦定理を使います。ポイントとして1組の角とその対辺が分かる場合は正弦定理を使う問題が多いので確認してみよう。

<正弦定理>

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad (R \text{ は外接円の半径})$$

【解答】

$C=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$ より正弦定理から

$$\frac{6}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow \frac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=c$$

$$\text{したがって、} c=3\sqrt{6} \quad \text{答}$$

(4) 【余弦定理】

3 辺の長さが分かっている三角形では、余弦定理が有効です。

余弦定理は 2 種類あって、3 辺が分かっているときに使う公式①と、2 辺と 1 角が分かっているとき、他の 1 辺を求めるときに使う公式②があります。

$$\text{公式①} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{公式②} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

【解答】 $c^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 4 + 9 - 6 = 7$
辺の長さであることから $c > 0$ なので
よって、 $c = \sqrt{7}$ 答

(5) 【三角形の面積】

2 辺とその間の角が分かっているとき、面積を求める公式があります。面積を S とすると $S = \frac{1}{2}ab\sin C$

【解答】

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \quad \text{答}$$

4(1) 【正の約数の個数】

集合の要素の個数を調べたいときは、実際に要素を並べる方法も大事になってきます。

【解答】

24 の正の約数の集合は

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

よって、要素の個数は 8 個 答

(2) 【順列の記号 ${}_nP_r$ 、組合せの記号 ${}_nC_r$ 】

場合の数を計算するとき、数えたいものに合わせ、 ${}_nP_r$ や ${}_nC_r$ といった記号を使うと便利である。

I) 順列を数えたいときは、 ${}_nP_r$ を使う。

計算方法) ${}_5P_4$ は 5 から始めて 4 個の数を掛け合わせる。
つまり、 ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

II) 組合せを数えたいときは、 ${}_nC_r$ を使う。

計算方法) ${}_5C_4$ は、 ${}_5P_4$ を $4!$ で割って求める。

$$\text{つまり、} {}_5C_4 = \frac{{}_5P_4}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

※ 一見すると、複雑そうだが、約分をうまく使えば、 ${}_nP_r$ よりも楽である。

【解答】

$${}_{2017}C_0 + {}_{29}P_1 = 1 + 29 = 30 \quad \text{答}$$

(3) 【円順列】

異なる n 個のものの円順列の総数は $(n-1)!$

【解答】

男子 3 人と女子 2 人の合計 5 人が輪に並ぶことから
 $(5-1)! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ より 24 通り 答

(4) 【組合せ】

C を使うか、P を使うか、どちらを使えばいいのか？
このことも、場合の数を学んでいくうえで、難しいところ
です。原則は、こうです。並び方のように、 ab と ba を区
別して数えたいときは P、グループの作り方のように、 ab
と ba は同じものだから区別したくないときは C を使いま
す。一口で言っても、難しく感じるかもしれません。なの
で、練習問題を解いて、一つ一つ理解していくことが大切
です。

【解答】

正七角形の 2 つの頂点を結ぶと対角線ができるが、隣り合
う頂点を 2 つ選んでしまうと、それは、対角線ではなく辺
になる。

したがって、対角線の本数は、 ${}_7C_2 - 7 = 21 - 7 = 14$ (本) 答

(5) 【同じものを含む順列】

n 個のうち、同じものが、それぞれ a 個、 b 個、 c 個あるとき
その並べ方の総数は $\frac{n!}{a!b!c!}$

【解答】

「みがかぬかがみ」には、「み」が 2 個、「が」が 2 個、
「か」が 2 個ずつある。

したがって、文字列の個数は $\frac{7!}{2!2!2!} = \frac{5040}{8} = 630$ (個) 答