1 ＜必須問題＞　【小問集合】

次の各問いに答えなさい。

(1)　$(x-3)(x+1)(x+3)(x-1)$を展開しなさい。

(2)　$2a^3-6a^2b-a^2+3ab$ を因数分解しなさい。

(3)　$\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}+\sqrt{(2\sqrt{2}+3)^2}$ を計算しなさい。

(4)　$\sqrt{10}$ の整数部分を a とする。自然数 n について$\sqrt{10}\,n$ の整数部分が an であるような n の最大値を求めなさい。

(5)　a は $\boxed{}$ とする。命題「$a<3$ ならば$a^2<9$ である。」が真であるとき，$\boxed{}$ にあてはまる語句を，次の①～④のうちから選んで記号で答えなさい。

①　実数　　②　有理数　　③　整数　　④　自然数

(6)　xについての 1 次不等式 $3ax>a^2$ を満たす最大の整数が-4 であるとき，整数の定数 a の値をすべて求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　展開の順序の工夫ができるか。

(2)　共通因数でくくる。次数の小さい文字について整理する。といった因数分解の手法を適用できるか。

(3)　$\sqrt{A^2}=|A|$を適用できるか。無理数の大小関係を調べることができるか。絶対値の外し方を理解しているか。

(4)　無理数の整数部分を理解しているか。自然数についての不等式を，見当をつけて，ひとつずつ，その真偽を確認できるか。問題文の題意を理解できるか。

(5)　数の種類を理解しているか。全体集合の違いによって，命題の真偽が変わることを理解しているか。偽である命題の反例を見つけられるか。

(6)　題意から，不等号の向きが変わる必要があることと，したがって，xの係数<0 であることを理解できるか。

＜解答・解説＞

(1)　(与式)$=(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)=(x^2-9)(x^2-1)=x^4-10x^2+9$　答

(2)　(与式)$=a(2a^2-6ab-a+3b)$　←共通因数でくくって

$=a\{(-6a+3)b+(2a^2-a)\}$　←次数の低い文字について整理する

$=a\{-3b(2a-1)+a(2a-1)\}=a(2a-1)(a-3b)$　答

(3)　(与式)$=|2\sqrt{2}-3|+|2\sqrt{2}+3|$　←$\sqrt{A^2}=|A|$ を適用する

$=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$　答　←$2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ に注意する

(4)　$n=6$ とすると$\sqrt{10}\,n=\sqrt{10\cdot 6^2}=\sqrt{360}$，$18=\sqrt{324}<\sqrt{360}<\sqrt{361}=19$

$\sqrt{10}\,n$ の整数部分は 18 となり，$18=3\cdot 6=an$　条件を満たす。

$n=7$ とすると$\sqrt{10}\,n=\sqrt{10\cdot 7^2}=\sqrt{490}$，$22=\sqrt{484}<\sqrt{490}<\sqrt{529}=23$

$\sqrt{10}\,n$ の整数部分は 22 となり，$22>21=3\cdot 7=an$　条件を満たさない。

$n\geqq 8$ のとき，条件を満たすことはない。条件を満たす n の最大値は 6　答

(5)　この命題が偽となるのは，$a<3$ かつ $a^2\geqq 9$ を満たす反例 a が存在するとき，すなわち $a\leqq -3$ のとき。①～③は負の数を含むから，反例が存在し，この命題は偽となる。一方，④自然数は負の数を含まないから，反例が存在しない。したがって，この命題が真になるのは，aが<u>④自然数</u>　のとき。答

(6)　1 次不等式で，解に最大の整数が存在するのは，解の形が，$x<p$ のときであり，さらにその最大値が -4 であるのは，$-4<p\leqq -3$ のときである。答

与えられた不等式について　$a<0$ のとき　$3ax>a^2 \Leftrightarrow x<\dfrac{a}{3}$

$-4<\dfrac{a}{3}\leqq -3$ とすると，$-12<a\leqq -9$

したがって，求める整数 a は，$a=-11,-10,-9$　答

2 ［１］＜必須問題＞　【２次関数】2次関数の最大・最小

［1］2 次関数$f(x)=x^2-4ax+2a+1$ について，次の問いに答えなさい。ただし，a は実数の定数とする。

(1)　$a=1$ のとき，$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。

(2)　$f(0)=f(3)$ を満たす a の値を求めなさい。

(3)　$a=1$ とする。放物線 $y=f(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に qだけ平行移動した放物線をグラフにもつ 2 次関数は $x=1$ で最小値 5 をとる。p，q を求めなさい。

(4)　$0\leqq a\leqq 2$ とする。$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値を $M(a)$ とする。$M(a)$ のとり得る値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　定義域に制限のある 2 次関数の最大値と最小値を求めることができるか。

(2)　放物線の軸に関する対称性を意識できるか。

(3)　最小値をとるx，yの値と，放物線の頂点を関連づけて考えることができるか。放物線の頂点の座標を求めることができるか。頂点の移動に注目して，平行移動を考えることができるか。

(4)　放物線の軸が移動するような 2 次関数の最大値を，場合分けを用いて考えることができるか。

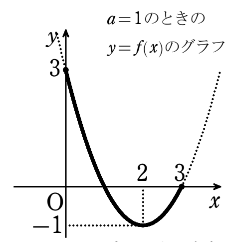
＜解答・解説＞

(1)　$a=1$ のとき，$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

よって

$x=0$　で　最大値　3

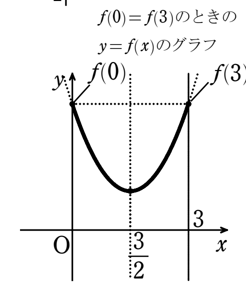
$x=2$　で　最小値　-1　をとる　答



(2)　$f(0)=f(3)$　$\Leftrightarrow$　$2a+1=3^2-4a\cdot 3+2a+1$

$\Leftrightarrow$　$12a=9$

$\Leftrightarrow$　$a=\dfrac{3}{4}$　答



別解　$f(0)$，$f(3)$ はともに定義域の両端における関数値である。これらが等しくなるのは放物線の軸が，定義域の中央に一致するときである。

$2a=\dfrac{3}{2}$　より　$a=\dfrac{3}{4}$　答

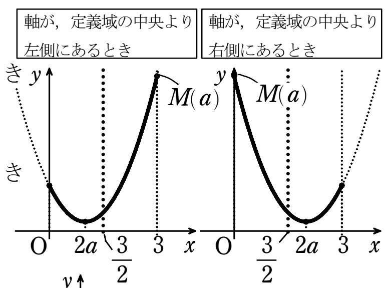
(3)　$a=1$のとき，(1)より，元の放物線の頂点の座標は(2 , −1)，平行移動した放物線の頂点の座標は(1 , 5)であるから，$2+p=1$，$-1+q=5$

よって，$p=-1$，$q=6$　答

(4)　$f(x)=(x-2a)^2-4a^2+2a+1$ より，放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は $x=2a$

$0\leqq a\leqq 2$より，$0\leqq 2a\leqq 4$　また，定義域の中央は$\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}$

（放物線の軸が，定義域の中央の左側にも，右側にもある可能性があるので，場合分けをする。また，ちょうど中央にくる$a=\dfrac{3}{4}$は，どちらの場合分けに含めてもよい。）



(i)　$0\leqq 2a\leqq \dfrac{3}{2}$，すなわち $0\leqq a\leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

$M(a)=f(3)=-10a+10$　……①

(ii)　$\dfrac{3}{2}<2a\leqq 4$，すなわち $\dfrac{3}{4}<a\leqq 2$ のとき

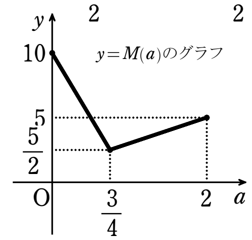
$M(a)=f(0)=2a+1$　　……②

①より，$M(0)=10$，$M\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{2}$

②より，$M(2)=5$，

また②の定義域には入ってないが

②で $a=\dfrac{3}{4}$ とすると $M\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{2}$



よって，$M(a)$ のとり得る値の範囲は　$\dfrac{5}{2}\leqq M(a)\leqq 10$　答

2 ［２］＜必須問題＞　【２次関数】2次方程式の理論

［2］x の２次方程式 $x^2-(4a+b)x+3a=0$……①について，次の問いに答えなさい。ただし，a，b は実数の定数とする。
(1)　$a=2$，$b=-1$ のとき，①を解きなさい。
(2)　$b=0$ のとき，①が重解をもつような定数 a の値を求めなさい。
(3)　$b=-3$ とする。①が $x=a$ を解にもつとき，定数 a の値を求めなさい。
(4)　定数 a がどのような値をとっても，①が常に異なる２つの実数解をもつような定数 b の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　左辺が因数分解できる２次方程式を解くことができるか。
(2)　２次方程式と，その判別式 $D=b^2-4ac$ の関係を理解しているか。
(3)　２次方程式と，その解の関係を理解しているか。
(4)　全称命題「すべての……について……が成り立つ」を理解しているか。①の判別式Dについて，さらに，そのDの判別式D'に落とし込んで考えることができるか。

＜解答・解説＞

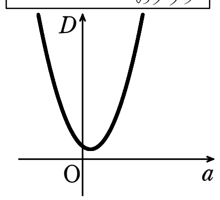
(1)　$a=2$，$b=-1$ のとき，①は，$x^2-7x+6=0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-6)=0$
$\Longleftrightarrow x=1,\ 6$　答

(2)　$b=0$ のとき，①は，$x^2-4ax+3a=0$　……①'
①' の判別式をDとおくと，$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-1\cdot 3a=4a^2-3a$
①' が重解をもつのは，$D=0$ のときであるから，$4a^2-3a=0$
$\Longleftrightarrow a=0,\ \dfrac{3}{4}$　答

(3)　$b=-3$ のとき，①は，$x^2-(4a-3)x+3a=0$　……①''
①'' が，$x=a$ を解にもつとき，
$a^2-(4a-3)a+3a=0 \Longleftrightarrow -3a^2+6a=0 \Longleftrightarrow a=0,\ 2$　答

(4)　①の判別式をDとおくと，
$D=\{-(4a+b)\}^2-4\cdot 1\cdot 3a=16a^2+(8b-12)a+b^2$　……②
ここで，①が常に異なる２つの実数解をもつ
$\Longleftrightarrow$　常に $D>0$ が成り立つ
$\Longleftrightarrow$　「a がどのような値をとっても $D>0$ が成り立つ」……③
そこで，②の判別式をD'とすると，
$\dfrac{D'}{4}=(4b-6)^2-16\cdot b^2=-48b+36$

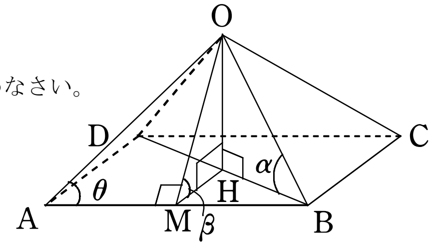
$D=16a^2+(8b-12)a+b^2$ のグラフ



③ $\Longleftrightarrow D'<0$ であるから，$-48b+36<0 \Longleftrightarrow b>\dfrac{3}{4}$　答

3 ［１］＜選択問題＞　【図形と計量】直角三角形の三角比

［1］図のような四角錐O−ABCDがある。底面は，１辺の長さが６の正方形であり，OA＝OB＝OC＝OD＝5である。Oから底面に下ろした垂線をOH，Oから辺ABに下ろした垂線をOM，∠OAB＝θ，∠OBH＝α，∠OMH＝β とする。
(1)　$\cos\theta$ の値を求めなさい。
(2)　この四角錐の体積 V を求めなさい。
(3)　θ，α，β の大小関係を不等式で表しなさい。



【出題のねらい】

(1)　直角三角形で定義された鋭角の三角比の定義を理解しているか。
(2)　立体(錐体)の体積($V=\dfrac{1}{3}Sh$(Sは底面積，hは高さ))を求められるか。
(3)　角の大小と三角比の大小の関係を理解しているか。

＜解答・解説＞

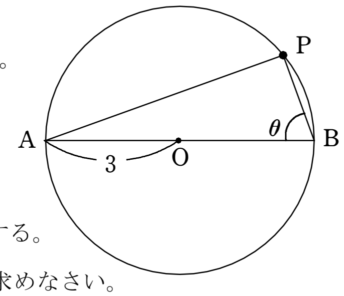
(1)　直角三角形△OAMで，OA=5，AM=3 であるから，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{3}{5}$　答

(2)　直角三角形△OBHで，OB=5，BH=$3\sqrt{2}$ であるから，三平方の定理より，
$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{7}$　また，正方形ABCDの面積は，$6^2=36$
よって，$V=\dfrac{1}{3}\cdot 36\cdot\sqrt{7}=12\sqrt{7}$　答

(3)　(2)の△OBHに着目して，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$
直角三角形△OMHで，OM=4，MH=3であるから，$\cos\beta=\dfrac{3}{4}$
$\cos\beta=\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{\sqrt{225}}{20}$，$\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}=\dfrac{12\sqrt{2}}{20}=\dfrac{\sqrt{288}}{20}$
$\cos\theta=\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{20}$　よって，$\cos\theta<\cos\beta<\cos\alpha$
これらの角は，すべて鋭角であるから，$\alpha<\beta<\theta$　答

3 ［２］＜選択問題＞　【図形と計量】正弦定理・三角形の面積

［2］図のようなABを直径とする半径3の円周上に点Pがあり，∠ABP＝θ とする。
(1)　APの長さを，θ を用いて表しなさい。
(2)　直径AB上に，∠BPC=45°を満たす点Cをとる。AC:CBを，θ を用いて表しなさい。
(3)　(2)の点Cについて，直線PCと円の交点のうち，点Pと異なる方をDとする。
$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，△ACDの面積を求めなさい。



【出題のねらい】

(1)　正弦定理を理解しているか。
(2)　三角形の面積の公式を用いて，AC:CB＝PA:PBを得ることができるか。
(3)　円周角の定理と正弦定理，(2)で求めた比，面積の公式を適切に使うことができるか。

＜解答・解説＞

(1)　△ABPとその外接円に，正弦定理を用いると，$\mathrm{AP}=2\cdot 3\cdot\sin\theta=6\sin\theta$　答
別解　ABが外接円の直径であるから，∠APB=90°
よって，△ABPは直角三角形である。
したがって，$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\sin\theta=6\sin\theta$　答

(2)　△ACPの面積をS_1，△BCPの面積をS_2とすると，
$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}\cdot\sin 45^\circ$，$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}\cdot\sin 45^\circ$ である。
よって，$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=S_1:S_2=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=6\sin\theta:6\cos\theta=\sin\theta:\cos\theta$　答
別解　（数学A「図形の性質」の範囲が既習の場合）
直線PCは，∠APBの二等分線であるから，
AC:CB＝AP:PB＝(以下同じ)

(3)　円周角の定理より，∠ABD＝∠APD＝45°
△ABDとその外接円に正弦定理を用いると，$\mathrm{AD}=2\cdot 3\cdot\sin 45^\circ=3\sqrt{2}$
(2)より，$\mathrm{AC}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\cdot 6=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{7}\cdot 6=\dfrac{24}{7}$
また，円周角の定理より，∠BAD＝∠BPD＝45°
よって△ACDの面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{24}{7}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{36}{7}$ 答

別解　直線PCは∠APBの二等分線であるから，点Dは半円の弧$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$を二等分する。よって，△ABDは∠A＝∠B=45°の二等辺三角形で，
その面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9$
したがって，△ACDの面積は，$\dfrac{4}{7}\cdot$(△ABCの面積)$=\dfrac{4}{7}\cdot 9=\dfrac{36}{7}$

$\boxed{4}$ ［１］＜選択問題＞　【 場合の数と確率 】場合の数

［1］「審判」を英語で「REFEREE」といいます。
(1)　この7文字を1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。
(2)　(1)のうち，4つの文字EEEEが連続して並ぶような並べ方は何通りあるか。
(3)　(1)のうち，3つの文字F，R，Rのみに着目したとき，Fが2つのRの間に入っているような並べ方(例参照)は何通りあるか。
　(例)　E $\boxed{\text{R}}$ E $\boxed{\text{F}}$ E E $\boxed{\text{R}}$ のような並べ方でもよい。

【出題のねらい】

(1)　同じものを含む順列の考え方を理解しているか。
(2)　EEEEをひとつのものとして考える工夫を知っているか。
(3)　FRRを△△△でおきかえて考える工夫を知っているか。

＜解答・解説＞

(1)　Rが2つ，Eが4つあるから，$\dfrac{7!}{2!4!}=105$(通り)　答

(2)　4つのEをまとめて考えると，$\dfrac{4!}{2!}=12$(通り)　答

(3)　FRRを△△△でおきかえる。4つのEと3つの△を1列に並べる並べ方は
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$(通り)
この35通りの並んだ7文字のうち△△△に左からR，F，Rを入れると題意を満たす並べ方になる。よって，求める並べ方は　35通り　答

$\boxed{4}$ ［２］＜選択問題＞　【 場合の数と確率 】確率

［2］3枚のカードがあり，カードAは両面とも白，カードBは両面とも赤，カードCは片方が白で，もう片方は赤である。これらは，色以外には見分けがつかないものとする。

(1)　この3枚のカードを，1列に並べるとき，並べ方は何通りあるか。

(2)　この3枚のカードを，1つの袋の中に入れる。よくかき混ぜてから，1枚を，片面だけが見えるように取り出す。見えた色が「赤」である確率を求めなさい。

(3)　この3枚のカードを，1つの袋に入れる。よくかき混ぜてから，1枚を，片面だけが見えるように取り出す。見えた色が「赤」だったとき，その裏面が「赤」である確率を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　赤，白の枚数で分類して，数えることができるか。
(2)　根元事象を正しく理解し，同様に確からしい事象（6通り）の中で，考えることができるか。
(3)　条件付き確率。見えた赤が3通りあることに気がつくか。

＜解答・解説＞

(1)　カードCが白になる場合，
白2枚と，赤1枚を並べる並べ方は　$\dfrac{3!}{2!}=3$(通り)
カードCが赤になる場合，
白1枚と，赤2枚を並べる並べ方は　$\dfrac{3!}{2!}=3$(通り)
したがって，求める場合の数は，$3+3=6$(通り)　答

(2)　カードAの2つの面を，W_1，W_2，
カードBの2つの面を，R_1，R_2
カードCの2つの面を，W_3，R_3　とする。
この6つの面の現れ方は，同様に確からしい。
よって，求める確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$　答

(3)　見えた面が赤であるとき，その赤はR_1，R_2，R_3のいずれかであり，この現れ方は同様に確からしい。
R_1の裏面は赤(R_2)，R_2の裏面は赤(R_1)，R_3の裏面は白(W_3)である。
したがって，求める確率は，$\dfrac{2}{3}$　答

別解
見えた色が「赤」である事象をA，裏面の色が「赤」である事象をBとすると，求める確率は，$P_A(B)$で表される。
(2)より，$P(A)=\dfrac{1}{2}$，　また，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$　であるから，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$$　答