

1 ＜必須問題＞ 【小問集合】

- 次の問いに答えなさい。
- (1) $(x^2-3xy-2y^2)(x-y)(x-2y)$ を展開しなさい。
- (2) $x^2-xy-2y^2+2x+5y-3$ を因数分解しなさい。
- (3) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ の小数部分を a とする。 a の値を求めなさい。
- (4) 不等式 $ax-3\leq\frac{x}{2}+2\leq3\cdots①$ について、次の各問いに答えなさい。
- ただし、 a は定数で $a\neq\frac{1}{2}$ とする。
- (ア) $a=1$ のとき、不等式 ① を解きなさい。
- (イ) 不等式 ① の解が $-2\leq x\leq 2$ となるような a の値を求めなさい。
- (5) 実数 x, y について、次の に最も適する語句を下の ① ～ ④ から選
びなさい。
- $x+y$ が有理数であることは、 x も y も有理数であるための 。
- ① 必要十分条件である
- ② 十分条件であるが必要条件ではない
- ③ 必要条件であるが十分条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない
- (6) 実数全体を全体集合 U とする。 U の部分集合 A, B を
- $A=\{x\mid |x-a|\leq 1\}, B=\{x\mid x^2-7x+6\geq 0\}$
- とするとき、次の各問いに答えなさい。
- (ア) 不等式 $x^2-7x+6\geq 0$ を解きなさい。
- (イ) 不等式 $|x-a|\leq 1$ を解きなさい。
- (ウ) 集合 $A\cap B=\varnothing$ (空集合) となるような実数 a の範囲を求めなさい。
- (7) 2 次方程式 $mx^2-4mx+2m+4=0$ が重解をもつような定数 m の値を求め
なさい。また、そのときの重解を求めなさい。
- (8) 2 次不等式 $ax^2+bx+2>0$ の解が $-2<x<\frac{1}{3}$ であるとき、定数 a, b の値
を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) 式の特徴に着目して、置き換えを含む展開の公式が利用できるか。
- (2) 1 つの文字に着目して式を整理し、因数分解ができるか。
- (3) 分母を有理化し、無理数の整数部分、小数部分を調べ、書き表すことが
できるか。
- (4) (ア) 不等式 $A<B<C$ は、 $A<B$ と $B<C$ が同時に成り立つことを理解し、
連立 1 次不等式を解くことができるか。
- (イ) 不等式の解から定数の条件を調べ、それらを満たす定数の値を求め
ることができるか。
- (5) 命題の真偽および必要条件・十分条件を理解しているか。
- (6) (ア) 2 次不等式を解くことができるか。
- (イ) 絶対値を含む不等式を解くことができるか。
- (ウ) 空集合の意味を理解し、条件を満たす定数の取り得る値の範囲を求め
ることができるか。
- (7) 2 次方程式の解が重解となる条件を理解しているか。
- (8) 2 次不等式の解を 2 次関数の概形と関連させて、解くことができるか。

＜解答・解説＞

- (1) (与式) $= (x^2-3xy-2y^2)(x^2-3xy+2y^2)$
- $= (x^2-3xy)^2-(2y^2)^2$
- $= x^4-6x^3y+9x^2y^2-4y^4$ ㊟
- (2) (与式) $= x^2-(y-2)x-(2y^2-5y-3)$
- $= x^2-(y-2)x-(2y-3)(y-1)$
- $= \{x-(2y-3)\}\{x+(y-1)\}$
- $= (x-2y+3)(x+y-1)$ ㊟
- (3) 与式の分母を有理化すると
- (与式) $= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$
- ここで、 $1<\sqrt{3}<2$ であるから $2<\sqrt{3}+1<3$
- よって、 $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分は 2 である。
- したがって、求める小数部分 a は
- $a=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$ ㊟
- 〔参考〕 (小数部分) $=$ (もとの数) $-$ (整数部分) となります。
- (4) (ア) $a=1$ のとき、不等式 ① は $x-3\leq\frac{x}{2}+2\leq3$ となる。

連立不等式 $\begin{cases} x-3\leq\frac{x}{2}+2 & \cdots ② \\ \frac{x}{2}+2\leq3 & \cdots ③ \end{cases}$ の解を求めればよい。

- ② から $2x-6\leq x+4$ よって $x\leq 10$ $\cdots$ ④
- ③ から $x+4\leq 6$ よって $x\leq 2$ $\cdots$ ⑤
- ④ と ⑤ の共通範囲を求めて $x\leq 2$ ㊟
- (イ) 不等式 ① の解は
- 連立不等式 $\begin{cases} ax-3\leq\frac{x}{2}+2 & \cdots ⑥ \\ \frac{x}{2}+2\leq 3 & \cdots ③ \end{cases}$ の解である。
- ⑥ から $2ax-6\leq x+4$
- 移項して $(2a-1)x\leq 10$
- よって、 $a\neq\frac{1}{2}$ であるから不等式の解は次の 2 つの場合に分けられる。
- (i) $2a-1>0$ すなわち $a>\frac{1}{2}$ のとき $x\leq\frac{10}{2a-1}$
- (ii) $2a-1<0$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき $x\geq\frac{10}{2a-1}$
- ① の解が $-2\leq x\leq 2$ となるためには、
- ③ の解が (ア) より $x\leq 2$ であるから、(ii) となればよい。
- したがって $\frac{10}{2a-1}=-2$
- よって $a=-2$ $\left(a<\frac{1}{2}\text{ を満たす。}\right)$ ㊟
- (5) 命題「 $x+y$ は有理数」 $\Rightarrow$ 「 x も y も有理数」 は偽。
- (反例: $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$)
- 命題「 x も y も有理数」 $\Rightarrow$ 「 $x+y$ は有理数」 は真。
- よって、 $x+y$ は有理数であることは、 x も y も有理数であるための
必要条件であるが、十分条件ではない。③ ㊟
- (6) (ア) $x^2-7x+6\geq 0$ から $(x-1)(x-6)\geq 0$
- よって $x\leq 1, 6\leq x$ $\cdots$ ① ㊟
- (イ) $|x-a|\leq 1$ から $-1\leq x-a\leq 1$
- よって $a-1\leq x\leq a+1$ $\cdots$ ② ㊟
- (ウ) 集合 $A\cap B=\varnothing$ (空集合) となるのは、 ① と ② が共通範囲をもたない
ときである。その条件は
- $1<a-1$ かつ $a+1<6$
- すなわち $2<a$ かつ $a<5$
- よって $2<a<5$ ㊟
- (7) 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると、重解をもつ条件は $D=0$ 。
- $\frac{D}{4}=(-2m)^2-m(2m+4)=2m(m-2)$
- $D=0$ から $2m(m-2)=0$
- $m\neq 0$ より $m=2$

また、重解は $x = \frac{-(-4m)}{2m} = 2$ (m の値に無関係である。)

以上のことから、 $m = 2$, 重解 $x = 2$ ㊦

(8) 条件から、2 次関数 $y = ax^2 + bx + 2$ のグラフは、

$-2 < x < \frac{1}{3}$ のときだけ x 軸より上側にある。

グラフは上に凸の放物線であるから $a < 0$

2 点 $(-2, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$ を通るから $4a - 2b + 2 = 0$ …… ①,

$$\frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b + 2 = 0 \quad \text{…… ②}$$

①, ② を解いて $a = -3$, $b = -5$ ($a < 0$ を満たす。) ㊦

【別解】 $-2 < x < \frac{1}{3}$ を解とする 2 次不等式の 1 つは $(x+2)(x-\frac{1}{3}) < 0$

$$\text{すなわち} \quad x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} < 0$$

$$\text{両辺に } -3 \text{ を掛けて} \quad -3x^2 - 5x + 2 > 0$$

$$ax^2 + bx + 2 > 0 \text{ と係数を比較して} \quad a = -3, b = -5 \quad \text{㊦}$$

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 3x) + 3 \\ &= 2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって、求める頂点の座標は $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ㊦

(2) 与えられた放物線の方程式を変形して、

$$\begin{aligned} y &= 2\{x^2 - (a+1)x + a^2 - 1\} \\ &= 2\left\{\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4}\right\} + a^2 - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 2a + 1}{2} + a^2 - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - 2a - 3}{2} \end{aligned}$$

したがって、求める頂点の座標は $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a^2 - 2a - 3}{2}\right)$ ㊦

(3) 与えられた放物線は、下に凸であるから、 x 軸と異なる 2 点で交わる条件は

$$(\text{頂点の } y \text{ 座標}) < 0 \quad \text{すなわち、(2) から} \quad \frac{a^2 - 2a - 3}{2} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{両辺に } 2 \text{ をかけて} \quad & a^2 - 2a - 3 < 0 \\ \text{左辺を因数分解して} \quad & (a+1)(a-3) < 0 \\ \text{よって} \quad & -1 < a < 3 \quad \text{㊦} \end{aligned}$$

【別解】 与えられた放物線が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は

2 次方程式 $2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ の判別式を D とすると、
 $D > 0$ となることである。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(a+1)\}^2 - 2(a^2 - 1) \\ &= (a+1)^2 - 2(a+1)(a-1) \\ &= (a+1)\{(a+1) - 2(a-1)\} \\ &= (a+1)(-a+3) \\ &= -(a+1)(a-3) \\ D > 0 \text{ から} \quad & -(a+1)(a-3) > 0 \\ \text{両辺に } -1 \text{ をかけて} \quad & (a+1)(a-3) < 0 \\ \text{よって} \quad & -1 < a < 3 \quad \text{㊦} \end{aligned}$$

【2】＜必須問題＞ 【2 次関数】

放物線 $y = 2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 1$ について、次の問いに答えなさい。

(1) $a = 2$ のとき、放物線の頂点の座標を求めなさい。

(2) この放物線の頂点の座標を求めなさい。

(3) この放物線が x 軸と異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) x の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ を平方完成して、 $a(x-p)^2 + q$ の形にし、放物線の頂点の座標を求めることができるか。
- (2) 定数が含まれた 2 次式を平方完成して頂点の座標を求めることができるか。
- (3) 放物線が x 軸と異なる 2 点で交わる条件を頂点の y 座標に着目して考えることができるか。(または、2 次方程式の解の判別式に帰着させて考えることができるか。)

＜解答・解説＞

(1) $a = 2$ のとき、与えられた放物線の方程式は

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

となる。これを変形して

【3】＜選択問題＞ 【図形と計量】

(1) $AB = n$, $BC = n + 1$, $CA = n + 2$ である三角形 ABC において、

$\tan C = \frac{4}{3}$ のとき、次の各問いに答えなさい。

(ア) $\cos C$ の値を求めなさい。

(イ) n の値を求めなさい。

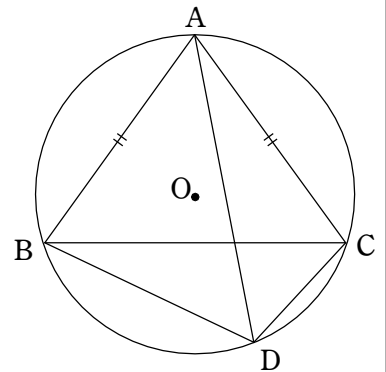
(ウ) 三角形 ABC の内接円の半径 r を求めなさい。

(2) 中心を O とする半径 2 の円に $AB = AC = \sqrt{10}$ である三角形 ABC が内接している。この円の、点 A を含まない弧 BC 上に点 D をとり、線分 DB と線分 DC の長さが $DB : DC = 3 : 2$ を満たすとき、次の線分の長さを求めなさい。

(ア) BC

(イ) DC

(ウ) AD



【出題のねらい】

- (1) (ア) 三角比の相互関係を用いて正接から余弦を求めることができるか。
(イ) 3 辺の長さが n を用いて表されていることに着目し、余弦定理から 3 辺の長さを求めることができるか。
(ウ) 3 辺の長さが与えられた三角形の面積を利用して、内接円の半径を求めることができるか。
- (2) (ア) 正弦定理、三角比の相互関係を順に用いて、辺の長さを求めることができるか。
(イ) 円に内接する四角形の性質を用いて、与えられた条件を満たす辺の長さを求めることができるか。
(ウ) 4 辺の長さが与えられた円に内接する四角形の対角線の長さを求めることができるか。

＜解答・解説＞

$$(1) \text{ (ア) } 1 + \tan^2 C = \frac{1}{\cos^2 C} \quad \text{から} \quad 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 C}$$

$$\cos^2 C = \frac{9}{25} \quad \text{より} \quad \cos C = \pm \frac{3}{5}$$

$\tan C > 0$ であるから、角 C は鋭角である。

$$\text{よって、} \cos C > 0 \text{ であるから} \quad \cos C = \frac{3}{5} \quad \text{㊦}$$

(イ) 余弦定理 $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos C$ を用いて

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2) \cdot \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{整理して} \quad n^2 - 12n - 13 &= 0 \\ \text{因数分解して} \quad (n+1)(n-13) &= 0 \\ \text{よって} \quad n &= -1, 13 \\ n > 0 \text{ であるから} \quad n &= 13 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(7) \quad \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} \quad \text{から}$$

$$\sin C = \tan C \cdot \cos C = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

(2) から $\triangle ABC$ の 3 辺の長さは、 $AC = 13$ 、 $BC = 14$ 、 $CA = 15$ である。

よって $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84$$

また、求める内接円の半径を r とすると $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} r (AC + BC + CA) = \frac{1}{2} r (13 + 14 + 15) = \frac{42}{2} r = 21r$$

したがって、 $21r = 84$ から $r = 4$ 答

$$(2) (7) \quad \triangle ABC \text{ において、正弦定理を用いて} \quad \frac{\sqrt{10}}{\sin \angle ABC} = 2 \cdot 2$$

$$\text{よって} \quad \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$0^\circ < B < 90^\circ$ より、 $\cos \angle ABC > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \sqrt{1 - \sin^2 \angle ABC} \\ &= \sqrt{1 - \frac{10}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

点 A から辺 BC へ垂線 AH を下すと

点 H は辺 BC の中点である。

$\triangle ABH$ において、 $\cos \angle ABH = \frac{BH}{AB}$ より

$$\begin{aligned} BH &= AB \cdot \cos \angle ABH \\ &= \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \left(\cos \angle ABH = \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって、} BC = 2BH = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} \quad \text{答}$$

別解 ($\cos \angle ABC$ の求めた後)

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos \angle ABC$$

$$\text{から} \quad 10 = BC^2 + 10 - 2 \cdot BC \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{整理して} \quad BC^2 - \sqrt{15} BC = 0$$

$$\text{因数分解すると} \quad BC(BC - \sqrt{15}) = 0$$

$$BC > 0 \text{ であるから} \quad BC = \sqrt{15}$$

(4) $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} = \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{4}$$

四角形 $ABDC$ は円に内接するので、 $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$ である。

$$\text{よって、} \cos \angle BDC = \cos(180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle BAC = -\frac{1}{4}$$

$DB : DC = 3 : 2$ より、 $DB = 3x$ 、 $DC = 2x$ ($x > 0$) とすると、

$\triangle BCD$ において余弦定理を用いて

$$(\sqrt{15})^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos \angle BDC$$

$$\text{整理して} \quad 16x^2 = 15 \quad \text{から} \quad x^2 = \frac{15}{16}$$

$$x > 0 \text{ より} \quad x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{よって} \quad DC = 2x = \frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{答}$$

(7) $\angle ABD = \theta$ とする。

$\triangle ABD$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} AD^2 &= (\sqrt{10})^2 + (3x)^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 3x \cdot \cos \angle ABD \\ &= 10 + 9x^2 - 6\sqrt{10}x \cos \theta \quad \dots \quad \text{①} \end{aligned}$$

また、 $\cos \angle ACD = \cos(180^\circ - \angle ABD) = -\cos \angle ABD = -\cos \theta$ から

$\triangle ACD$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} AD^2 &= (\sqrt{10})^2 + (2x)^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 2x \cdot \cos \angle ACD \\ &= 10 + 4x^2 + 4\sqrt{10}x \cos \theta \quad \dots \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \times 2 + \text{②} \times 3 \text{ から } \cos \theta \text{ を消去して} \quad 5AD^2 &= 50 + 30x^2 \\ \text{よって} \quad AD^2 &= 10 + 6x^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ を代入して} \quad AD^2 = 10 + 6 \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2 = \frac{250}{16}$$

$$AD > 0 \text{ より} \quad AD = \frac{5\sqrt{10}}{4} \quad \text{答}$$

補足 辺 DB 、 DC の長さを直接余弦定理に用いて計算すると式が煩雑になるため、 x を用いて計算し、最後に代入するよう工夫しています。

発展 トレミーの定理：円に内接する四角形において、2組の対辺の積の和は対角線の積に等しい。
円に内接する四角形 $ABCD$ とすると、
 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

この定理を用いると、次のように AD の長さを求めることができます。

四角形 $ABDC$ は円に内接する四角形であるから、

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

$$\text{が成り立つから} \quad \sqrt{10} \cdot 2x + \sqrt{10} \cdot 3x = AD \cdot \sqrt{15}$$

$$\text{整理して} \quad 5\sqrt{10}x = \sqrt{15}AD$$

$$\text{よって} \quad AD = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{15}}x$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ であるから} \quad AD = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{5\sqrt{10}}{4} \quad \text{答}$$

別解 (① 、 ② を求めた後)

$$\text{①} = \text{②} \text{ より} \quad 10 + 9x^2 - 6\sqrt{10}x \cos \theta = 10 + 4x^2 + 4\sqrt{10}x \cos \theta$$

$$\text{整理して} \quad 10\sqrt{10}x \cos \theta = 5x^2$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{10}}x$$

$$\text{これを ② に代入して} \quad AD^2 = 10 + 4x^2 + 4\sqrt{10}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}}x = 10 + 6x^2$$

(以下、同様)

別解 (① 、 ② を求めた後)

$$\text{① を変形して} \quad \cos \theta = \frac{10 + 9x^2 - AD^2}{6\sqrt{10}x} \quad \dots \quad \text{①}'$$

$$\text{② を変形して} \quad \cos \theta = \frac{-10 - 4x^2 + AD^2}{4\sqrt{10}x} \quad \dots \quad \text{②}'$$

$$\text{①}' = \text{②}' \text{ より} \quad \frac{10 + 9x^2 - AD^2}{6\sqrt{10}} = \frac{-10 - 4x^2 - AD^2}{4\sqrt{10}}$$

$$\text{整理して} \quad 5AD^2 = 50 + 30x^2 \quad \text{(以下、同様)}$$

4＜選択問題＞ 【 場合の数と確率 】

- (1) 1 から 5 までの異なる整数が 1 つずつ書いてある 5 枚のカードを左から右へ順に並べる。このとき、カードに書かれた整数を左から a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 とおく。次の場合の数を求めなさい。
- (ア) 5 枚のカードの並べ方の総数
- (イ) $a_1 < a_2 < a_3$ かつ $a_3 > a_4 > a_5$ となる並べ方
- (ウ) $a_1 \nlessdot 1$ かつ $a_2 \nlessdot 2$ となる並べ方
- (2) 白と赤の球が合わせて 10 個入っている袋から 3 個の球を取り出す。取り出した球が「白球 2 個、赤球 1 個である確率」を、袋の中に入っている白球と赤球の個数の割合を変化させて考える。袋の中の白球の個数が r のときの確率を P_r とする。次の問いに答えなさい。ただし、 $2 \leq r \leq 9$ とする。
- (ア) 確率 P_3 を求めなさい。
- (イ) 確率 P_r を r を用いて表しなさい。
- (ウ) $P_n < P_{n+1}$ となるような n の値を調べ、 P_r が最も大きくなるときその確率を求めなさい。

【出題のねらい】

- (1) (ア) 異なるものを並べる順列を求めることができるか。
- (イ) 条件を満たす順列を論理的に考え、数え上げることができるか。
- (ウ) 和集合および補集合の要素の個数の数え方を利用して、順列の総数を求めることができるか。
- (2) (ア) 確率の基本性質を理解しているか。
- (イ) 球の個数が一般化されたとき、その確率を定数を用いて表すことができるか。
- (ウ) 一般化された球の個数が n 個の場合と $(n+1)$ 個の場合とを比較して、その確率が最も大きくなるときの確率を求めることができるか。

＜解答・解説＞

- (1) (ア) 異なる 5 枚のカードを 1 列に並べる順列を考えればよいから $5! = 120$ (通り) 図
- (イ) $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ より、 a_3 は 5 枚カードのうち最大の整数である。よって $a_3 = 5$
残りの 4 枚のカードから $a_1 < a_2$ を満たす 2 枚のカードを決めると、 $a_4 > a_5$ を満たす 2 枚のカードも一緒に決まる。
 $a_1 < a_2$ を満たす a_1, a_2 の組は
(a_1, a_2) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)
よって 6 通り 図
- 補足** a_1, a_2 の組各々に対して、 $a_4 > a_5$ を満たす a_4, a_5 の組は順に
(a_4, a_5) = (4, 3), (4, 2), (4, 2), (4, 1), (3, 1), (1, 2) となります。

- (ウ) $a_1 \nlessdot 1$ かつ $a_2 \nlessdot 2$ となる並べ方の総数は、すべての並べ方の総数から、 $a_1 = 1$ または $a_2 = 2$ となる並べ方の総数を引いたものと等しい。
 $a_1 = 1$ となる並べ方の総数は、残り 4 枚のカードを 1 列に並べるから $4! = 24$ (通り)
 $a_2 = 2$ となる並べ方の総数も同様に考えて、 $4! = 24$ (通り)
 $a_1 = 1$ かつ $a_2 = 2$ となる並べ方の総数は、残りの 3 枚のカードを 1 列に並べるから $3! = 6$ (通り)
よって、求める総数は $120 - (24 + 24 + 6) = 78$ (通り) 図

- (2) (ア) 10 個の球が入っている袋から 3 個取り出す方法は ${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ (通り)
- $r = 3$ のとき、袋の中は白球が 3 個、赤球が 7 個であるから、求める確率 P_3 は $P_3 = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3 \times 7}{120} = \frac{7}{40}$ 図

- (イ) 袋の中は白球が r 個、赤球が $(10 - r)$ 個であるから、求める確率 P_r $P_r = \frac{{}_rC_2 \times {}_{10-r}C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{\frac{r \cdot (r-1)}{2} \times (10-r)}{120} = \frac{r(r-1)(10-r)}{240}$ 図

- (ウ) (イ) と同様に、 $P_n = \frac{n(n-1)(10-n)}{240} = \frac{-n^3 + 11n^2 - 10n}{240}$
 $P_{n+1} = \frac{(n+1)n\{10-(n+1)\}}{240} = \frac{(n+1)n(9-n)}{240} = \frac{-n^3 + 8n^2 + 9n}{240}$
 $P_n < P_{n+1}$ から $\frac{-n^3 + 11n^2 - 10n}{240} < \frac{-n^3 + 8n^2 + 9n}{240}$
整理して $3n^2 - 19n < 0$
因数分解して $n(3n - 19) < 0$
よって $0 < n < \frac{19}{3}$

このことから $2 \leq r \leq 9$ より $r = 2, 3, 4, 5, 6$ のとき $P_r < P_{r+1}$ が成り立つ。
すなわち $P_2 < P_3 < P_4 < P_5 < P_6 < P_7$ … ①
したがって $r = 7, 8, 9$ のときの P_r を調べればよい。

$$P_7 = \frac{{}_7C_2 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{21 \times 3}{120} = \frac{63}{120}$$

$$P_8 = \frac{{}_8C_2 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{28 \times 2}{120} = \frac{56}{120}$$

$$P_9 = \frac{{}_9C_2 \times {}_1C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{36 \times 1}{120} = \frac{36}{120}$$

よって、 P_r が最も大きくなるとき、その確率は $P_7 = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$ 図

補足 $P_n > P_{n+1}$ を調べると $n < 0$, $\frac{19}{3} < n$ がわかります。

このことから $2 \leq r \leq 9$ より $r = 7, 8$ のとき $P_r > P_{r+1}$ が成り立つ。
すなわち $P_7 > P_8 > P_9$ … ②
①, ②から $P_2 < P_3 < P_4 < P_5 < P_6 < P_7 > P_8 > P_9$
よって、 P_r は $r = 7$ のとき最も大きくなることがわかります。