

1 <数と式> 次の各問いに答えなさい。

- (1) 2次方程式 $x^2 - \sqrt{3}x - 6 = 0$ を解きなさい。
- (2) $(x+1)^2(x-1)(x^2+1)$ を展開しなさい。
- (3) 次の式を因数分解しなさい。
 (ア) $x^4 - 13x^2 + 36$ (イ) $x^2 + xy - 2y^2 + x + 11y - 12$
- (4) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい。
- (5) $a < 0, b > 0$ のとき、 $\sqrt{a^2b^2}$ を簡単にしなさい。
- (6) 二重根号 $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$ を簡単にしなさい。
- (7) $x = \sqrt{3} - 1$ のとき、次の問いに答えなさい。
 (ア) $x^2 + 2x$ の値を求めなさい。
 (イ) (ア)を利用して、 $x^3 - x^2 + 9$ の値を求めなさい。
- (8) 連立不等式 $\begin{cases} 2(x+3) \geq 5x-3 \\ |x| > 4 \end{cases}$ を解きなさい。

解答

- (1) 解の公式を用いても解けるが、 $\sqrt{3}$ に着目して「 $6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 」を利用してたすき掛けで解く。

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & -2\sqrt{3} \longrightarrow -2\sqrt{3} \\ 1 & & \sqrt{3} \longrightarrow \sqrt{3} \\ \hline & & -\sqrt{3} \end{array}$$

よって、 $x^2 - \sqrt{3}x - 6 = (x - 2\sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ より

$$x = 2\sqrt{3}, -\sqrt{3} \dots \text{答}$$

- (2) [公式] $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ を利用する。

$$\begin{aligned} (x+1)^2(x-1)(x^2+1) &= (x+1)(x+1)(x-1)(x^2+1) \\ &= (x+1)(x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x^4-1) = x^5 + x^4 - x - 1 \dots \text{答} \end{aligned}$$

- (3) (ア) $t = x^2$ とおく。このとき、 $t^2 - 13t + 36 = (t-4)(t-9)$ となる。

$$\text{元に戻すと、}(x^2-4)(x^2-9) = (x+2)(x-2)(x+3)(x-3) \dots \text{答}$$

- (イ) x に着目して整理すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (y+1)x - (2y^2 - 11y - 12) &= x^2 + (y+1)x - (2y-3)(y-4) \\ \text{ここで、} \begin{array}{rcl} 1 & \times & (2y-3) \longrightarrow 2y-3 \\ 1 & & -(y-4) \longrightarrow -y+4 \\ \hline & & y+1 \end{array} \end{aligned}$$

よって、 $\{x + (2y-3)\}\{x - (y-4)\} = (x+2y-3)(x-y+4) \dots \text{答}$

$$\begin{aligned} (4) \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})} &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ &= \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15} \dots \text{答} \end{aligned}$$

- (5) [公式] $\sqrt{k^2} = |k|$ を利用する。※この関係は重要。

$$\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab| \quad \text{ここで、} a < 0, b > 0 \text{ より } ab < 0$$

よって、 $|ab| = -ab \dots \text{答}$

$$\begin{aligned} (6) \sqrt{4 - \sqrt{12}} &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{1})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{1}| \\ &= \sqrt{3} - 1 \dots \text{答} \end{aligned}$$

- (7) (ア) $x+1 = \sqrt{3}$ の両辺を2乗して整理すると、

$$x^2 + 2x = 2 \dots \text{答}$$

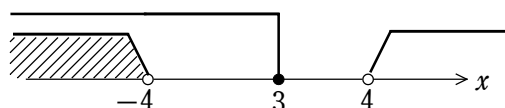
- (イ) (ア)より、 $x^2 = -2x + 2$ を得るので、

$$\begin{aligned} x^3 &= x \cdot x^2 = x(-2x + 2) = -2x^2 + 2x = -2(-2x + 2) + 2x \\ &= 6x - 4 \text{ となる。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 9 &= (6x - 4) - (-2x + 2) + 9 = 8x + 3 = 8(\sqrt{3} - 1) + 3 \\ &= 8\sqrt{3} - 5 \dots \text{答} \end{aligned}$$

$$(8) \begin{cases} 2(x+3) \geq 5x-3 & \dots\dots ① \\ |x| > 4 & \dots\dots ② \end{cases} \text{とする。}$$

①より、 $3x \leq 9$ よって $x \leq 3$ ②より、 $x < -4, 4 < x$ を得る。



ゆえに、左図より $x < -4 \dots \text{答}$

2 <集合と論理> 次の各問いに答えなさい。

- (1) 集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の2つの部分集合 A, B について、 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 6, 9\}, A \cap B = \{2\}, \overline{A} \cap B = \{4, 8\}$ である。集合 A を、要素を書き並べる方法で答えなさい。
- (2) x, y を正の実数とする。次の命題の真偽を述べなさい。
また、偽ならば反例もあげなさい。

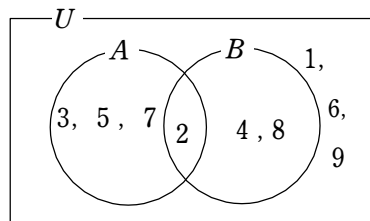
命題

「 x が無理数かつ y が無理数ならば、和 $x+y$ は無理数である。」

- (3) x は実数とする。条件「 $-1 \leq x < 3$ 」の否定を述べなさい。

解答

- (1) ド・モルガンの法則を用いて、ベン図を書くと図のようになる。

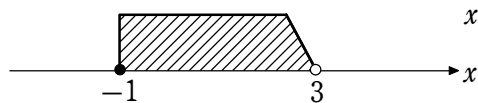


よって、求める集合 A は

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \dots \text{答}$$

- (2) この命題は偽である。なぜなら、 $x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}$ を考えると、 x, y はともに正の無理数だが、その和 $x + y = 4$ となり有理数となる。偽で反例は、 $x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2} \dots \text{答}$

- (3) 数直線で考えると楽である。図の斜線部分の否定なので、



$x < -1$ または $3 \leq x \dots \text{答}$

3 <2次関数> 次の各問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = ax + b$ ($-2 \leq x \leq 1$) の値域が $1 \leq y \leq 7$ であるとき、定数 a, b の値を求めなさい。ただし、 a, b は同符号とする。
- (2) 関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ のとき、次の値を求めなさい。
 (ア) $f(0)$ (イ) $f(a+1)$ (a は定数)
- (3) 2次関数 $y = -(x+1)(x-3)$ のグラフの頂点を求めなさい。
- (4) 放物線 $y = x^2 + 8x + 15$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に $p-3$ だけ平行移動すると、放物線 $y = x^2 - 4x + 6$ と重なった。このとき、定数 p の値を求めなさい。
- (5) 2次関数 $y = x^2 - 4x + 3k$ の最小値が -1 であるとき。定数 k の値を求めなさい。
- (6) 2次関数 $y = -2x^2 + 4kx - 15$ は $x = 3$ で最大値をとる。このとき、定数 k の値と最大値を求めなさい。
- (7) 次の条件を満たす2次関数を求めなさい。
 (ア) グラフは軸が y 軸で、2点 $(-1, 2), (2, 5)$ を通る。
 (イ) $x = -5$ で最小値2をとり、グラフは点 $(-3, 10)$ を通る。
- (8) 2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ ($0 < x \leq a$) が最大値をもつような、定数 a の値の範囲を求めなさい。ただし、 $a > 0$ とする。
- (9) 放物線 $y = 2x^2 + kx - 2k + 1$ が異なる2点 $(-1, 0), (a, 0)$ を通るような、定数 k の値を求めなさい。また、そのときの定数 a の値も求めなさい。

解答

- (1) 傾き $a > 0$ または $a < 0$ の場合分けを行うのが普通だが、問題文をよく読むと、2つの条件 $-2 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 7 \dots ①$ より切片 $b > 0$ で、 a, b は同符号 $\dots ②$ より傾き $a > 0$ である。よって、

$$\text{連立方程式} \begin{cases} -2a + b = 1 \\ a + b = 7 \end{cases} \text{を解いて、} a = 2, b = 5 \dots \text{答} \text{ を得る。}$$

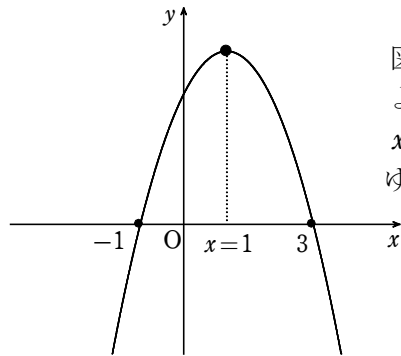
(2) $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

(ア) $f(0) = 3 \dots$ 答

(イ) $f(a+1) = \{(a+1)-1\}^2 + 2 = a^2 + 2 \dots$ 答

(3) $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ と変形出来て、
頂点は、点 $(1, 4) \dots$ 答

【別解】 式の特徴【因数分解された形】を踏まえてグラフで考えてみる。
 $y = -(x+1)(x-3)$ のグラフは、上に凸で x 軸と異なる 2 点で交わり図のような概形である。



図より、軸が直線 $x=1$ と分かる。
よって、 $y = -(x+1)(x-3)$ に
 $x=1$ を代入すると $y=4$ を得る。
ゆえに、求める頂点は、点 $(1, 4) \dots$ 答

(9) 放物線 $y = 2x^2 + kx - 2k + 1$ が、点 $(-1, 0)$ を通るので、
 $x = -1$ 代入すると $-3k + 3 = 0$ より $k = 1$ を得る。
 $k = 1$ のとき、この放物線は $y = 2x^2 + x - 1 \dots$ ① となる。
① に $y = 0$ を代入して、残りの点 $(a, 0)$ を考える。

$$2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1) = 0 \text{ より } x = -1, \frac{1}{2}$$

よって、求める値は $k = 1, a = \frac{1}{2} \dots$ 答

(4) x 軸方向 p 、 y 軸方向 $p-3$ だけ平行移動するので、 x, y の代わ
って $x-p, y-p+3$ を $y = x^2 + 8x + 15$ へ代入して、 p の値を
求めることも出来るが計算が面倒である。問題文をよく読むと実は、
定数 p の値に関係なく以下のように考えることができる。

放物線 $y = x^2 + 8x + 15 = (x+4)^2 - 1 \dots$ ① と変形できるから、
グラフの頂点は点 $(-4, -1)$ である。同様にして、

放物線 $y = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \dots$ ② と変形できるので、
グラフの頂点は点 $(2, 2)$ である。したがって、①のグラフを②の
グラフに重ねるには、 x 軸方向 6、 y 軸方向 3 だけ平行移動する。
よって、求める定数 p の値は $p = 6 \dots$ 答

(5) $y = x^2 - 4x + 3k = (x-2)^2 + 3k - 4$ と変形できる。このとき、
 $x = 2$ で、最小値 $3k - 4$ をとる。よって、条件より
 $3k - 4 = -1$ だから、 $k = 1 \dots$ 答

(6) (5) と同様に考えて、
 $y = -2x^2 + 4kx - 15 = -2(x-k)^2 + 2k^2 - 15$ と変形できるので、
 $x = k$ のとき、最大値 $2k^2 - 15$ をとる。よって、条件より
定数 $k = 3$ となる。また、最大値は $2k^2 - 15 = 2 \cdot 3^2 - 15 = 3$
ゆえに、求める定数の値は $k = 3$ 、最大値 3 $\dots$ 答

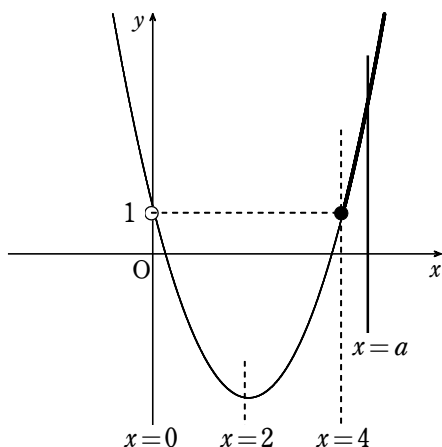
(7) (ア) 軸が y 軸より、求める 2 次関数は $y = ax^2 + q \dots$ ① とおける。
これが、2 点 $(-1, 2), (2, 5)$ を通るので ① より

$$\begin{cases} a + q = 2 \\ 4a + q = 5 \end{cases} \text{ これを解いて、 } a = 1, q = 1$$

よって、 $y = x^2 + 1 \dots$ 答

(イ) 求める 2 次関数は $y = a(x+5)^2 + 2$ ($a > 0$) $\dots$ ② とおける。
これが、点 $(-3, 10)$ を通るので ② より
 $4a + 2 = 10$ より、 $a = 2$ これは、 $a > 0$ を満たす。
よって、 $y = 2(x+5)^2 + 2$ または $y = 2x^2 + 20x + 52 \dots$ 答

(8) $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ ($0 < x \leq a$) より、



頂点が、点 $(2, -3)$
軸が、直線 $x = 2$ と分かる。
図から、 $0 < x \leq a$ で最大値を
とるためには、 $a \geq 4 \dots$ 答