$\boxed{1}$(1)　【整式の整理】

( )を使って，xの係数をまとめるのが重要です。

解答　xについて降べきの順に整理すると

1次　2次　1次

$3x+x^2+4xy+3=x^2+4xy+3x+3$

$=x^2+(4y+3)x+3$　答

(2)　【単項式の乗法】

$a^m\times a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$

などを指数法則といいます。

解答　$3x^2\times(2xy^2)^3=3x^2\times 8x^3y^6=24x^5y^6$　答

(3)　【因数分解①(公式利用)】

和の形の式を積の形に直すことを因数分解するといいます。 式の形を見抜いて，的確に公式を使います。

この式では　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　が使えます。

解答　$x^2-16y^2=x^2-(4y)^2=(x+4y)(x-4y)$　答

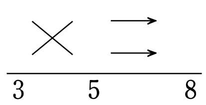
(4)　【因数分解②(たすきがけ)】

この問題の式は，xの2次式で，x^2の係数が1でありません。また，前問のような共通因数もありません。

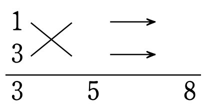
このような式に対しては「たすきがけ」と呼ばれる方法で因数分解します。

たすきがけの手順を復習してみましょう。

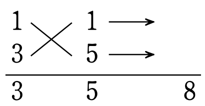
手順①　因数分解したい式の係数をx^2の係数，定数項，xの係数の順に並べる。



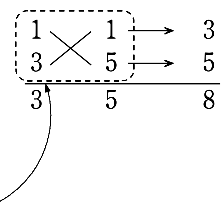
手順②　「3」の上に，掛けて3になる数を縦に並べて書きます。



手順③　「5」の上に，掛けて5になる数を縦に並べて書きます。



手順④　「8」の上に，3×1の3と，1×5の5を書きます。この2つの数字の合計が「8」になっていれば成功です。



手順⑤　成功したら，左上の4つの数を用いて

$3x^2+8x+5=(\boxed{1}x+\boxed{1})(\boxed{3}x+\boxed{5})$

$=(x+1)(3x+5)$　答と書いたらできあがり。

(5)　【数の種類】

ひとくちに「数」といっても，その性質の違いによって，さまざまな「数」があります。その中で，ものを数えるときに使う数「ひとつ，ふたつ，みっつ，……」(正の整数)を「自然数」といいます。

① 0は「正」の数ではありません。

② $\dfrac{13}{3}$ は割り切れないので「整数」ではありません。

③ $(\sqrt{3})^2=3$ ですから，自然数です。

④ $|2-5|=|-3|=3$ ですから，自然数です。

⑤ $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ は無理数です。

⑥ -4は「負」の数なので，自然数ではありません。

解答　③，④　答

(6)　【分母の有理化】

分母に根号を含む式は，分母と分子に，分母にある根号を掛けて，分母に根号を含まない式に直すことができます。

解答　$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-\dfrac{20}{\sqrt{10}}$　　ここが有理化

$=(\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-\dfrac{20\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

$=5+2\sqrt{10}+2-\dfrac{20\sqrt{10}}{10}$

$=7+2\sqrt{10}-2\sqrt{10}=7$　答

(7)　【1次不等式の解法】

1次不等式では，左辺にxを含む式を集め，右辺にはxを含まない式を集めます。両辺に負の数を掛けたり，両辺を負の数で割ったりするときは不等号の向きを変える必要があります。左辺が「x」だけになるまで変形します。

解答　$2x+7\geqq 8x-5$　より　$2x-8x\geqq -5-7$

$-6x\geqq -12$

よって　$x\leqq 2$　答

(8)　【連立不等式の解法】

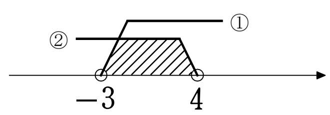
不等式$A<B<C$は，連立不等式$\begin{cases}A<B\\B<C\end{cases}$と同じです。

2つの不等式の解を，数直線上に表すことで解くことができます。

解答　$-5<2x+1$ より $-2x<6$ よって $x>-3$ ……①

次に，$2x+1<9$ より $2x<8$　よって　$x<4$ ……②

①，②を数直線上に表すと右図のようになる。



共通範囲を求めて，$-3<x<4$　答

参考　$A<B<C$の形の連立不等式の中でも，特に　(定数)<(xの式)<(定数) の形のときは次のように解くこともできます。

別解　$-5<2x+1<9$ の各辺から1を引いて

$-6<2x<8$

各辺を2で割って　$-3<x<4$　答

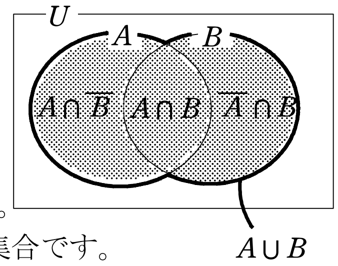
(9)【和集合，補集合】

$A\cup B$は，和集合。

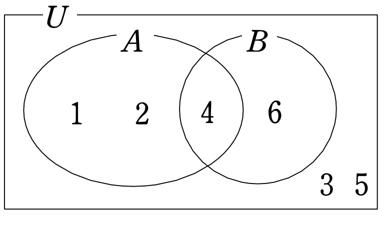
A，Bのすべての要素をあわせたものです。

また，$\overline{P}$は，Pの補集合。

Pに入っていない要素の集合です。



なので，$\overline{A\cup B}$は$A\cup B$に入っていない要素の集合を表します。



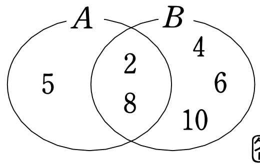
解答

$A\cup B=\{1,2,4,6\}$

よって

$\overline{A\cup B}=\{3,5\}$　答

(10)【集合を図に表す】
集合は，ベン図と呼ばれる図に表すと分かりやすくなります。



答

(11)【命題の反例】
例えば，「(すべての)リンゴは赤い」は間違っていますよね。なぜなら，世の中には「青リンゴ」もあるからです。この場合の「青リンゴ」のように，「リンゴだけど赤くないもの」を論理の用語で「反例」といいます。
今回の問題の命題は「 $x \in B$ ならば $x \in A$ 」。
言い換えると，「(すべての)集合 B の要素は，集合 A の要素である。」と言っていますが， B の要素であっても， A の要素でないものもありますよね。それがこの命題の反例です。

解答　$x=4$　ほかに「 $x=6$ 」「 $x=10$ 」でもよい。答

(12)【必要条件と十分条件】
２つの条件 p , q について，
命題「 $p \Longrightarrow q$ 」が真であるとき，
「 p は,(q であるための)十分条件である」
「 q は,(p であるための)必要条件である」といいます。

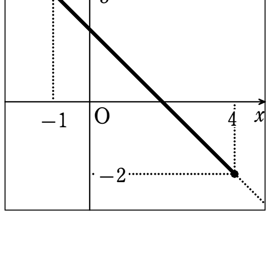
解答　「6の倍数ならば3の倍数」は真
(6の倍数6，12，18，……はすべて3の倍数)
「3の倍数ならば6の倍数」は偽（反例 $x=3$ ）
よって x が6の倍数であることは， x が3の倍数であるための $\boxed{\text{十分}}$ 条件。答

(13)【生活の中の数学・問題の題意を読み取る】

解答　税抜き3600円の商品の消費税は
3600×0.1＝360(円)です。
よって，A店では　3600＋360＝3960(円)になります。
したがって，A－B＝3960－3850＝110(円)　であり，
$\boxed{\text{B}}$ 店が， $\boxed{110}$ 円得　となります。答

2 (1)【関数の値域】
x の関数 y について， x が定義域のすべての値をとって変化するとき， y のとり得る値の範囲を値域といいます。

解答
グラフが，点(3 , -1)を通るから
この関数は, $x=3$ のとき, $y=-1$ となる。
よって， $-1=a\times3+2$
$3a=-3$ より　$a=-1$　答
このとき，関数は， $y=-x+2$
$x=-1$ のとき $y=-(-1)+2=3$
$x=4$ のとき， $y=-4+2=-2$
x が -1 から4まですべての値をとって変化するとき
y は3から -2 まで減少し続けるから,
この関数の値域は， $-2 \leqq y \leqq 3$　答



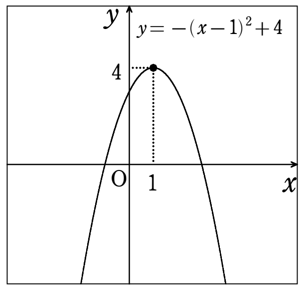
(2)【2次関数のグラフ(放物線)の頂点，軸，形状】
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフを放物線といいます。
頂点は点(p , q)，軸は直線 $x=p$ ，形状は $a>0$ ならば下に凸， $a<0$ ならば上に凸です。

解答　2次関数 $y=(x+2)^2$ のグラフは，頂点が点(-2 , 0), 軸が直線 $x=-2$,下に凸の放物線である。答

(3)【2次式の平方完成】
2次式を $(x-p)^2+q$ の形に変形することを「平方完成」といいます。公式を覚えて，マスターしましょう。
（公式） $x^2+ax=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

解答　$x^2-4x+7=(x-2)^2-2^2+7=(x-2)^2+3$
よって， $y=(x-2)^2+3$　答

(4)【2次関数の最大・最小】
解答 この2次関数のグラフは図のようになる。



したがって， y は
$x=1$ のとき最大値4をとる。
最小値はない。答

(5)【2次関数の決定】
解答　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおくと，そのグラフが3点(0 , 0)，(4 , 0)，(1 , 3)を通るから
$0=a\cdot0^2+b\cdot0+c$ ……①
$0=a\cdot4^2+b\cdot4+c$ ……②
$3=a\cdot1^2+b\cdot1+c$ ……③
①から $c=0$
よって②は　$16a+4b=0$ から $4a+b=0$ ……②’
③は　$a+b=3$ ……③’
③’－②’より $3a=-3$　よって　$a=-1$
③’より　$-1+b=3$　よって　$b=4$
したがって，求める2次関数は $y=-x^2+4x$　答

(6)【2次方程式の解法(解の公式)】
2次方程式では，まず因数分解を利用することを考えます。因数分解が可能でない場合に解の公式でのアプローチをしていきましょう。

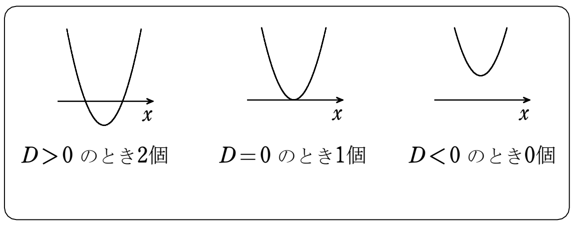
＜解の公式＞
$ax^2+bx+c=0$ のとき　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2次方程式の左辺の因数分解を考えてもきれいな整数での因数分解はできそうもありません。
そこで解の公式を使います。

解答　$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{2}$
$=\dfrac{-4\pm2\sqrt{7}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$　答

(7)　【２次関数のグラフと x 軸の位置関係】

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，(判別式)$D=b^2-4ac$を用いて調べることができます。



解答　この２次関数の左辺を用いた２次方程式

$x^2-6x+10=0$ の判別式をD とおくと，

$D=(-6)^2-4\cdot1\cdot10=36-40=-4<0$

よって，

この２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は０個　答

(8)　【２次不等式の解法】

２次不等式にもいろいろなタイプがありますが，この問題のように，左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用しましょう。また，２次不等式を解くとき，実は，その途中で２次方程式を解きます。２次方程式を解くことで，グラフがイメージできるので，最後は，そのグラフを見て，２次不等式を解くことになります。なので，２次不等式を解く問題では，積極的にグラフを書きましょう。

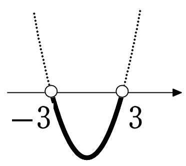
解答　$x^2<9$ より $x^2-9<0$

左辺を因数分解すると

$(x+3)(x-3)<0$

この不等式を満たす

x の値の範囲は　$-3<x<3$　答



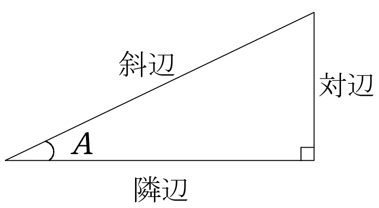
3 (1)　【直角三角形と三角比】

直角三角形の３辺には名前がついています。「斜辺」は知っている人が多いと思います。斜辺は，直角の向かいの辺のことです。残りの２辺の名前を知っていますか。直角三角形には鋭角が２つあります。そのうち，ひとつの角をAとするとき，Aの向かいの辺を「Aの対辺」，残りの１辺を「Aの隣辺」といいます。これらの辺の比(分数)のうち特定のものを三角比といいます。

$\sin A=\dfrac{(A\text{の対辺})}{(\text{斜辺})}$

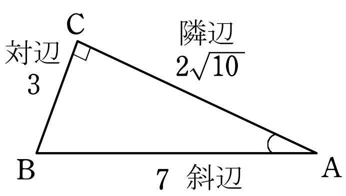
$\cos A=\dfrac{(A\text{の隣辺})}{(\text{斜辺})}$

$\tan A=\dfrac{(A\text{の対辺})}{(A\text{の隣辺})}$



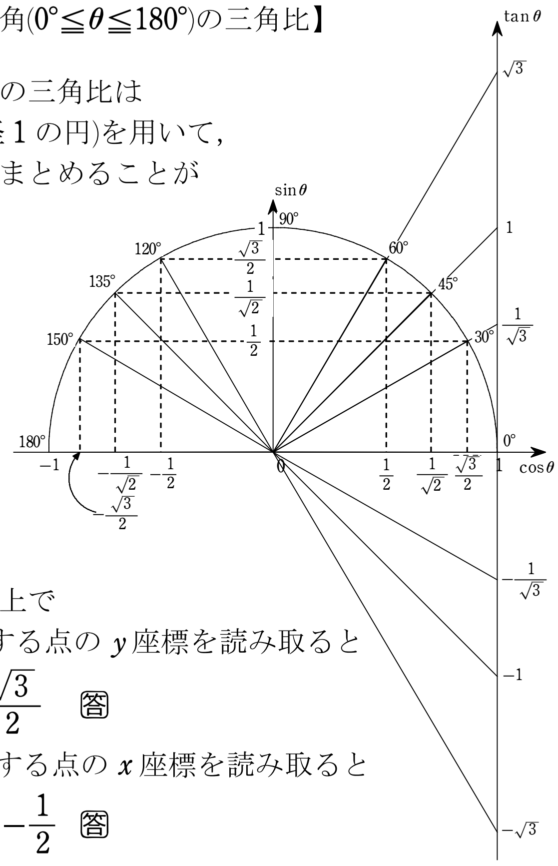
解答

$\cos A=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$　答



(2)　【代表的な角(0°≦θ≦180°)の三角比】

代表的な角の三角比は単位円(半径１の円)を用いて，図のようにまとめることができます。



解答　円周上で

60° に対応する点の y 座標を読み取ると

$\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　答

120°に対応する点の x 座標を読み取ると

$\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$　答

180°の点と原点を通る直線と直線 $x=1$ との交点の y 座標を読み取ると

$\tan 180°=0$　答

(3)　【三角比の相互関係】

$\sin A$ ，$\cos A$ ，$\tan A$ のあいだには

(公式1)　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

(公式2)　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(公式3)　$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

が成り立っています。

これらの公式を的確に用いると，一つの三角比から，他の二つの三角比を求めることができます。

解答　$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ より，

$\dfrac{1}{\cos^2 A}=1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$

よって　$\cos^2 A=\dfrac{9}{10}$

A は鋭角であるから，$\cos A>0$

よって，$\cos A=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　答

次に，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ より

$\sin A=\tan A\times\cos A=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　答

(4)　【正弦定理】

直角三角形でない三角形では，辺の長さや角の大きさ，外接円の半径を求めるときに，正弦定理や余弦定理を使います。１組の角と辺が分かる場合(a と A , b と B , c と C)は，正弦定理が使えます。

＜正弦定理＞

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　(R は外接円の半径)

解答　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ より，

$a=2R\sin A=2\times5\times\sin 30°=2\times5\times\dfrac{1}{2}=5$　答

(5)　【余弦定理】

2辺とその間の角が分かっているとき，余弦定理を用いて，他の1辺の長さを求めることができます。

＜余弦定理＞
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

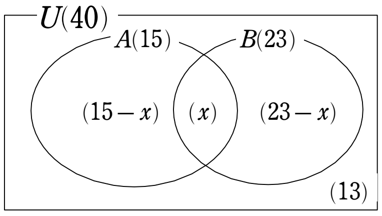
解答　余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4^2+1^2-2\times4\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=16+1+4=21$　　$a>0$ より　　$a=\sqrt{21}$　答

4 (1)　【和集合・補集合の要素の個数】

解答 ラグビー，野球が好きな生徒の集合をそれぞれ A，B とすると，両方どちらも好きな生徒は $A\cap B$ で表される。$A\cap B$ の要素の個数を x とおくと，
図のように，要素の個数を表すことができる。



よって，$(15-x)+(23-x)+x+13=40$ より

$-x+51=40$　　したがって $x=11$　　　　11人　答

(2)　【積の法則(正の約数の個数)】

参考

正の整数 N が $N=a^p\times b^q\times c^r$ の形に素因数分解されるとき，
N の正の約数の個数は　$(p+1)(q+1)(r+1)$

解答　2020を素因数分解すると
$2020=2^2\times5\times101$ となるから，
2020の正の約数の個数は
$(2+1)(1+1)(1+1)=3\times2\times2=12$ (個)　答

2) 2020
2) 1010
5) 505
　 101

(3)　【順列(異なる n 個をすべて並べる)】

参考

異なる n 個のものを1列に並べる方法は
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times2\times1$ (通り)

解答　$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ (通り)　答

(4)　【順列(異なる n 個のうち r 個だけ並べる)】

参考

異なる n 個のうち r 個だけ1列に並べる方法は

$${}_nP_r=\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-r+1)}^{r\text{個}}$$

解答　${}_6P_2=6\times5=30$ (通り)　答

(5)　【組み分けの総数(グループに区別があるとき)】

解答

Aグループの2人の決め方は ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$ (通り)

残った4人から，

Bグループの2人を決める方法は ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$ (通り)

残った2人はCグループになるから1通り。

よって，積の法則より　$15\times6\times1=90$ (通り)　答