$\boxed{1}$ ＜必須問題＞　【小問集合】

次の各問いに答えなさい。

(1)　$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$ を展開しなさい。

(2)　$x^2-xy-2y^2-x-7y-6$ を因数分解しなさい。

(3)　$\alpha=\sqrt{3}-1$ のとき，$\sqrt{\alpha^2+2\alpha+1}+\sqrt{\alpha^2-2\alpha+1}$ の値を求めなさい。

(4)　連立不等式 $\begin{cases}|x-4|<3\\|x-10|>a\end{cases}$ …① について，次の問いに答えなさい。
ただし，a は実数とする。

(ｱ)　不等式 $|x-4|<3$ を解きなさい。

(ｲ)　連立不等式 ① を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めなさい。

(5)　A，B を２つの集合とするとき，次の $\boxed{}$ に最も適する語句を下の ①～④ から選びなさい。

a が $A\cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための $\boxed{}$。

①　必要条件であるが十分条件でない
②　十分条件であるが必要条件でない
③　必要十分条件である
④　必要条件でも十分条件でもない

(6)　１次不等式 $ax+1\leqq 2x-7$ の解が $x\geqq\dfrac{4}{3}$ のとき，a の値を求めなさい。

(7)　２次不等式 $-x^2+2x+6\geqq 0$ を解きなさい。

(8)　放物線 $y=x^2+3x$ を平行移動したもので，点 (-1 , 5) を通り，頂点が放物線 $y=-x^2$ 上にある放物線の方程式を求めなさい。

(9)　２次不等式 $x^2+(k+3)x-k>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

【出題のねらい】

(1)　式の特徴に着目して，掛ける順序を工夫して展開の公式が利用できるか。
(2)　１つの文字に着目して式を整理し，因数分解ができるか。
(3)　平方根の性質を理解し，根号をはずして簡単にできるか。
(4)　(ｱ)　絶対値を含む不等式を解くことができるか。
　　(ｲ)　連立不等式の解の存在範囲を求めることができるか。
(5)　命題の真偽および必要条件・十分条件を理解しているか。
(6)　文字係数の１次不等式を場合に分けて解くことができるか。
(7)　２次不等式を解くことができるか。。
(8)　条件を満たす放物線の方程式を導くことができるか。
(9)　２次不等式の解を２次関数の概形と関連させて，解くことができるか。

＜解答・解説＞

(1)　(与式) $=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$
$=(x^2-4)(x^2-1)$
$=x^4-5x^2+4$　答

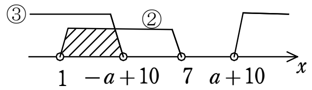
(2)　(与式) $=x^2-(y+1)x-(2y^2+7y+6)$
$=x^2-(y+1)x-(2y+3)(y+2)$
$=\{x-(2y+3)\}\{x+(y+2)\}$
$=(x-2y-3)(x+y+2)$　答

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & -(2y+3) & \longrightarrow & -2y-3 \\ 1 & & y+2 & \longrightarrow & y+2 \\ \hline & & & & -y-1 \end{array}$$

(3)　(与式) $=\sqrt{(\alpha+1)^2}+\sqrt{(\alpha-1)^2}=|\alpha+1|+|\alpha-1|$
ここで，$\alpha=\sqrt{3}-1$ であるから，
(与式) $=|(\sqrt{3}-1)+1|+|(\sqrt{3}-1)-1|$
$=|\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|=\sqrt{3}-(\sqrt{3}-2)=2$　答

(4)　(ｱ)　$|x-4|<3$　から　$-3<x-4<3$
よって　$1<x<7$　…②　答

(ｲ)　$|x-10|>a$ の解を求めると
(i)　$a<0$ のとき
$|x-10|>a$ は常に成り立つので，x はすべての実数
したがって，①を満たす実数 x が存在するのは　$a<0$
(ii)　$a\geqq 0$ のとき
$|x-10|>a$ は　$x-10<-a$，$a<x-10$
よって　$x<-a+10$，$a+10<x$　…③
① を満たす実数 x が存在する条件は
①，② が共通範囲もつことであるから
$1<-a+10$
すなわち　$a<9$
$a\geqq 0$　から　$0\leqq a<9$



(i)，(ii) より，① を満たす実数 x が存在するのは　$a<9$　答

(5)　命題「 a が $A\cup B$ の要素である」$\Longrightarrow$「 a が A の要素である」は偽。
(反例：$a\notin A$，$a\in B$)
命題「 a が A の要素である」$\Longrightarrow$「 a が $A\cup B$ の要素である」は真。
よって，a が $A\cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるため必要条件であるが，十分条件ではない。①　答

(6)　与えられた不等式を変形して　$(a-2)x\leqq -8$
次の３つの場合に分けて考えればよい。
(i)　$a-2>0$　すなわち　$a>2$　のとき　$x\leqq -\dfrac{8}{a-2}$
(ii)　$a-2=0$　すなわち　$a=2$　のとき　$0\cdot x\leqq -8$　となるので
これを満たす x の値はない。
(iii)　$a-2<0$　すなわち　$a<2$　のとき　$x\geqq -\dfrac{8}{a-2}$
このうち，与式の解が $x\geqq\dfrac{4}{3}$ となるのは (iii) の場合である。
したがって　$-\dfrac{8}{a-2}=\dfrac{4}{3}$　となればよい。
これを解いて　$a=-4$ ($a<2$ を満たす)　答

(7)　$-x^2+2x+6\geqq 0 \iff x^2-2x-6\leqq 0$　である。
２次方程式 $x^2-2x-6=0$ の解は　$x=1\pm\sqrt{7}$　であるから
求める解は　$1-\sqrt{7}\leqq x\leqq 1+\sqrt{7}$　答

(8)　頂点が $y=-x^2$ 上にあるので，頂点の座標は　(t , $-t^2$) とおける。
また，求める放物線は，$y=x^2+3x$ を平行移動したものであるから
$y=(x-t)^2-t^2$　…①
とおける。これが点 (-1 , 5) を通るから　$5=(1-t)^2-t^2$
よって　$t=2$
したがって，求める放物線の方程式は ① から
$y=(x-2)^2-4$ [$y=x^2-4x$]　答

(9)　x^2 の係数が正であるから，常に不等式が成り立つための条件は，２次方程式 $x^2+(k+3)x-k=0$ の判別式を D とすると　$D<0$
$D=(k+3)^2-4\cdot 1\cdot(-k)=k^2+10k+9=(k+9)(k+1)$
であるから $D<0$ より　$(k+9)(k+1)<0$
よって　$-9<k<-1$　答

2 ＜必須問題＞　【２次関数】

2 次関数 $y=2x^2+4kx-3k-1$ (k は定数) のグラフを C とする。次の問いに答えなさい。

(1)　$k=2$ のとき，次のものを求めなさい。

　(ｱ)　C の頂点の座標　　　(ｲ)　定義域 $-3\leqq x\leqq 1$ における値域

(2)　最小値が -10 となるような定数 k の値を求めなさい。

(3)　C が x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　(ｱ)　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ を平方完成して，$y=a(x-p)^2+q$ の形にし，2 次関数のグラフである放物線の頂点を求めることができるか。

　(ｲ)　定義域を制限した場合，開区間と閉区間を区別して値域を求めることができるか。

(2)　定数 k が入った式を平方完成し，与えられた条件を満たす k の値を求めることができるか。

(3)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，グラフをイメージして放物線と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件を考察し，定数 k の値の範囲を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1)　$k=2$ のとき放物線 C は　$y=2x^2+8x-7$　である。

(ｱ)　$2x^2+8x-7=2(x^2+4x)-7$

$=2(x+2)^2-15$

よって　$y=2(x+2)^2-15$

したがって，頂点の座標は　$(-2,\ -15)$　答

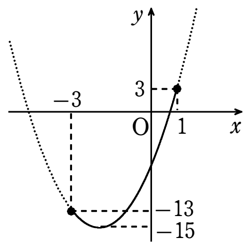
(ｲ)　与えられた関数の式は

$y=2(x+2)^2-15$ $(-3\leqq x\leqq 1)$

であり，そのグラフは右図の実線部分である。

よって，この関数の値域は

$-15\leqq y\leqq 3$　答



(2)　放物線 C の式を変形すると　$y=2(x+k)^2-2k^2-3k-1$　…(*)

よって，C は

$x=-k$　で　最小値 $-2k^2-3k-1$

をとる。最小値が -10 となるから　$-2k^2-3k-1=-10$

すなわち　$(2k-3)(k+3)=0$

よって　$k=-3,\ \dfrac{3}{2}$　答

(3)　放物線 C と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるための条件は，次の [1], [2], [3] が同時に成り立つことである。

[1]　C と x 軸が異なる 2 点で交わるから　(頂点の y 座標) <0

(*) から C の頂点の y 座標は　$-2k^2-3k-1$　であるから

$-2k^2-3k-1<0 \iff 2k^2+3k+1>0 \iff (2k+1)(k+1)>0$

よって　$k<-1,\ -\dfrac{1}{2}<k$　…①

[2]　C の軸について　(軸) >0

軸の方程式は (*) より　$x=-k$

(軸) >0 となればよいから　$-k>0$

すなわち　$k<0$　…②

[3]　C は下に凸の放物線であるから，(y 軸との交点の y 座標) >0

y 軸との交点の y 座標は $-3k-1$ であるから　$-3k-1>0$

すなわち　$k<-\dfrac{1}{3}$　…③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$k<-1,\ -\dfrac{1}{2}<k<-\dfrac{1}{3}$　答

別解　条件 [1] については，以下のように ① を導いてもよい。

$y=2x^2+4kx-3k-1$ の係数について

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-2\cdot(-3k-1)=4k^2+6k+2=2(2k+1)(k+1)$

$D>0$ となればよいから　$2(2k+1)(k+1)>0$

よって　$k<-1,\ -\dfrac{1}{2}<k$

3 ＜選択問題＞　【 図形と計量 】

(1)　次の問いに答えなさい。

(ｱ)　右の図 1 のように半径 1 の円に内接する正十二角形の面積を求めなさい。

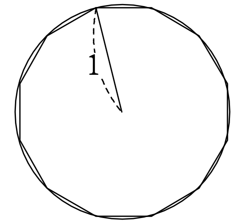


図 1

(ｲ)　下の図 2 のように $A=15^\circ$，$C=90^\circ$ である直角三角形 ABC の辺 AC 上に点 D をとる。AD $=$ BD $=2$ のとき，$\tan 15^\circ$ の値を求めなさい。

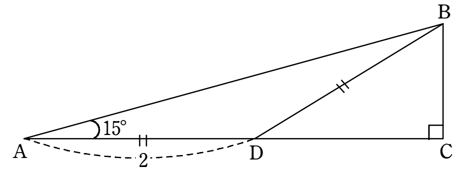


図 2

(ｳ)　右の図 3 のように半径 1 の円に外接する正十二角形の面積を求めなさい。

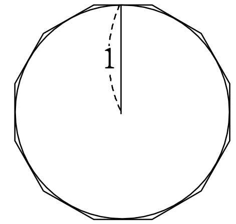
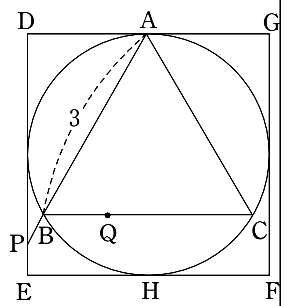


図 3

(2)　右図のように，1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC に円が外接し，その円に正方形 DEFG が外接している。また，点 A，H はそれぞれ円と正方形の接点の 1 つである。



(ｱ)　正方形 DEFG の 1 辺の長さを求めなさい。

(ｲ)　△ABQ の面積が △ABC の面積の $\dfrac{1}{3}$ となるように辺 BC 上に点 Q をとる。このとき，線分 AQ の長さを求めなさい。

(ｳ)　直線 AB と辺 DE の交点を P とする。このとき，$\tan\angle$APH の値を求めなさい。

【出題のねらい】

(1)　(ｱ)　正多角形を三角形に分割し，面積を求めることができるか。

　(ｲ)　三角比の定義から正接の値を求めることができるか。

　(ｳ)　(ｱ) と同様に，正多角形の面積を求めることができるか。

(2)　(ｱ)　正弦定理を用いて，三角形の外接円の直径を求めることができるか。

　(ｲ)　2 辺とその間の角が与えらえたとき，余弦定理を用いて残りの 1 辺の長さを求めることができるか。

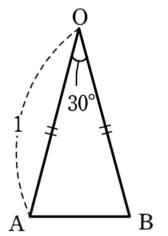
　(ｳ)　(1)(ｲ) と同様に，図形の性質を用いて正接の値を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1) (ｱ) 正十二角形の中心を O とし，ある 1 辺をAB とする。
$360° \div 12 = 30°$ であるから，求める正十二角形の面積は
$OA=OB=1$，$\angle AOB=30°$ の二等辺三角形 OAB の面積の 12 倍である。

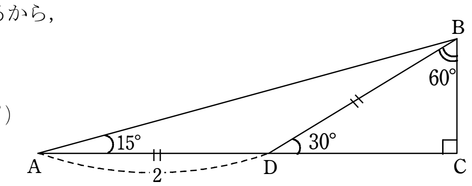
$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30°=\frac{1}{4}$$

よって，求める面積は　$12\cdot\frac{1}{4}=3$　答

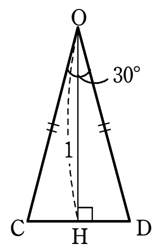


(ｲ) △ABD は二等辺三角形であるから，
$\angle BAD = \angle ABD = 15°$
よって，
$\angle ADB = 180° - (15°+15°)$
$= 150°$
これより
$\angle BDC = 180° - 150° = 30°$ となるので，
△BCD は $BD = 2$，$BC = 1$，$CD = \sqrt{3}$ の直角三角形であることがわかる。
よって，△ABC において

$$\tan 15°=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$　答



(ｳ) 正十二角形の中心を O とし，ある 1 辺をCD とする。
求める正十二角形の面積は，$OC=OD$，$\angle COD=30°$，底辺 CD に対する高さ OH が 1 の二等辺三角形 OCD の面積の 12 倍である。
△OHC において，$\tan 15°=\frac{CH}{OH}$ から $CH=OH\tan 15°$
(ｲ) より　$\tan 15°=2-\sqrt{3}$　であるから
$CH=1\times(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$
よって　$CD=2CH=2(2-\sqrt{3})$　となるから
△OCD の面積は　$\frac{1}{2}\cdot OH\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$
したがって，求める面積は　$12\cdot(2-\sqrt{3})=24-12\sqrt{3}$　答



別解
(1) の △OAB に対して △OAB∽△OCD であり，△OAB の底辺 AB に対する高さを h とすると，相似比は $h:1$，面積比は　$h^2:1^2$ である。
(1) の △OAB について，余弦定理から
$AB^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 30°=2-\sqrt{3}$
$AB>0$ であるから

$$AB=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3+1-2\sqrt{3}\cdot 1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{4}$ から　$h=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

よって　$AB:CD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}:1=1:\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1:(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\triangle OAB:\triangle OCD=1:(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=1:(8-4\sqrt{3})$

したがって，(1) より　$\frac{1}{4}:\triangle OCD=1:(8-4\sqrt{3})$　であるから
$\triangle OCD=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$ となるので，求める正十二角形の面積は
$12\cdot(2-\sqrt{3})=24-12\sqrt{3}$　答

(2) (ｱ) 正方形 DEFG の 1 辺の長さは △ABC の外接円の直径に等しい。
△ABC の外接円の半径を R とすると正弦定理から

$$2R=\frac{BC}{\sin A} \iff 2R=\frac{3}{\sin 60°} \iff 2R=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \iff 2R=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

よって　$2R=2\sqrt{3}$　より，正方形の 1 辺の長さは　$2\sqrt{3}$　答

(ｲ) △ABQ と △ABC のの底辺をそれぞれ BQ，BC とすると高さは等しいから(面積比)＝(底辺の比)となる。
よって，△ABQ の面積が △ABC の面積の $\frac{1}{3}$ であるから

$BQ:BC=\triangle ABQ:\triangle ABC \iff BQ:BC=\frac{1}{3}:1$

$BC=3$　であるから　$BQ=1$　である。
△ABQ において余弦定理を用いて

$$AQ^2=AB^2+BQ^2-2\cdot AB\cdot BQ\cdot\cos 60°=9+1-2\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=7$$

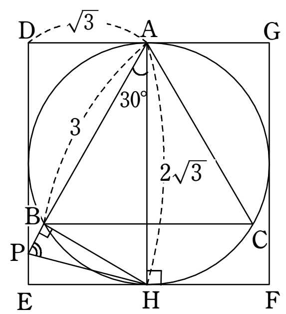
$AQ>0$ より　$AQ=\sqrt{7}$　答

(ｳ) 直径が作る円周角は直角であるから，
$\angle ABH = 90°$
$\angle APH = \angle BPH$ であるから
直角三角形 PBH において
$\tan\angle APH=\tan\angle BPH=\frac{BH}{BP}$　…①
よって，BH，BP の長さを求めればよい。
△ABH において三平方の定理を用いて
$BH=\sqrt{AH^2-AB^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$
次に，AH は ∠BAC の二等分線であるから
$\angle BAH = 30°$
これより，$\angle PAD = 90° - \angle BAH = 90° - 30 = 60°$　であるから
直角三角形 APD において　$\cos 60°=\frac{AD}{AP}$　より

$$AP=\frac{AD}{\cos 60°}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$$

よって，　$BP = AP - AB = 2\sqrt{3} - 3$
したがって，① から

$$\tan\angle APH=\frac{BH}{BP}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3)}{12-9}=2+\sqrt{3}$$　答



4 ＜選択問題＞　【 場合の数と確率 】

(1) 正十二角形について，次の数を求めなさい。ただし，12個の頂点はすべて区別できるものとする。

(ｱ) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数
(ｲ) (ｱ) の三角形のうち，直角三角形の個数
(ｳ) 正十二角形を 3 つの領域に分けるような三角形の個数

(2) クリスマスパーティーに，A，B，C，D の 4 人が 1 個ずつプレゼンを持って集まった。これらのプレゼントを一度集め，無作為に分配することにした。このとき，次の確率を求めなさい。

(ｱ) 全員が自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
(ｲ) A と B の 2 人だけが自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
(ｳ) 全員が自分の持ってきたプレゼントを受け取らない確率

【出題のねらい】

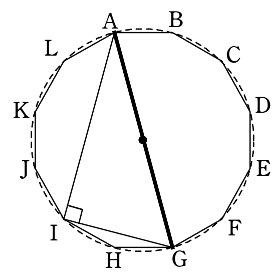
(1) (ｱ) 同じ直線上にない 3 点を結べば三角形が 1 つできることに着目し，組合せの計算を用いて三角形の個数を求めることができるか。
(ｲ) 中学校で学習した図形の性質（円周角）を用いて，三角形の個数を求めることができるか。
(ｳ) 3 つの領域に分ける三角形が正十二角形と 1 辺だけを共有する三角形であることに気づき，個数を求めることができるか。
(2) (ｱ)(ｲ) 順列を用いてプレゼントの受け取り方の総数を求め，条件を満たす確率を求めることができるか。
(ｳ) 余事象の確率を用いて，条件を満たす確率を求めることができるか。

＜解答・解説＞

(1) (ｱ) 正十二角形の 12 個の頂点から，3 個の頂点を選んで結べば，1 つ三角形ができる。よって，求める個数は

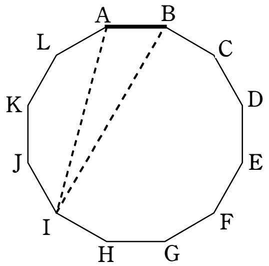
$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220\text{(個)}$$　答

(ｲ) 正十二角形に外接する円を考えると，
直径が作る円周角は直角である。このことから，
右図のように外接円の中心を通る対角線 AG を斜辺とする直角三角形は A，G 以外の頂点を選べるから 10 個できる。
同様に，BH，CI，DJ，EK，FL を斜辺とする直角三角形もそれぞれ 10個できるから
求める個数は　$10\times 6=60$(個)　答



(ウ)　正十二角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数を求めればよい。
右図のように辺 AB だけを共有する三角形の個数を考えると，辺の両端である A，B の両隣の 2 頂点 L，C 以外の頂点を選べるから，8 個。
よって，正十二角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数は

$$8\times 12=96\text{(個)}$$ 答



(2)　A，B，C，D が持ってきたプレゼントをそれぞれ a，b，c，d とする。
また，A が c，B が d，C が a，D が b を受け取ることを

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})=(c,d,a,b)$$

と書き表す。

(ア)　プレゼントの受け取り方の総数は　$4!=24$（通り）
全員が自分の持ってきたプレゼントを受け取るのは

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})=(a,b,c,d)$$

の　1 通り。
よって，求める確率は　$\dfrac{1}{24}$　答

(イ)　A と B の 2 人だけが自分の持ってきたプレゼントを受け取るのは

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})=(a,b,d,c)$$

の 1 通り。
よって，求める確率は　$\dfrac{1}{24}$　答

(ウ)　[1]　全員が自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
(ア) から　$\dfrac{1}{24}$
[2]　3 人が自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
3 人が自分の持ってきたプレゼントを受け取る起こらないから，0
[3]　2 人が自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
自分の持ってきたプレゼントを受け取る 2 人の選び方が　${}_4C_2$ 通り
(イ) から求める確率は　$\dfrac{{}_4C_2\times 1}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
[4]　1 人が自分の持ってきたプレゼントを受け取る確率
例えば，A だけが自分の持ってきたプレゼントを受け取るのは

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})=(a,c,d,b),(a,d,b,c)$$

の 2 通りであるから，求める確率は　$\dfrac{2\times 4}{24}=\dfrac{1}{3}$
[1]～[4] から，全員が自分の持ってきたプレゼントを受け取らない確率は

$$1-\left(\frac{1}{24}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{15}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$ 答

補足
プレゼントの受け取り方の総数は　$4!=24$（通り）
その総数をすべて書き表すと下のようになる。

$$\begin{aligned}(\mathrm{A,B,C,D})=\ &(a,b,c,d),(a,b,d,c),(a,c,b,d),(a,c,d,b),(a,d,b,c),(a,d,c,b),\\&(b,a,c,d),(b,a,d,c),(b,c,a,d),(b,c,d,a),(b,d,a,c),(b,d,c,a),\\&(c,a,b,d),(c,a,d,b),(c,b,a,d),(c,b,d,a),(c,d,a,b),(c,d,b,a),\\&(d,a,b,c),(d,a,c,b),(d,b,a,c),(d,b,c,a),(d,c,a,b),(d,c,b,a)\end{aligned}$$

これらから条件にあうものを数え上げて確率を求めてもよい。